НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача

Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь

Збірник наукових праць,
присвячений 80-річчю
Богдана Йосиповича Пташника

Львів – 2017

Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: збірник наукових праць, присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника / під заг. ред. Кушніра Р. М., Пелиха В. О. – Львів : ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – 256 с.

Збірник містить оригінальні статті, у яких встановлено умови однозначної розв'язності некласичних крайових задач для рівнянь із частинними похідними. Видання збірника присвячено 80-річчю члена-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора Пташника Богдана Йосиповича.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів, які спеціалізуються в галузі теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики.

Відповідальні редактори: член-кореспондент НАН України,
д. ф.-м. н. *Р. М. Кушнір*,
д. ф.-м. н. *В. О. Пелих*

Комп'ютерна верстка та макетування: к. ф.-м. н. *А. М. Кузь*,
к. ф.-м. н. *М. М. Симотюк*

Дизайн обкладинки: *В. В. Стасенко*

Затверджено до друку Вченою радою
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
протокол № 8 від 31 серпня 2017 року

ISBN 978-966-02-8315-2

Богдан Йосипович Пташник
(28.09.1937 – 22.02.2017)

Лиш в праці мужа виробляєсь сила,
Лиш праця світ таким, як є, створила,
Лиш в праці варто і для праці жить.

Іван Франко

ЗМІСТ

БОГДАН ЙОСИПОВИЧ ПТАШНИК
(28.09.1937–22.02.2017)

22 лютого 2017 року на 80-му році життя відійшов у вічність Богдан Йосипович Пташник — видатний український математик, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Б. Й. Пташник народився 28 вересня 1937 року в селищі Богородчани Івано-Франківської області. У 1959 році закінчив фізико-математичний факультет Івано-Франківського державного педагогічного інституту.

Трудову діяльність розпочав у серпні 1959 року вчителем математики та виробничого навчання Росільнянської СШ Богородчанського району Івано-Франківської області.

У 1961–1963 рр. працює асистентом кафедри математики Івано-Франківського державного педагогічного інституту. У 1963 р. вступає до аспірантури Інституту математики АН УРСР у відділ диференціальних рівнянь, яким завідував член-кореспондент АН України Ю. Д. Соколов. Науковим керівником аспіранта був професор В. Я. Скоробогатько. Обидва ці видатні вчені, Ю. Д. Соколов і В. Я. Скоробогатько, відіграли велику роль у формуванні Б. Й. Пташника як науковця і громадянина.

Після закінчення аспірантури з 1966 по 1969 рік він працював асистентом кафедри диференціальних рівнянь Львівського державного університету імені Івана Франка (з 1969 р. по 2000 р. — за сумісництвом). Тут у 1968 році захистив дисертацію „Задача Валле Пуссена та деякі крайові задачі для лінійних гіперболічних рівнянь“ на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Із 1969 року і до кінця свого життя Б. Й. Пташник працював в установах Академії наук України. У 1969–1972 роках він — старший науковий співробітник Фізико-механічного інституту АН України, з 1973 року працював старшим науковим співробітником Львівського філіалу математичної фізики Інституту математики АН України (з 1978 року — Інститут прикладних проблем механіки і математики (ІППММ) АН України). З 1982 по 1990 рік керував лабораторією некласичних задач математичної фізики ІППММ АН України. У 1989 році захистив в Інституті математики АН України докторську дисертацію „Некласичні крайові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними“, а в 1990 році йому присвоєно вчене звання професора. З 1990 року — завідувач відділу математичної фізики, з 2003 року — голова секції теоретичних і прикладних проблем математики при Вченій раді ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України.

У 1989 році Б. Й. Пташник стає членом щойно відновленого в Україні Наукового товариства імені Шевченка. У 2002 році Б. Й. Пташника обрано академіком Академії наук вищої школи України (за рекомендацією Вченої ради Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету „Львівська політехніка“), у 2003 році — членом-кореспондентом НАН України, а в 2006 році — дійсним членом Наукового товариства імені Шевченка. У 2007 р. йому присвоєно звання „Почесний доктор Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника“.

За заслуги в розвитку науки та освіти Б. Й. Пташнику присуджено ґрант для вчених і викладачів Міжнародної науково-освітньої програми Міжнародного фонду „Відродження“, нагороджено Почесною грамотою Президії НАН України (2003 р.); він є лауреатом премії НАН України імені М. О. Лаврентьєва (2007 р.).

Б. Й. Пташник створив наукову школу з теорії умовно коректних задач для рівнянь із частинними похідними, якій притаманні оригінальні напрямки досліджень. Він — автор понад 250 наукових праць з теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, теорії гіллястих ланцюгових дробів та історії математики, а також понад 20-ти науково-популярних статей. Під керівництвом Б. Й. Пташника успішно захищено 18 кандидатських і 3 докторські дисертації.

Разом із учнями Б. Й. Пташник розробив оригінальні методи (які базуються на метричному підході до аналізу проблеми малих знаменників) дослідження коректності та побудови розв'язків багатьох некласичних задач для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними (лінійних і слабконелінійних) скінченного та безмежного порядків, а також для диференціально-операторних рівнянь: 1) задачі з локальними багатоточковими умовами; 2) задачі типу задач Діріхле; 3) задачі про періодичні та майже періодичні розв'язки; 4) нелокальні крайові та багатоточкові задачі. Вказані задачі є, взагалі, некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. При дослідженні цих задач для гіперболічних, параболічних і безтипних рівнянь та систем рівнянь (в тому числі не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною) виникли малі знаменники складної нелінійної структури, оцінювання знизу яких призвело до нових, ще недосліджених задач метричної теорії чисел, що були розв'язані В. І. Берніком, завідувачем відділу Інституту математики НАН Бєларусі, Б. Й. Пташником та їхніми колегами.

Своїми знаннями й досвідом професор Б. Й. Пташник щедро ділився з молоддю. Впродовж багатьох років він читав спецкурси та керував науковою роботою магістрів, аспірантів і докторантів у Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, Національному університеті „Львівська політехніка“, ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львівському національному університеті імені Івана Франка.

Багато сил і часу віддавав Б. Й. Пташник науково-організаційній роботі з координації наукових досліджень та підготовки наукових кадрів високої кваліфікації з математики в Західному регіоні України. Із 1976 року він був секретарем секції механіки і математики, головою секції математики (1991–2000 рр.), заступником голови секції математики і математичного моделювання (2001–2006 рр.), а з 2007 року — керівником відділення фізико-технічних і математичних наук та головою секції математики і математичного моделювання Західного наукового центру НАН України та МОН України.

У 1993–1998 рр. Б. Й. Пташник був членом експертної ради з математики ВАК України, а у 1993–2000 рр. — заступником голови спеціалізованої ради по захисту докторських дисертацій у Львівському національному університеті імені Івана Франка.

Б. Й.Пташник був керівником Львівського міського семінару з диференціальних рівнянь при Львівському національному університеті імені Івана Франка, а також загальноінститутського математичного семінару в ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, членом редколегій багатьох математичних журналів та вісників, організатором періодичної Міжнародної математичної конференції ім. В. Я. Скоробогатька. Багато математиків України упродовж свого наукового зростання відчували велику підтримку професора Б. Й. Пташника як авторитетного фахівця, консультанта чи офіційного опонента на захистах дисертацій.

Впродовж багатьох років Б. Й. Пташник докладав багато зусиль для збереження пам’яті про засновників Наукового товариства імені Шевченка, творців української математичної термінології, вчителів багатьох поколінь — Володимира Левицького, Мирона Зарицького, Михайла Чайковського, і завжди згадував їх з особливою повагою та вдячністю. Відтепер світлу пам’ять про Богдана Йосиповича як талановитого вченого, педагога, популяризатора математичної культури, витонченого знавця та натхненного декламатора української поезії, великого патріота України, прекрасну й чуйну людину зберігатимуть та передаватимуть його учні, колеги, усі, з ким він спілкувався та працював.

УДК 517.524

Тамара Антонова[1], **Ольга Сусь** [2]

ПРО АБСОЛЮТНУ СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ ІЗ КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Для двовимірних неперервних дробів, елементи яких належать до деякої кутової множини правої півплощини, встановлено достатні умови їх абсолютної стійкості до збурень та одержано оцінку абсолютної похибки для їх фігурних наближень.

Неперервні дроби та їх багатовимірні узагальнення – гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) та двовимірні неперервні дроби (ДНД), мають властивість обмеженого нагромадження похибок, що виникають у процесі їх обчислень [3, 13, 16]. Проблема стійкості неперервних дробів постала при дослідженні алгоритмів обчислення їх наближень (підхідних дробів), зокрема, FR- та BR-алгоритмів [17, 18].

У роботах П.І. Боднарчука, В.Я. Скоробогатька та їх учнів досліджувалась асимптотична стійкість ГЛД [1] за допомогою властивостей відносних похибок.

У роботах [4] – [7], [9,10,14] були встановлені формули для відносних та абсолютних похибок підхідних дробів ГЛД та ДНД, за допомогою яких досліджувалась проблема їх стійкості до збурень. Так, зокрема, в роботах [2], [5] – [7], встановлено достатні умови відносної стійкості до збурень ГЛД з дійсними та комплексними елементами. Робота [11] присвячена дослідженню відносної та абсолютної стійкості до збурень ГЛД з комплексними елементами, які задовольняють умови багатовимірного аналогу теореми Слешинського – Прінгсгейма. Абсолютна стійкість до збурень ДНД з комплексними елементами, що належать до кругової області, вивчалась у роботах [4, 10, 14]. У роботі [12] досліджувалась стійкість до збурень інтегральних ланцюгових дробів.

У цій роботі досліджується абсолютна стійкість до збурень правильних ДНД типу Ван Флека [15].

Розглянемо нескінченний ДНД вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b_{k,k}+\Phi_k}, \quad \Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{k,k+j}}, \ k = 0, 1, \dots , \tag{1}$$

де $b_{i,j} \in G \subset \mathbb{C}, \ i, j = 0, 1, \dots$.

[1] *Національний університет „Львівська політехніка“, tamara_antonova@ukr.net*

[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, olja_sus@ukr.net*

Означення 1. *Назвемо n-ми фігурними наближеннями (або n-ми фігурними підхідними дробами) ДНД* (1) *скінченні ДНД вигляду*

$$f_n = \mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{1}{b_{k,k} + \Phi_k^{(n-2k-1)}}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

$$\Phi_k^{(0)} = 0,\ \Phi_k^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{1}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{1}{b_{k,k+j}},\ k = 0, 1, \dots,\ p = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

де $[a]$ *– ціла частина дійсного числа* a*.*

Вирази вигляду

$$\begin{gathered} Q_j^{(0)} = b_{j,j},\ Q_j^{(1)} = b_{j,j} + \Phi_j^{(1)}, \\ Q_j^{(p+2)} = b_{j,j} + \Phi_j^{(p+2)} + \frac{1}{Q_{j+1}^{(p)}},\ \ j, p = 0, 1, \dots, \end{gathered} \tag{4}$$

називають двовимірними залишками фігурних наближень (2), (3), а скінченні неперервні дроби

$$\begin{gathered} Q_{k+j,k}^{(0)} = b_{k+j,k}\,,\ Q_{k+j,k}^{(p+1)} = b_{k+j,k} + \frac{1}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}}, \\ Q_{k,k+j}^{(0)} = b_{k,k+j}\,,\ Q_{k,k+j}^{(p+1)} = b_{k,k+j} + \frac{1}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}}, \\ k, p = 0, 1, \dots,\ j = 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{5}$$

називають їх одновимірними залишками.

Нехай $\hat{b}_{i,i},\ \hat{b}_{i+j,i},\ \hat{b}_{i,i+j},\ i = 0, 1, \dots,\ j = 1, 2, \dots$, – збурені значення елементів $b_{i,i}\ \ b_{i+j,i}\ \ b_{i,i+j}\ \ i = 0, 1, \dots,\ j = 1, 2, \dots$, ДНД (1).

Тоді ДНД вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\hat{b}_{k,k} + \hat{\Phi}_k}, \quad \hat{\Phi}_k = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\hat{b}_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\hat{b}_{k,k+j}},\ k = 0, 1, \dots, \tag{6}$$

будемо називати збуреним ДНД.

Розглядаючи стійкість ДНД як їх неперервну залежність від елементів, за аналогією з ГЛД [7], означимо абсолютну стійкість до збурень ДНД (1).

Означення 2. *Множину* G *назвемо множиною фігурної абсолютної стійкості до збурень ДНД* (1)*, якщо:*

1) множина G *є множиною фігурної збіжності ДНД* (1) *та ДНД* (6)*, тобто з умов* $b_{i,j} \in G$, $\hat{b}_{i,j} \in G$, $i,\ j = 0, 1, \dots$, *випливає існування скінченних границь* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n$*;*

2) для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$, існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для кожного $b_{i,j} \in G,\ i,j = 0,1,\ldots,$ і кожного $\hat{b}_{i,j} \in G,\ i,j = 0,1,\ldots,$ таких що

$$\left|\hat{b}_{i,i} - b_{i,i}\right| < \delta,\ \left|\hat{b}_{i+j,i} - b_{i+j,i}\right| < \delta,\ \left|\hat{b}_{i,i+j} - b_{i,i+j}\right| < \delta,$$

$i = 0,1,\ldots,\ j = 1,2,\ldots,$ *виконуються нерівності* $|f_n - \hat{f}_n| < \varepsilon,\ n \geq 0.$

Величини вигляду

$$\Delta b_{i,i} = \hat{b}_{i,i} - b_{i,i},\ \Delta b_{i+j,i} = \hat{b}_{i+j,i} - b_{i+j,i},\ \Delta b_{i,i+j} = \hat{b}_{i,i+j} - b_{i,i+j}, \qquad (7)$$
$$i = 0,1,\ldots, j = 1,2,\ldots,$$

називаються абсолютними похибками елементів $b_{i,i},\ b_{i+j,i},\ b_{i,i+j}$, $i = 0,1,\ldots,\ j = 1,2,\ldots,$ ДНД (1), а вирази

$$\Delta f_n = \hat{f}_n - f_n,\ n = 1,2,\ldots,$$

називаються абсолютними похибками його n-х підхідних дробів f_n, $n = 1,2,\ldots.$

Використовуючи методику, запропоновану в [10, 14] для встановлення формули абсолютної похибки для абсолютної похибки n-х фігурних підхідних дробів ДНД (1), одержимо вираз вигляду

$$\Delta f_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{i+1}\Delta b_{i,i}}{\prod\limits_{j=0}^{i} Q_j^{(n-2j-1)} \prod\limits_{j=0}^{i} \hat{Q}_j^{(n-2j-1)}} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{i+1}}{\prod\limits_{j=0}^{i} Q_j^{(n-2j-1)} \hat{Q}_j^{(n-2j-1)}} \left(\sum_{\ell=1}^{n-2i-1} \frac{(-1)^{\ell}\Delta b_{i+\ell,i}}{\prod\limits_{j=1}^{\ell} Q_{i+j,i}^{(n-2i-1-j)} \hat{Q}_{i+j,i}^{(n-2i-1-j)}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\ell=1}^{n-2i-1} \frac{(-1)^{\ell}\Delta b_{i,i+\ell}}{\prod\limits_{j=1}^{\ell} Q_{i,i+j}^{(n-2i-1-j)} \hat{Q}_{i,i+j}^{(n-2i-1-j)}} \right), \qquad (8)$$

де $\Delta b_{i,j},\ i,j = 0,1,\ldots,$ визначаються за формулами (7), $Q_i^{(p)},\ Q_{i+j,i}^{(p)}$, $Q_{i,i+j}^{(p)},\ i = 0,1,\ldots,\ j = 1,2,\ldots,\ p = 0,1,\ldots,$ залишки ДНД (1), які задаються формулами (4), (5), $\hat{Q}_i^{(p)},\ \hat{Q}_{i+j,i}^{(p)},\ \hat{Q}_{i,i+j}^{(p)},\ i = 0,1,\ldots,\ j = 1,2,\ldots,$ $p = 0,1,\ldots,$ – залишки збуреного ДНД (6), які визначаються за формулами (4), (5) у яких елементи $b_{i,j},\ i,j = 0,1,\ldots,$ відповідно замінено на елементи $\hat{b}_{i,j},\ i,j = 0,1,\ldots.$

Нехай елементи $b_{i,i}$, $b_{i+j,i}$, $b_{i,i+j}$, $i = 0, 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots$, ДНД (1) та елементи $\hat{b}_{i,i}$, $\hat{b}_{i+j,i}$, $\hat{b}_{i,i+j}$, $i = 0, 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots$, збуреного ДНД (6) належать кутовій множині правої півплощини

$$G_\theta = \left\{ z : |\arg z| < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Питанням дослідження збіжності та фігурної збіжності ДНД (1), елементи яких належать множині G_θ, присвячено роботи [8, 15]. Встановлено, що для збіжності та фігурної збіжності таких ДНД їх елементи повинні задовольняти деякі додаткові умови. У наступній теоремі сформульовано умови, достатні для того, щоб ДНД (1) мала властивість фігурної абсолютної стійкості до збурень.

Теорема 1. *Нехай елементи ДНД* (1) *та збуреного до нього ДНД* (6) *належать до кутової множини правої півплощини*

$$G_{\theta,b} = \left\{ z : |\arg z| < \theta < \frac{\pi}{2},\ \Re z \geq b > 0 \right\},$$

і абсолютні похибки елементів ДНД (1) *є рівномірно обмеженими:*

$$|\Delta b_{i,i}| \leq \Delta,\ |\Delta b_{i+k,i}| \leq \Delta,\ |\Delta b_{i,i+k}| \leq \Delta,\ i = 0, 1, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

Якщо існують послідовності $\{\mu_k\}$, $\{\mu'_k\}$, $\{\mu''_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, *додатних чисел таких, що*

$$\mu_i \leq \Re b_{i-1,i-1} \Re b_{i,i},\ \mu_i \leq \Re \hat{b}_{i-1,i-1} \Re \hat{b}_{i,i},\ i = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

і для всіх $i = 0, 1, \ldots,\ k = 2, 3, \ldots,$

$$\mu'_k \leq \Re b_{i+k-1,i} \Re b_{i+k,i}, \quad \mu'_k \leq \Re \hat{b}_{i+k-1,i} \Re \hat{b}_{i+k,i}, \tag{11}$$

$$\mu''_k \leq \Re b_{i,i+k-1} \Re b_{i,i+k},\ \mu''_k \leq \Re \hat{b}_{i,i+k-1} \Re \hat{b}_{i,i+k}, \tag{12}$$

$$\mu'_1 \leq \Re b_{i,i} \Re b_{i+1,i},\ \mu'_1 \leq \Re \hat{b}_{i,i} \Re \hat{b}_{i+1,i}, \tag{13}$$

$$\mu''_1 \leq \Re b_{i,i} \Re b_{i,i+1},\ \mu''_1 \leq \Re \hat{b}_{i,i} \Re \hat{b}_{i,i+1}, \tag{14}$$

а також є збіжними є ряди

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{\mu_j + \cos\theta}, \tag{15}$$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\mu'_k + \cos\theta}, \tag{16}$$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\ell}\frac{1}{\mu_k''+\cos\theta}, \tag{17}$$

то для абсолютної похибки n-го підхідного дробу ДНД (1) *справджується оцінка*

$$|\Delta f_n| < \frac{\Delta}{b\Re b_{0,0}}S + \frac{\Delta}{b\Re b_{0,0}}S(S'+S''),\ n=1,2,\ldots, \tag{18}$$

де S, S', S'' – суми рядів (15), (16), (17) *відповідно.*

Доведення. Використовуючи формулу (8), оцінимо за абсолютною величиною $\Delta f_n,\ n=1,2,\ldots$.

Нехай

$$I_1(i,n)=\frac{|\Delta b_{i,i}|}{\prod\limits_{j=0}^{i}|Q_j^{(n-2j-1)}|\prod\limits_{j=0}^{i}|\hat{Q}_j^{(n-2j-1)}|}, \tag{19}$$

$$I_2(i,n)=\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{i}|Q_j^{(n-2j-1)}|\prod\limits_{j=0}^{i}|\hat{Q}_j^{(n-2j-1)}|}, \tag{20}$$

$$T_1(\ell,m)=\frac{|\Delta b_{i+\ell,i}|}{\prod\limits_{j=1}^{\ell}|Q_{i+j,i}^{(m-j)}|\prod\limits_{j=1}^{\ell}|\hat{Q}_{i+j,i}^{(m-j)}|}, \tag{21}$$

$$T_2(\ell,m)=\frac{|\Delta b_{i,i+\ell}|}{\prod\limits_{j=1}^{\ell}|Q_{i,i+j}^{(m-j)}|\prod\limits_{j=1}^{\ell}|\hat{Q}_{i,i+j}^{(m-j)}|}. \tag{22}$$

Враховуючи позначення (19)–(22), оцінку для $|\Delta f_{2p-1}|$, $|\Delta f_{2p}|$, $p=1,2,\ldots$, подамо у вигляді

$$|\Delta f_{2p-1}| \le \sum_{i=0}^{p-1} I_1(i,2p-1) +$$

$$+\sum_{i=0}^{p-1} I_2(i,2p-1)\sum_{\ell=0}^{2p-2i-2}\left(T_1(\ell,2p-2i-2)+T_2(\ell,2p-2i-2)\right), \tag{23}$$

$$\Delta|f_{2p}| \le \sum_{i=0}^{p-1} I_1(i,2p) +$$

$$+\sum_{i=0}^{p-1} I_2(i,2p)\sum_{\ell=0}^{2p-2i-1}\left(T_1(\ell,2p-2i-1)+T_2(\ell,2p-2i-1)\right). \tag{24}$$

Для дослідження виразів (23) та (24) використаємо методику, запропоновану в роботі [15], та отримані у ній нерівності для залишків ДНД (1) та ДНД (6), які наведемо без доведення.

Отже, за умов теореми для двовимірних залишків ДНД (1) та збуреного до нього ДНД (6) справджуються нерівності

$$\begin{gathered}|Q_i^{(0)}| \geq \Re Q_i^{(0)} = \Re_{i,i},\\ |Q_i^{(1)}| \geq \Re Q_i^{(1)} = \Re b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{|Q_{i+1,i}^{(0)}|} + \frac{\cos\theta}{|Q_{i,i+1}^{(0)}|} > \Re b_{i,i},\\ |Q_i^{(p+2)}| \geq \Re b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{|Q_{i+1,i}^{(p+1)}|} + \frac{\cos\theta}{|Q_{i,i+1}^{(p+1)}|} + \frac{\cos\theta}{|Q_{i+1}^{(p)}|} > \Re b_{i,i},\\ i = 0,1,\ldots,\ p = 0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}|\hat{Q}_i^{(0)}| \geq \Re \hat{Q}_i^{(0)} = \Re\hat{b}_{i,i},\\ |\hat{Q}_i^{(1)}| \geq \Re \hat{Q}_i^{(1)} = \Re\hat{b}_{i,i} + \frac{\cos\theta}{|\hat{Q}_{i+1,i}^{(0)}|} + \frac{\cos\theta}{|\hat{Q}_{i,i+1}^{(0)}|} > \Re\hat{b}_{i,i},\\ |\hat{Q}_i^{(p+2)}| \geq \Re\hat{b}_{i,i} + \frac{\cos\theta}{|\hat{Q}_{i+1,i}^{(p+1)}|} + \frac{\cos\theta}{|\hat{Q}_{i,i+1}^{(p+1)}|} + \frac{\cos\theta}{|\hat{Q}_{i+1}^{(p)}|} > \Re\hat{b}_{i,i},\\ i = 0,1,\ldots,\ p = 0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{26}$$

а для одновимірних залишків ДНД (1) та ДНД (6) – нерівності

$$\begin{gathered}|Q_{i,i+k}^{(0)}| = \Re b_{i,i+k},\ |Q_{i,i+k}^{(p+1)}| \geq \Re b_{i,i+k} + \frac{\cos\theta}{|Q_{i,i+k+1}^{(p)}|} \geq \Re b_{i,i+k},\\ i = 0,1,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,\ p = 0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{27}$$

та

$$\begin{gathered}|\hat{Q}_{i+k,i}^{(0)}| = \Re\hat{b}_{i+k,i},\ |\hat{Q}_{i+k,i}^{(p+1)}| \geq \Re\hat{b}_{i+k,i} + \frac{\cos\theta}{|\hat{Q}_{i+k+1,i}^{(p)}|} \geq \Re\hat{b}_{i+k,i},\\ |\hat{Q}_{i,i+k}^{(0)}| = \Re\hat{b}_{i,i+k},\ |\hat{Q}_{i,i+k}^{(p+1)}| \geq \Re\hat{b}_{i,i+k} + \frac{\cos\theta}{|\hat{Q}_{i,i+k+1}^{(p)}|} \geq \Re\hat{b}_{i,i+k},\\ i = 0,1,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,\ p = 0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{28}$$

Для оцінки знизу знаменників виразів (19), (20) у випадку $n = 2p-1$, $p = 1,2,\ldots,$ розглянемо добутки $\prod\limits_{j=0}^{i} |Q_j^{(2p-2j-2)}\hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}|$, $p = 1,2,\ldots,$ для $i = 2s$, $s = \overline{0,[(p-1)/2]}$, та $i = 2s-1$, $s = \overline{1,[p/2]}$.

Нехай $i = 2s$. Тоді

$$\prod_{j=0}^{2s}\left|Q_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{j=0}^{2s}\left|\hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}\right| = \left|Q_0^{(2p-2)}\right|\left|\hat{Q}_{2s}^{(2p-4s-2)}\right| \times$$

$$\times\prod_{j=1}^{s}\left|Q_{2j-1}^{(2p-4j)}Q_{2j}^{(2p-4j-2)}\right|\prod_{j=0}^{s-1}\left|\hat{Q}_{2j}^{(2p-4j-2)}\hat{Q}_{2j+1}^{(2p-4j-4)}\right|, \quad p = 1, 2, \ldots. \quad (29)$$

Використовуючи позначення (4) та нерівності (25), маємо:

$$\left|Q_i^{(r)}Q_{i+1}^{(r-2)}\right| \ge \Re Q_i^{(r)}\left|Q_{i+1}^{(r-2)}\right| \ge \left(\Re b_{i,i} + \frac{\cos\theta}{\left|Q_{i+1}^{(r-2)}\right|}\right)\left|Q_{i+1}^{(r-2)}\right| \ge$$

$$\ge \Re b_{i,i}\left|Q_{i+1}^{(r-2)}\right| + \cos\theta \ge \Re b_{i,i}\Re b_{i+1,i+1} + \cos\theta,\ i = 0, 1, \ldots,\ r \ge 2. \quad (30)$$

Аналогічна нерівність справджується і для двовимірних залишків збуреного ДНД (6)

$$\left|\hat{Q}_i^{(r)}\hat{Q}_{i+1}^{(r-2)}\right| \ge \Re\hat{b}_{i,i}\Re\hat{b}_{i+1,i+1} + \cos\theta,\ i = 0, 1, \ldots,\ r \ge 2. \quad (31)$$

Підставляючи отримані нерівності (30), (31) у вираз (29), одержимо

$$\prod_{j=0}^{2s}\left|Q_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{j=0}^{2s}\left|\hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}\right| \ge \left|Q_0^{(2p-2)}\right|\left|\hat{Q}_{2s}^{(2p-4s-2)}\right| \times$$

$$\times\prod_{j=1}^{s}\left(\Re b_{2j-1,2j-1}\Re b_{2j,2j} + \cos\theta\right)\prod_{j=0}^{s-1}\left(\Re\hat{b}_{2j,2j}\Re\hat{b}_{2j+1,2j+1} + \cos\theta\right) \ge$$

$$\ge \left|Q_0^{(2p-2)}\right|\left|\hat{Q}_{2s}^{(2p-4s-2)}\right|\prod_{j=1}^{s}\left(\mu_{2j} + \cos\theta\right)\prod_{j=0}^{s-1}\left(\mu_{2j+1} + \cos\theta\right) \ge$$

$$\ge \Re b_{0,0}\Re\hat{b}_{2s,2s}\prod_{j=1}^{2s}\left(\mu_j + \cos\theta\right),\ p = 1, 2, \ldots,\ s = \overline{0, \left[\frac{p-1}{2}\right]}, \quad (32)$$

де μ_j задовольняють умову (10).

Нехай $i = 2s - 1$. Тоді

$$\prod_{j=0}^{2s-1}\left|Q_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{j=0}^{2s-1}\left|\hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}\right| = \left|Q_0^{(2p-2)}\right|\left|Q_{2s-1}^{(2p-4s)}\right| \times$$

$$\times\prod_{j=1}^{s-1}\left|Q_{2j-1}^{(2p-4j)}Q_{2j}^{(2p-4j-2)}\right|\prod_{j=0}^{s-1}\left|\hat{Q}_{2j}^{(2p-4j-2)}\hat{Q}_{2j+1}^{(2p-4j-4)}\right|,$$

і аналогічно, як у попередньому випадку, застосовуючи нерівності (25), одержимо

$$\prod_{j=0}^{2s-1}\left|Q_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{j=0}^{2s-1}\left|\hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}\right|\geq\Re b_{0,0}\Re b_{2s-1,2s-1}\prod_{j=1}^{2s-1}\left(\mu_j+\cos\theta\right), \tag{33}$$

де $p=2,3,\ldots,\ s=\overline{1,\left[\frac{p}{2}\right]};\ \mu_j,\ j=1,2,\ldots,$ задовольняють умову (10).

Беручи до уваги оцінки (32), (33), умови (9) і $b_{i,k}\in G_{\theta,b},\ \hat{b}_{i,k}\in G_{\theta,b}$, $i,k=0,1,\ldots,$ доходимо висновку, що

$$I(i,2p-1)\leq\frac{\Delta}{b\Re b_{0,0}}\prod_{j=1}^{i}\frac{1}{(\mu_j+\cos\theta)},\ p=1,2,\ldots,\ i=\overline{0,p-1}. \tag{34}$$

Далі, встановимо оцінки знизу для добутків

$$\prod_{j=0}^{i}\left|Q_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{j=0}^{i}\left|\hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{k=1}^{\ell}\left|Q_{i+k,i}^{(2p-2i-k-2)}\right|\prod_{k=1}^{\ell}\left|\hat{Q}_{i+k,i}^{(2p-2i-k-2)}\right|,$$

$$\prod_{j=0}^{i}\left|Q_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{j=0}^{i}\left|\hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{k=1}^{\ell}\left|Q_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)}\right|\prod_{k=1}^{\ell}\left|\hat{Q}_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)}\right|,$$

що містяться у знаменниках виразів

$$I_2(i,2p-1)\left(T_1(\ell,2p-2i-2)+T_2(\ell,2p-2i-2)\right),$$

де вирази $I_2(i,2p-1)$, $T_1(\ell,2p-2i-2)$, $T_2(\ell,2p-2i-2)$, як функції верхніх індексів добутків та порядків залишків, визначаються за формулами (20), (21), (22) відповідно. Для цього дослідимо чотири випадки значень верхніх індексів i та ℓ.

1) Нехай $i=2s,\ s=\overline{0,\left[\frac{p-1}{2}\right]},\ \ell=2r-1,r=\overline{1,p-2s-1}.$ Тоді

$$\Pi_1=\prod_{j=0}^{2s}\left|Q_j^{(2p-2j-2)}\hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}\right|\prod_{k=1}^{2r-1}\left|Q_{i+k,i}^{(2p-4s-k-2)}\hat{Q}_{i+k,i}^{(2p-4s-k-2)}\right|=$$

$$\left|Q_0^{(2p-2)}\right|\left|\hat{Q}_{2s}^{(2p-4s-2)}\hat{Q}_{2s+1,2s}^{(2p-4s-3)}\right|\left|Q_{2s+2r-1,2s}^{(2p-4s-2r-1)}\right|\prod_{j=1}^{s}\left|Q_{2j-1}^{(2p-4j)}Q_{2j}^{(2p-4j-2)}\right|\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{s-1}\left|\hat{Q}_{2j}^{(2p-4j-2)}\hat{Q}_{2j+1}^{(2p-4j-4)}\right|\prod_{k=1}^{r-1}\left|Q_{2s+2k-1,2s}^{(2p-4s-2k-1)}Q_{2s+2k,2s}^{(2p-4s-2k-2)}\right|\times$$

$$\times \prod_{k=1}^{r-1} \left| \hat{Q}_{2s+2k,2s}^{(2p-4s-2k-2)} \hat{Q}_{2s+2k+1,2s}^{(2p-4s-2k-3)} \right|. \qquad (35)$$

Оцінимо добуток двох сусідніх одновимірних залишків $\left|Q_{i+2k-1,i}^{(p)} Q_{i+2k,i}^{(p-1)}\right|$ ДНД (1) та $\left|\hat{Q}_{i+2k,i}^{(p)} \hat{Q}_{i+2k+1,i}^{(p-1)}\right|$ збуреного ДНД (6), $(i = 0, 1, \dots,\ k = 1, 2, \dots,\ p = 1, 2, \dots)$, використовуючи формули для одновимірних залишків (5) ДНД (1) та відповідні вирази для збуреного ДНД (6) і нерівності (27), (28).

Отже,

$$\left|Q_{i+2k-1,i}^{(p)} Q_{i+2k,i}^{(p-1)}\right| \geq \Re Q_{i+2k-1,i}^{(p)} \left|Q_{i+2k,i}^{(p-1)}\right| \geq \Re b_{i+2k-1,i} \left|Q_{i+2k,i}^{(p-1)}\right| + \cos\theta \geq$$

$$\geq \Re b_{i+2k-1,i} \Re b_{i+2k,i} + \cos\theta \geq \mu'_{2k} + \cos\theta, \qquad (36)$$

де $i = 0, 1, \dots, p, k = 1, 2, \dots$. Аналогічно,

$$\left|\hat{Q}_{i+2k,i}^{(p)} \hat{Q}_{i+2k+1,i}^{(p-1)}\right| \geq \Re \hat{b}_{i+2k,i} \Re \hat{b}_{i+2k+1,i} + \cos\theta \geq$$

$$\geq \mu'_{2k+1} + \cos\theta, \ \ i = 0, 1, \dots, \qquad p, k = 1, 2, \dots . \qquad (37)$$

Для оцінки добутку двовимірного та одновимірного залишків ДНД (6) беремо до уваги нерівності (25), (27):

$$\left|\hat{Q}_{2s}^{(p)}\right| \left|\hat{Q}_{2s+1,2s}^{(p-1)}\right| \geq \Re \hat{Q}_{2s}^{(p)} \left|\hat{Q}_{2s+1,2s}^{(p-1)}\right| \geq \left(\Re \hat{b}_{2s,2s} + \frac{\cos\theta}{\left|\hat{Q}_{2s+1,2s}^{(p-1)}\right|} \right) \times$$

$$\times \left|\hat{Q}_{2s+1,2s}^{(p-1)}\right| \geq \Re \hat{b}_{2s,2s} \Re \hat{b}_{2s+1,2s} + \cos\theta \geq \mu'_1 + \cos\theta. \qquad (38)$$

Підставляючи оцінки (32), (36), (37), (38) у вираз (35), одержимо

$$\Pi_1 \geq \Re b_{0,0} \Re b_{2s+2r-1,2s} \prod_{j=1}^{2s} (\mu_j + \cos\theta) \prod_{k=1}^{2r-1} \left(\mu'_k + \cos\theta\right), \qquad (39)$$

де $\mu_j, j = 1, 2, \dots$, визначаються згідно з (10), μ_1 – згідно з (13) а $\mu'_k,\ k = 2, 3, \dots,$ – згідно з (11).

2) Якщо $i = 2s,\ s = \overline{0, \left[\frac{p-1}{2}\right]},\ \ell = 2r,\ r = \overline{1, p-2s-1}$, то

$$\Pi_2 = \prod_{j=0}^{2s} \left|Q_j^{(2p-2j-2)} \hat{Q}_j^{(2p-2j-2)}\right| \prod_{k=1}^{2r} \left|Q_{i+k,i}^{(2p-2i-k-2)} \hat{Q}_{i+k,i}^{(2p-2i-k-2)}\right| =$$

$$\left|Q_0^{(2p-2)}\right| \left|\hat{Q}_{2s}^{(2p-4s-2)} \hat{Q}_{2s+1,2s}^{(2p-4s-3)}\right| \left|\hat{Q}_{2s+2r,2s}^{(2p-4s-2r-2)}\right| \prod_{j=1}^{s} \left|Q_{2j-1}^{(2p-4j)} Q_{2j}^{(2p-4j-2)}\right| \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{s-1} \left| \hat{Q}_{2j}^{(2p-4j-2)} \hat{Q}_{2j+1}^{(2p-4j-4)} \right| \prod_{k=1}^{r} \left| Q_{2s+2k-1,2s}^{(2p-4s-2k-1)} Q_{2s+2k,2s}^{(2p-4s-2k-2)} \right| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{r-1} \left| \hat{Q}_{2s+2k,2s}^{(2p-4s-2k-2)} \hat{Q}_{2s+2k+1,2s}^{(2p-4s-2k-3)} \right|. \qquad (40)$$

Підставляючи оцінки (33), (36), (37), (38) у вираз (40), одержимо

$$\Pi_2 \geq \Re b_{0,0} \Re \hat{b}_{2s+2r,2s} \prod_{j=1}^{2s} (\mu_j + \cos\theta) \prod_{k=1}^{2r} \left(\mu_k' + \cos\theta\right), \qquad (41)$$

де $\mu_j, j = 1, 2, \ldots,$ $\mu_k', k = 2, 3, \ldots,$ μ_1' визначаються з умов (10), (11), (13) відповідно.

3) Розглянемо випадок, коли $i = 2s-1$, $\ell = 2r-1$, $s = \overline{1, [p/2]}$, $r = \overline{1, p-2s}$.

$$\Pi_3 = \prod_{j=0}^{2s-1} \left| Q_j^{(2p-2j-2)} \hat{Q}_j^{(2p-2j-2)} \right| \prod_{k=1}^{2r-1} \left| Q_{i+k,i}^{(2p-2i-k-2)} \hat{Q}_{i+k,i}^{(2p-2i-k-2)} \right| =$$

$$\left| Q_0^{(2p-2)} \right| \left| Q_{2s-1}^{(2p-4s)} Q_{2s,2s-1}^{(2p-4s-1)} \right| \left| \hat{Q}_{2s-1+2r-1,2s-1}^{(2p-4s-2r+1)} \right| \prod_{j=1}^{s-1} \left| Q_{2j-1}^{(2p-4j)} Q_{2j}^{(2p-4j-2)} \right| \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{s-1} \left| \hat{Q}_{2j}^{(2p-4j-2)} \hat{Q}_{2j+1}^{(2p-4j-4)} \right| \prod_{k=1}^{r-1} \left| Q_{2s-1+2k,2s-1}^{(2p-4s-4k-4)} Q_{2s-1+2k+1,2s-1}^{(2p-4s-4k-2)} \right| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{r-1} \left| \hat{Q}_{2s-1+2k-1,2s-1}^{(2p-4s-4k+2)} \hat{Q}_{2s_1+2k,2s-1}^{(2p-4s-4k)} \right|. \qquad (42)$$

Оцінюючи $\left| Q_{2s-1}^{(r)} Q_{2s,2s-1}^{(r-1)} \right|$, маємо

$$\left| Q_{2s-1}^{(r)} \right| \left| Q_{2s,2s-1}^{(r-1)} \right| \geq \Re Q_{2s-1}^{(r)} \left| Q_{2s,2s-1}^{(r-1)} \right| \geq \left(\Re b_{2s-1,2s-1} + \frac{\cos\theta}{\left| \hat{Q}_{2s,2s-1}^{(p-1)} \right|} \right) \times$$

$$\times \left| Q_{2s,2s-1}^{(p-1)} \right| \geq \Re b_{2s-1,2s-1} \Re b_{2s,2s-1} + \cos\theta \geq \tilde{\mu}_1' + \cos\theta$$

і для виразу (42) аналогічно, як це зроблено у попередніх двох випадках, одержуємо нерівність

$$\Pi_3 \geq \Re b_{0,0} \Re \hat{b}_{2s+2r-2,2s-1} \prod_{j=1}^{2s-1} (\mu_j + \cos\theta) \prod_{k=1}^{2r-1} \left(\mu_k' + \cos\theta\right), \qquad (43)$$

де $\mu_j, j = 1,2,\ldots,$ $\mu'_k, k = 2,3,\ldots,$ μ'_1 визначаються з умов (10), (11), (13) відповідно.

4) У випадку $i = 2s-1,\ s = \overline{1,[p/2]},\ \ell = 2r,\ r = \overline{1,p-2s},$ маємо:

$$\Pi_4 = \prod_{j=0}^{2s-1} \left| Q_j^{(2p-2j-2)} \hat{Q}_j^{(2p-2j-2)} \right| \prod_{k=1}^{2r} \left| Q_{i+k,i}^{(2p-2i-k-2)} \hat{Q}_{i+k,i}^{(2p-2i-k-2)} \right| =$$

$$= \left| Q_0^{(2p-2)} \right| \left| Q_{2s-1}^{(2p-4s)} Q_{2s,2s-1}^{(2p-4s-1)} \right| \left| Q_{2s-1+2r,2s}^{(2p-4s-4r)} \right| \prod_{j=1}^{s-1} \left| Q_{2j-1}^{(2p-4j)} Q_{2j}^{(2p-4j-2)} \right| \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{s-1} \left| \hat{Q}_{2j}^{(2p-4j-2)} \hat{Q}_{2j+1}^{(2p-4j-4)} \right| \prod_{k=1}^{r-1} \left| Q_{2s-1+2k,2s-1}^{(2p-4s-4k-4)} Q_{2s-1+2k+1,2s-1}^{(2p-4s-4k-2)} \right| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{r} \left| \hat{Q}_{2s-1+2k-1,2s-1}^{(2p-4s-4k+2)} \hat{Q}_{2s_1+2k,2s-1}^{(2p-4s-4k)} \right|. \tag{44}$$

За аналогічною схемою для виразу (44) одержимо оцінку

$$\Pi_4 \geq \Re b_{0,0} \Re b_{2s+2r-1,2s-1} \prod_{j=1}^{2s-1} (\mu_j + \cos\theta) \prod_{k=1}^{2r} \left(\mu'_k + \cos\theta\right), \tag{45}$$

де μ_j, μ'_j, $j = 1,2,\ldots,$ визначаються так само, як у попередніх випадках.

Без доведення запишемо нерівності, які справджуються для добутків

$$\tilde{\Pi}_1 = \prod_{j=0}^{2s} \left| Q_j^{(2p-2j-2)} \hat{Q}_j^{(2p-2j-2)} \right| \prod_{k=1}^{2r-1} \left| Q_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)} \hat{Q}_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)} \right| \geq$$

$$\geq \Re b_{0,0} \Re b_{2s,2s+2r-1} \prod_{j=1}^{2s} (\mu_j + \cos\theta) \prod_{k=1}^{2r-1} \left(\mu''_k + \cos\theta\right), \tag{46}$$

$$\tilde{\Pi}_2 = \prod_{j=0}^{2s} \left| Q_j^{(2p-2j-2)} \hat{Q}_j^{(2p-2j-2)} \right| \prod_{k=1}^{2r} \left| Q_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)} \hat{Q}_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)} \right| \geq$$

$$\geq \Re b_{0,0} \Re \hat{b}_{2s,2s+2r} \prod_{j=1}^{2s} (\mu_j + \cos\theta) \prod_{k=1}^{2r} \left(\mu''_k + \cos\theta\right), \tag{47}$$

$$\tilde{\Pi}_3 = \prod_{j=0}^{2s-1} \left| Q_j^{(2p-2j-2)} \hat{Q}_j^{(2p-2j-2)} \right| \prod_{k=1}^{2r-1} \left| Q_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)} \hat{Q}_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)} \right| \geq$$

$$\geq \Re b_{0,0} \Re \hat{b}_{2s-1,2s+2r-2} \prod_{j=1}^{2s-1} (\mu_j + \cos\theta) \prod_{k=1}^{2r-1} \left(\mu''_k + \cos\theta\right), \tag{48}$$

$$\tilde{\Pi}_4 = \prod_{j=0}^{2s-1} \left| Q_j^{(2p-2j-2)} \hat{Q}_j^{(2p-2j-2)} \right| \prod_{k=1}^{2r} \left| Q_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)} \hat{Q}_{i,i+k}^{(2p-2i-k-2)} \right| \geq$$

$$\geq \Re b_{0,0} \Re b_{2s-1,2s+2r-1} \prod_{j=1}^{2s-1} (\mu_j + \cos\theta) \prod_{k=1}^{2r} \left(\mu_k'' + \cos\theta\right), \qquad (49)$$

де $\mu_j, j = 1, 2, \ldots,$ $\mu_1'',$ $\mu_k'', k = 2, 3, \ldots,$ задовольняють нерівності (10), (14), (12) відповідно.

Беручи до уваги оцінки (39), (41), (43), (45), (46)–(49), умови (9) і $b_{i,k} \in G_{\theta,b},$ $\hat{b}_{i,k} \in G_{\theta,b},$ $i, k = 0, 1, \ldots,$ доходимо висновку, що

$$I_2(i, 2p-1) T_1(\ell, 2p-2i-2) \leq \frac{\Delta}{b \Re b_{0,0}} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{(\mu_j + \cos\theta)} \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\left(\mu_k' + \cos\theta\right)}, \quad (50)$$

$$I_2(i, 2p-1) T_2(\ell, 2p-2i-2) \leq \frac{\Delta}{b \Re b_{0,0}} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{(\mu_j + \cos\theta)} \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\left(\mu_k'' + \cos\theta\right)}, \quad (51)$$

де $I_2(i, 2p-1),$ $T_1(\ell, 2p-2i-2),$ $T_2(\ell, 2p-2i-2),$ визначаються за формулами (20) – (22) з відповідними значеннями індексів.

Підставляючи оцінки (34), (50), (51) у вираз (23), одержимо

$$|\Delta f_{2p-1}| \leq \frac{\Delta}{b \Re b_{0,0}} \sum_{i=0}^{p-1} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{(\mu_j + \cos\theta)} + \frac{\Delta}{b \Re b_{0,0}} \sum_{i=0}^{p-1} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{(\mu_j + \cos\theta)} \times$$

$$\times \sum_{\ell=0}^{2p-2i-2} \left(\prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\left(\mu_k' + \cos\theta\right)} + \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\left(\mu_k'' + \cos\theta\right)} \right). \qquad (52)$$

Повторюючи наведений хід міркувань, з урахуванням (24) можна показати, що для довільного $p = 1, \ldots,$ справджується оцінка

$$|\Delta f_{2p}| \leq \frac{\Delta}{b \Re b_{0,0}} \sum_{i=0}^{p-1} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{(\mu_j + \cos\theta)} + \frac{\Delta}{b \Re b_{0,0}} \sum_{i=0}^{p-1} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{(\mu_j + \cos\theta)} \times$$

$$\times \sum_{\ell=0}^{2p-2i-1} \left(\prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\left(\mu_k' + \cos\theta\right)} + \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\left(\mu_k'' + \cos\theta\right)} \right). \qquad (53)$$

Зважаючи на збіжність рядів (15)–(17), доходимо висновку, що

$$|\Delta f_n| < \frac{\Delta}{b \Re b_{0,0}} S + \frac{\Delta}{b \Re b_{0,0}} S(S' + S''), \ n = 1, 2, \ldots,$$

де S, S', S'' – суми рядів (15), (16), (17) відповідно, а це означає, що за умов теореми ДНД (1) має властивість фігурної абсолютної стійкості до збурень. ■

1. *Боднарчук П.І., Скоробогатько В.Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К. : Наук. думка, 1974. – 272 с.

2. *Антонова Т.М., Гладун В.Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 27–35.

3. *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К. : Наук. думка, 1986. – 176 с.

4. *Боднар Д.І., Воделанд Х., Кучмінська Х.Й., Сусь О.М.* Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 1994. – **37**. – С. 3–7.

5. *Боднар Д.І., Гладун В.Р.* Параболічні області обчислювальної стійкості гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісник НУ „Львівська політехніка“. Серія Прикладна математика. – 2000. – № 411. – С. 44–48.

6. *Боднар Д.І., Гладун В.Р.* Достатні умови стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 22–27.

7. *Боднар Д.І., Гладун В.Р.* Деякі області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 288. – С. 18–27.

8. *Боднар Д.І., Кучмінська Х. Й.* Аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 21–25.

9. *Гладун В.Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 16–26.

10. *Кучмінська Х.Й.* Стійкість при обчисленні двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2013. – **56**, № 4. – С. 15–23.

11. *Недашковский Н.А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1984. – **20**. – С. 27–31.

12. *Одноволова (Антонова) Т.Н.* Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 7. – С. 19–22.

13. *Скоробогатько В.Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М. : Наука, 1983. – 312 с.

14. *Сусь О.М.* Деякі питання аналітичної теорії двовимірних ланцюгових дробів: Дис.... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 123 с.

15. *Сусь О.М.* Про оцінку швидкості збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 11–123.

16. *Терских В.П.* Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем: 2 т. – Л. : Судпромгиз, 1955. – Т. 1. – 376 с.; Т. 2. – 332 с.

17. *Blanch G.* Numerical evaluation of Continued Fractions // SIAM Review. – 1964. – **6**, No 4. – P. 383–421.

18. *Jones W.B., Thron W.J.* Continued fractions: Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Matematics and Its Applications, vol. 11. – Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Company, 1980. – 428 p.

Tamara Antonova, Olga Sus'

ON ABSOLUTE STABILITY TO PERTURBATIONS FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS WITH COMPLEX ELEMENTS

The paper deals with two-dimensional continued fractions whose elements are belonging to angular set of right half-plane. Sufficient conditions of absolute stability to perturbations for these two-dimensional continued fractions are established. Estimates of absolutes errors for figured approximants are obtained.

УДК 517.956

Василь Городецький[1], Ольга Мартинюк[2], Тетяна Тодоріко[3]

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИНГУЛЯРНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Встановлено розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдобесселевими операторами нескінченного порядку з початковою умовою, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів у випадку, коли нелокальна багатоточкова умова містить псевдобесселеві оператори.

1. Вступ

Одним із можливих узагальнень задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = g$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = g,$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші), при цьому вказана умова трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо g — узагальнена функція. Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь із частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами для рівнянь із частинними похідними з нелокальними умовами (див., наприклад, [1, 2]).

Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (див., наприклад, [3–10]). Одержано важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, вивчено питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, v.gorodetskiy@chnu.edu.ua*

[2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, alfaolga1@gmail.com*

[3] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, tanya.s.tod@gmail.com*

операцій, встановлено умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + f(A)u(t) = 0$, де $f(A)$ – псевдодиференціальний оператор „нескінченного порядку“ вигляду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, де $A = F^{-1}_{B_\nu}[aF_{B_\nu}]$, $a = a(\sigma)$ — символ оператора A, F_{B_ν}, $F^{-1}_{B_\nu}$ – пряме та обернене перетворення Бесселя; $f(A)$ діє в локально опуклому просторі, який є проективною границею певних зліченно-нормованих просторів. При обмеженнях на функції f та a, які узагальнюють відому умову „параболічності“ для рівнянь параболічного типу, оператор $f(A)$ подається у вигляді $f(A) = F^{-1}_{B_\nu}[f(a)F_{B_\nu}]$, тобто $f(A)$ також є псевдодиференціальним (псевдобесселевим) оператором із символом $f(a)$. Нелокальна багатоточкова за часом умова для вказаного рівняння також містить псевдобесселеві оператори B_k, $k \in \{1, \dots, m\}$. Встановлено властивості фундаментального розв'язку такої задачі, доведено розв'язність задачі у випадку, коли g є елементом простору основних функцій або простору, топологічно спряженого з ним; знайдено аналітичне зображення розв'язку. Зазначимо, що в працях [11, 12] досліджена нелокальна багатоточкова за часом задача для зазначеного рівняння у випадку, коли відповідна умова не містить псевдобесселеві оператори (тобто, $B_k = I$, $k \in \{1, \dots, m\}$).

2. Простори основних та узагальнених функцій

Нехай γ — фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, ν — фіксоване число з множини $\{3/2, 5/2, 7/2, \dots\}$, $\tilde{p}_0 := 2\nu + 1$, $\tilde{\gamma}_0 := 1 + [\gamma] + \tilde{p}_0$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ |D^k_x \varphi(x)| \le c_k (1 + |x|)^{-(\tilde{\gamma}_0 + k)}, k \in \mathbb{Z}_+\},$$

$$\Phi = \lim_{p \to \infty} \mathrm{pr} \Phi_p,$$

де Φ_p, $p \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір відносно норми

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}} \Big\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\tilde{\gamma}_0 + k - \varepsilon_0} |D^k_x \varphi(x)| \Big\}, \quad \varphi \in \Phi_p, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $0 < \varepsilon < 1$ — фіксований параметр.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору Φ з відповідною топологією. Цей простір називатимемо основним, а його елементи — основними функціями. У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, яка відповідає оператору Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Ця операція є нескінченно диференційовною у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ [13]. Слідуючи [14], згортку двох функцій з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначене перетворення Бесселя

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) \equiv F_B[\varphi](\xi) := \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx, \ \ \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де j_ν — нормована функція Бесселя. При цьому $F_B[\varphi]$ — парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Інші властивості функцій з простору $\overset{\circ}{\Psi} = F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$ наведені в праці [13].

Перетворення Бесселя взаємно однозначно і неперервно відображає $\overset{\circ}{\Phi}$ на $\overset{\circ}{\Psi}$ [13], при цьому F_B^{-1} визначається формулою

$$F_B^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int_0^\infty \psi(\xi) j_\nu(x\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \quad \psi \in \overset{\circ}{\Psi}, c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}.$$

Символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $\overset{\circ}{\Phi}$, зі слабкою збіжністю. Елементи з $(\overset{\circ}{\Phi})'$ називатимемо узагальненими функціями. У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, тому згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, \ T_x^\xi \varphi(x)\rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi)\rangle, \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, оскільки операція узагальненого зсуву аргумента нескінченно диференційовна в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ [13] (тут $\langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x)\rangle$ позначає дію функціонала f на $T_x^\xi \varphi(x)$ як функцію аргумента ξ).

Оскільки $F_B^{-1}[\varphi] \in \overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{\Psi}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо так:

$$\langle F_B[f], \varphi \rangle = \langle f, F_B^{-1}[\varphi] \rangle, \ \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{\Psi}\,.$$

Із властивостей лінійності й неперервності функціонала f та перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціонала $F_B[f]$, визначеного на просторі основних функцій $F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$.

Якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$, $f * \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, $\forall \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$, та із співвідношення $\varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає співвідношення $f * \varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Надалі клас усіх згортувачів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. У [15] доведено, що якщо $f \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ правильною є формула $F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi]$, при цьому $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Нехай $a\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку γ, тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$, яка: 1) нескінченно диференційовна при $x \neq 0$; 2) її похідні задовольняють умову

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists c_k > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \ \ |D_x^k a(x)| \le c_k |x|^{\gamma - k};$$

3) існують сталі c_0', $\tilde{c}_0 > 0$, $\tilde{\delta} \ge \gamma$ такі, що

$$c_0'|x|^\gamma \le a(x) \le \tilde{c}_0(1 + |x|^\delta), \quad \tilde{c}_0 \ge c_0', x \in \mathbb{R}$$

(прикладом такої функції є функція $a(x) = |x|^\gamma$).

Виділимо клас нескінченно диференційовних функцій $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, за допомогою яких можна будувати псевдобесселеві оператори нескінченного порядку вигляду $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, де $A = F_B^{-1}[aF_B]$ — псевдобесселевий оператор, побудований за функцією-символом a. При цьому вважатимемо, що оператор $f(A)$ визначений коректно в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо для кожної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{\Phi}$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (A^k \varphi)(x)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Слідуючи [16], припустимо, що функція f допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умови:

а) $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists p_k > 0 \ \exists b_k > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$: $|D_x^k f(x)| \leq b_k(1+|x|)^{p_k}$;

б) $\tilde{p}_0' < \dfrac{[\gamma]+\nu+3/2-\Delta_0}{\tilde{\delta}([\gamma]+\nu+3/2)}$, де $\Delta_0 \in (0,1)$ — фіксований параметр, $\tilde{p}_0' = \max\{p_0, p_1, \ldots, p_{\tilde{s}}\}$, $p_0, p_1, \ldots, p_{\tilde{s}}$ — сталі з умови а), $\tilde{s} = \nu+3/2+[\gamma] \in \mathbb{N}$, $\tilde{\delta}$ — стала з умови 3);

в) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall z = x+iy \in \mathbb{C}$: $|f(z)| \leq c_\varepsilon(1+|x|)^{p_0} \exp\{\varepsilon |y|^{1/[\tilde{\delta}]}\}$ (p_0 — стала з умови а), $[\tilde{\delta}]$ — ціла частина числа $\tilde{\delta}$);

г) $\exists \beta_0 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq \beta_0 |x|$.

У праці [16] встановлено, що при виконанні вказаних умов оператор $f(A)$ визначений коректно, є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, при цьому $f(A) = F_B^{-1}[f(a)F_B]$.

Абстрактні функції. Нехай X – лінійний топологічний простір, P – деяка множина чисел. Відображення $P \ni \mu \to \varphi_\mu \in X$ називають абстрактною функцією параметра μ в просторі X; (про абстрактні функції див. [17]). Зокрема, абстрактна функція називається диференційовною у точці $\mu_0 \in P$, якщо в просторі X існує границя

$$\left.\frac{d\varphi_\mu}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{\mu_0+h} - \varphi_{\mu_0}}{h}.$$

3. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Для еволюційного рівняння

$$\frac{du}{dt} + f(A)u = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega, \tag{1}$$

де $f(A)$ — оператор, побудований у п. 1, розглянемо нелокальну багатоточкову за часом задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = \varphi, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi}, \tag{2}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані параметри, $t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq T$, $B_1, \ldots, B_m$ — псевдобесселеві оператори, побудовані за функціями $b_1, \ldots, b_m$ відповідно, які задовольняють умови, аналогічні умовам 1)-3) з п. 1, а саме, b_k: $\mathbb{R} \to [0,\infty)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, — неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, нескінченно диференційовні при $x \neq 0$, однорідні порядку $\beta_k > 1$ відповідно, $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_m < \gamma$ ($\gamma > 1$ – порядок однорідності функції a) такі, що:

1′) $\forall k \in \{1, \ldots, m\} \ \forall s \in \mathbb{N} \ \exists d_{ks} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $|D_x^s b_k(x)| \leq d_{ks}|x|^{\beta_k - s}$;

2′) $\forall k \in \{1, \ldots, m\} \ \exists \alpha_k, \tilde{\alpha}_k > 0 \ \tilde{\alpha}_k \geq \alpha_k$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$: $\alpha_k |x|^{\beta_k} \leq b_k(x) \leq \tilde{\alpha}_k |x|^{\beta_k}$.

Із наведених обмежень випливає, що функції $b_1, \ldots, b_m$ є мультиплікаторами в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, а $B_1, \ldots, B_m$ — лінійні неперервні оператори в цьому просторі. Вважаємо також, що

$$\mu > \Lambda \sum_{k=1}^{m} \mu_k, \quad \Lambda = \max\{1, L_1, \ldots, L_m, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m\},$$

$$L_k = \frac{\tilde{\lambda}_k}{\beta_0 c_0' t_k}, \quad k \in \{1, \ldots, m\},$$

де c_0' — стала з умови 3), а β_0 — стала з умови 2) з п. 1.

Класичний розв'язок $u \in C^1((0, T], \overset{\circ}{\Phi})$ задачі (1), (2) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя. У образах цього перетворення вказана задача набуває вигляду

$$\frac{dv(t, \sigma)}{dt} + f(a(\sigma))v(t, \sigma) = 0, \tag{3}$$

$$\mu v(t, \sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) v(t, \sigma)|_{t=t_k} = \tilde{\varphi}(\sigma), \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $v(t, \sigma) = F_B[u(t, x)](\sigma)$, $\tilde{\varphi}(\sigma) = F_B[\varphi](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд $v(t, \sigma) = c\exp\{-tf(a(\sigma))\}$, де c знаходимо з умови (4):

$$c = \tilde{\varphi}(\sigma)\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\Big)^{-1}, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$v(t, \sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma) \exp\{-tf(a(\sigma))\}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\Big)^{-1}.$$

Тоді розв'язок задачі (3), (4) має вигляд:

$$u(t, x) = c_\nu \int_0^\infty v(t, \sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \quad (t, x) \in \Omega.$$

Якщо ввести позначення $G(t, x) := F_B^{-1}[Q(t, \sigma)](x)$, де

$$Q(t, \sigma) = \exp\{-tf(a(\sigma))\}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\Big)^{-1},$$

то для розв'язку задачі (1), (2) дістаємо зображення:

$$u(t, x) = \int_0^\infty T_x^\xi G(t, x) \varphi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi = G(t, x) * \varphi(x), \ (t, x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma)\Big(\int\limits_0^\infty \varphi(\xi) j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\Big) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Оскільки $j_\nu(\sigma\xi)j_\nu(\sigma x) = T_x^\xi j_\nu(\sigma x)$ [14], то

$$u(t,x) = \int\limits_0^\infty \Big(c_\nu \int\limits_0^\infty Q(t,\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma\Big)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = G(t,x) * \varphi(x),$$

що й потрібно було довести.

Зауважимо, що із обмежень на функції a, f, b_1, $\ldots$, b_m випливають нерівності: якщо $\sigma \geq 1$, то

$$b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\} \leq \frac{b_k(\sigma)}{\beta_0 t_k a(\sigma)} \leq \frac{\alpha_k|\sigma|^\gamma}{\beta_0 t_k c_0'|\sigma|^\gamma} =$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}_k}{\beta_0 t_k c_0'} \equiv L_k \leq \Lambda, \quad k \in \{1,\ldots,m\};$$

якщо $0 < \sigma < 1$, то

$$b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\} \leq b_k(\sigma) \leq \tilde{\alpha}_k|\sigma|^{\beta_k} \leq \tilde{\alpha}_k \leq \Lambda.$$

Отже,

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\} > \mu - \Lambda\sum_{k=1}^m \mu_k > 0, \quad \sigma \in (0,\infty).$$

У точці $\sigma = 0$ маємо

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k b_k(0) e^{-t_k f(a(0))} = \mu > 0.$$

Тоді

$$\Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\Big)^{-1} > 0, \quad \sigma \in [0,+\infty),$$

при цьому

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))} = \mu\Big(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))}\Big),$$

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k b_k(\sigma)e^{-t_k f(a(\sigma))} \le \frac{\Lambda}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k < 1, \quad \sigma \ge 0.$$

Скориставшись останньою нерівністю та поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k b_k(\sigma)e^{-t_k f(a(\sigma))}\Big)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-r}\Big(\sum_{k=1}^{m}\mu_k b_k(\sigma)e^{-t_k f(a(\sigma))}\Big)^{r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}(\mu_1 b_1(\sigma)e^{-t_1 f(a(\sigma))})^{r_1}\times$$

$$\times(\mu_m b_m(\sigma)e^{-t_m f(a(\sigma))})^{r_m} = \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\times$$

$$\times\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!}b_1^{r_1}(\sigma)\dots b_m^{r_m}(\sigma)e^{-(t_1r_1+\dots+t_mr_m)f(a(\sigma))}.$$

Звідси дістаємо зображення для функції G:

$$G(t,x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!}\tilde{G}(\lambda+t,x), \tag{5}$$

де

$$\tilde{G}(\lambda+t,x) = c_\nu\int_0^{\infty} b_1^{r_1}(\sigma)\dots b_m^{r_m}(\sigma)e^{-(\lambda+t)f(a(\sigma))}j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma, \tag{6}$$

$\lambda := t_1r_1+\dots+t_mr_m$, $\tilde{G}(t,x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1), для якого правильними є такі оцінки, отримані в [18]:

$$|D_x^s\tilde{G}(t,x)| \le \alpha_s t^{-\omega_s/\gamma}(1+|x|)^{-(s+\gamma_0)}, \quad s\in\mathbb{N},$$

де $\omega_s = (\tilde{\delta}\tilde{p}_s+\gamma)m_s$, $m_s = \nu+3/2+[\gamma]+s$, $\tilde{\delta}\ge\gamma$ — стала з умови 3), $\tilde{p}_s = \max\{p_1,\dots,p_{m_s}\}$, p_1, $\dots$, p_{m_s} — сталі з умови а), $\alpha_s > 0$ не залежить від t. Скориставшись властивостями функцій f, a, b_1, $\dots$, b_m, встановлюємо, що $G(t,x)$ є неперервно диференційовною на проміжку $(0,T]$ функцією (при фіксованому $x\in\mathbb{R}$) і нескінченно диференційовною функцією аргументу x (при фіксованому $t\in(0,T]$). Оцінки функції G та її похідних за аргументом x (з виділеною при цьому залежністю від параметра t) даються в наступному твердженні.

Лема 1. *Для функції $G(t,x)$ та її похідних (за змінною x) правильними є оцінки*

$$|D_x^sG(t,x)| \le c_s t^{-(s+q)/\gamma}(1+|x|)^{-(\gamma_0+s)}, \quad t\in(0,T^*], T^* = \min\{1,T\}, \tag{7}$$

$x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma_0 = 2\nu+2+[\gamma]$, $q = \omega_\alpha+(\gamma+\omega_\alpha)\alpha-[\gamma]$, $\alpha = \nu+3/2+[\gamma]$,

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \tilde{\delta}\tilde{b}_\alpha \cdot \alpha + \alpha\gamma, & \textit{якщо } |\sigma| \geq 1, \\ \gamma, & \textit{якщо } |\sigma| < 1, \sigma \neq 0, \end{cases}$$

$\tilde{b}_\alpha = \max\{p_1, \dots, p_\alpha\}$, *де* $p_1, \dots, p_\alpha$ *– сталі з умови а),* $\tilde{\delta} \geq \gamma$ *– стала з умови 3), стала* $c_s > 0$ *не залежить від* t.

Доведення. Передусім розглянемо випадок $s = 0$ і використаємо методику оцінювання фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1) [19]. Отже, врахувавши вигляд нормованої функції Бесселя j_ν, подамо $G(t,x)$, $x \neq 0$, у вигляді [19]:

$$G(t,x) = \Lambda_1(t,x) + \Lambda_2(t,x),$$

$$\Lambda_1(t,x) = c_n \sum_{j=0}^{n} \frac{d_j}{x^{n+j+1}} J_{1,j}(t,x), \quad n = \nu - 1/2,$$

$$J_{1,j}(t,x) = \int_0^\infty Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1} \sin\Big(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\Big) d\sigma,$$

$$\Lambda_2(t,x) = c_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{d}_j}{x^{n+j+1}} J_{2,j}(t,x),$$

$$J_{2,j}(t,x) = \int_0^\infty Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1} \cos\Big(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\Big) d\sigma,$$

$$Q_1(t,\sigma) = e^{-tf(a(\sigma))}, Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))}\Big)^{-1}.$$

Оцінимо, наприклад, $J_{1,j}(t,x)$. Інтеграл $J_{1,j}(t,x)$, $x \neq 0$, зінтегруємо частинами m_j разів, де $m_j = n - j + 2 + [\gamma]$, $0 \leq j \leq n$, і подамо цей інтеграл у вигляді

$$J_{1,j}(t,x) = \frac{(-1)^{m_j}}{x^{m_j}} \lim_{\varepsilon \to +0} \Big[\int_\varepsilon^{+\infty} D_\sigma^{m_j}(Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1}) \times$$

$$\times \sin\Big(x\sigma - \frac{n\pi}{2} + m_j\frac{\pi}{2}\Big) d\sigma + \Phi(\varepsilon,x)\Big], \quad x \neq 0. \tag{8}$$

Врахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$D_\sigma^{m_j}(Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1}) = \sum_{l=0}^{m_j} C_{m_j}^l D_\sigma^l (Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1}) D_\sigma^{m_j-l} Q_2(\sigma) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-j+1} C_{m_j}^l D_\sigma^l (Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1}) D_\sigma^{m_j-l} Q_2(\sigma).$$

Оцінимо $|D_\sigma^{m_j-l}Q_2(\sigma)|$. Для цього зауважимо, що

$$D_\sigma^1 Q_2(\sigma) = Q_2^2(\sigma)\sum_{k=1}^m \mu_k(b_k'(\sigma) - t_k b_k(\sigma) f'(a(\sigma)))e^{-t_k f(a(\sigma))} =$$

$$= -Q_2^2(\sigma) D_\sigma^1 R(\sigma),$$

де

$$R(\sigma) = \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))}.$$

Отже, для $l \in \mathbb{Z}_+$

$$D_\sigma^l D_\sigma^1 Q_2(\sigma) = -D_\sigma^l (Q_2^2(\sigma) D_\sigma^1 R(\sigma)) = -\sum_{s=0}^l C_s^l D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)\cdot D_\sigma^{l+1-s} R(\sigma).$$

Оскільки $Q_2^2(\sigma) = R^{-2}(\sigma)$, то для оцінки похідної $D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)$ скористаємося формулою Фаа ді Бруно диференціювання складної функції [12]; тоді

$$|D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)| = \Big| \sum_{j=1}^s \frac{d^j}{dR^j} R^{-2} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_\nu = j \\ j_1+2j_2+\dots+\nu j_\nu = s}} \frac{s!}{j_1!\dots j_\nu!} \times$$

$$\times (D_\sigma^1 R(\sigma))^{j_1} \Big(\frac{1}{2!} D_\sigma^2 R(\sigma)\Big)^{j_2} \dots \Big(\frac{1}{\nu!} D_\sigma^\nu R(\sigma)\Big)^{j_\nu}\Big|.$$

Далі, скориставшись умовою 1′), яку задовольняють функції $b_1, \dots, b_m$, нерівністю

$$\frac{1}{|R^{2+j}(\sigma)|} \le \Big(\mu - \Lambda \sum_{k=1}^m \mu_k\Big)^{-(2+j)} \equiv \tilde{\beta}_j$$

та нерівностями

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le c_s t^s e^{-\beta_0 t|\sigma|^\gamma} |\sigma|^{\omega_s - s}, \quad s \in \mathbb{N}, (t,\sigma) \in \Omega, \tag{9}$$

де $\beta_0 > 0$, $c_s > 0$ — сталі, не залежні від t (див. [18]), безпосередньо встановлюємо, що

$$|D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)| \le \delta_s |\sigma|^{\gamma - s}, \quad |\sigma| < 1, \quad \sigma \ne 0,$$

$$|D_\sigma^s Q_2^2(\sigma)| \le \tilde{\delta}_s |\sigma|^{(\gamma+\omega_s-1)s}, \quad |\sigma| \ge 1.$$

Урахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, дістанемо, що

$$|D_\sigma^l (Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1})| \le |D_\sigma^l Q_1(t,\sigma)|\sigma^{n-j+1} + \dots +$$

$$+(n-j+1-l)|Q_1(t,\sigma)|\sigma^{n-j+1}, \quad \sigma>0, 1\le l\le n-j+1. \tag{10}$$

При оцінці доданків у сумі (10) скористаємося нерівностями (9); у результаті дістанемо, що

$$|D_\sigma^l(Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1})|\le \tilde{c}_l\sigma^{n-j+1+\gamma-l}+\tilde{c}\sigma^{n-j+1-l}.$$

Якщо $|\sigma|<1$, то

$$\chi(\sigma):=|D_\sigma^{m_j}(Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1})|\le|Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1}|\cdot|D_\sigma^{m_j}Q_2(\sigma)|+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-j+1}C_m^l|D_\sigma^l(Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1})|\cdot|D_\sigma^{m_j-l}Q_2(\sigma)|\le c(\sigma^\alpha+\sigma^{\tilde{\alpha}}+\sigma^{\tilde{\tilde{\alpha}}}),$$

де $\alpha=n-j+1+\gamma-m_j=-1+\gamma-[\gamma]=\{\gamma\}-1$, $\tilde{\alpha}=n-j+1+\gamma-l+\gamma-m_j+l=\gamma+\{\gamma\}-1\ge 0$, $\tilde{\tilde{\alpha}}=n-j+1-l+\gamma-m_j+l=\{\gamma\}-1$, $m_j=n-j+2+[\gamma]$. Оскільки $0<1-\{\gamma\}<1$, то функція $\sigma^\alpha+\sigma^{\tilde{\alpha}}+\sigma^{\tilde{\tilde{\alpha}}}$ інтегровна в околі нуля. Отже, інтегровною в околі нуля є функція $\chi(\sigma)$. Із наведених вище міркувань випливає також, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Phi(\varepsilon,x)=0$ для кожного $x\ne 0$, де $\Phi(\varepsilon,x)$ — функція з формули (8).

Випадок $\sigma\ge 1$ розглядається аналогічно, при цьому у відповідних оцінках функції $Q_1(t,\sigma)$ слід зберегти множник $\exp\{-\beta_0 t|\sigma|^\gamma\}$ (див. (9)), який забезпечує інтегровність функції $\chi(\sigma)$ на нескінченності. З (10), з урахуванням (9), випливає нерівність

$$|D_\sigma^l(Q_1(t,\sigma)\sigma^{n-j+1})|\le c\sigma^{n-j+1-l+\omega_l}e^{-\beta_0 t|\sigma|^\gamma},$$

з якої випливає оцінка функції $\chi(\sigma)$:

$$\chi(\sigma)\le c\sigma^{n-j+1+\omega_{m_j}+(\gamma+\omega_{m_j})m_j-m_j}e^{-\beta_0 t|\sigma|^\gamma}\le$$

$$\le c\sigma^{\omega_\alpha+(\gamma+\omega_\alpha)\alpha-[\gamma]-1}e^{-\beta_0 t\sigma^\gamma}, \quad \alpha=\nu+\frac{3}{2}+[\gamma],\sigma\ge 1.$$

Зазначимо також, що на нескінченності позаінтегральні вирази у формулі (8) перетворюються в нуль, бо вони містять множником функцію $\exp\{-\beta_0 t\sigma^\gamma\}$. При цьому

$$\int_1^{+\infty}\chi(\sigma)d\sigma\le\int_0^\infty\sigma^{p_\alpha}e^{-\beta_0 t\sigma^\gamma}d\sigma \overset{t^{1/\gamma}\sigma=z}{=} ct^{-(p_\alpha+1)/\gamma}\int_0^\infty z^{p_\alpha}e^{-\beta_0 z^\gamma}dz=$$

$$=c_1t^{-(p_\alpha+1)/\gamma}, \quad p_\alpha=\omega_\alpha+(\gamma+\omega_\alpha)\alpha-[\gamma]-1.$$

Оскільки $t\in(0,T^*]$, то з отриманих результатів випливає оцінка

$$|J_{1,j}(t,x)|\le\frac{\tilde{L}_j t^{-(p_\alpha+1)/\gamma}}{|x|^{n-j+2+[\gamma]}}, \quad x\ne 0.$$

Тоді

$$|\Lambda_1(t,x)| \leq c_n t^{-(p_\alpha+1)/\gamma} \sum_{j=0}^{n} d_j \tilde{L}_j |x|^{-(n+j+1)} |x|^{-(n-j+2+[\gamma])} =$$

$$= \tilde{c}_n t^{-(p_\alpha+1)/\gamma} |x|^{-(2\nu+2+[\gamma])}, \quad x \neq 0.$$

Аналогічно оцінюємо $|\Lambda_2(t,x)|$, $x \neq 0$. У результаті прийдемо до нерівності

$$|G(t,x)| \leq ct^{-(p_\alpha+1)/\gamma} |x|^{-\gamma_0}, \quad x \neq 0, \quad \gamma_0 = 2\nu + 2 + [\gamma].$$

З іншого боку,

$$|G(t,x)| \leq \tilde{c} \int_0^\infty e^{-tf(a(\sigma))} \sigma^{2\nu+1} d\sigma \overset{\sigma=t^{-1/\gamma}y}{=} \tilde{c} t^{-(2\nu+2)/\gamma} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-tf(t^{-1}a(y))} y^{2\nu+1} dy \leq \tilde{c} t^{-(2\nu+2)/\gamma} \int_0^\infty e^{-\beta_0 a(y)} y^{2\nu+1} dy = \tilde{\tilde{c}} t^{-(2\nu+2)/\gamma}.$$

Оскільки $p_\alpha + 1 \geq 2\nu + 2$, то звідси дістаємо, що у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справджується нерівність

$$|G(t,x)| \leq ct^{-q/\gamma}(1+|x|)^{-\gamma_0}, \quad t \in (0, T^*],$$

що й потрібно було довести.

У випадку $s \in \mathbb{N}$ маємо, що

$$D_x^s G(t,x) = D_x^s \Psi_1(t,x) + D_x^s \Psi_2(t,x),$$

де

$$D_x^s \Psi_1(t,x) = c_n \sum_{j=0}^{n} d_j \int_0^\infty \tilde{Q}_j(t,\sigma) D_x^s(x^{-(n+j+1)}) \sin\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) d\sigma,$$

$$D_x^s \Psi_2(t,x) = c_n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{d}_j \int_0^\infty \tilde{Q}_j(t,\sigma) D_x^s(x^{-(n+j+1)}) \cos\left(x\sigma - \frac{n\pi}{2}\right) d\sigma,$$

$$\tilde{Q}_j(t,\sigma) := Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-j+1}.$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$D_x^s \Psi_1(t,x) = c_n \sum_{j=0}^{n} d_j \sum_{l=0}^{s} C_s^l \alpha_l x^{-(n+j+1)} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1+s-l}\sin\Big(x\sigma-\frac{n\pi}{2}+(s-l)\frac{\pi}{2}\Big)d\sigma \equiv$$

$$\equiv c_n \sum_{j=0}^{n} d_j \sum_{l=0}^{s} C_s^l \alpha_l x^{-(n+j+1+l)}\Gamma_1(t,x),$$

де $\alpha_l = (-1)^l(n+j+1)\dots(n+j+1+l)$,

$$\Gamma_1(t,x) = \int\limits_0^\infty Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-j+1+s-l}\sin\Big(x\sigma-\frac{n\pi}{2}+(s-l)\frac{\pi}{2}\Big)d\sigma.$$

Оцінка функції Γ_1 здійснюється за схемою, наведеною вище. У результаті для $|D_x^s\Psi_1(t,x)|$ отримаємо оцінку вигляду (7). Такі ж оцінки отримуються для функції $|D_x^s\Psi_2(t,x)|$, а отже, і для функції $|D_x^s G(t,x)|$. Лему доведено. ■

Зауваження 1. Із оцінок (7) похідних функції G випливає, що при кожному $t \in (0,T]$ функція G, як функція аргументу x, є елементом простору $\overset{\circ}{\Phi}$.

Лема 2. *Правильними є твердження.*

1. Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, диференційовна за t.

2. $\dfrac{\partial}{\partial t}(g * G(t,\cdot)) = g * \dfrac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}$, $\forall g \in (\overset{\circ}{\Phi})'$.

3. У просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ справджуються граничні співвідношення:

а) $\mu \lim\limits_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \lim\limits_{t\to t_k} B_k G(t,\cdot) = \delta$;

б) $\mu \lim\limits_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \lim\limits_{t\to t_k} B_k \omega(t,\cdot) = g$,

де $\omega(t,x) = g * G(t,x)$, $g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, $(t,x) \in \Omega$.

4. Функція $G(t,\cdot)$ задовольняє рівняння (1).

Твердження леми 2 доводиться за схемою доведення аналогічних тверджень із праці [12] (випадок $B_k = I$, $k \in \{1,\dots,m\}$), тому доведемо тут, наприклад, твердження 3 а).

Скориставшись властивістю неперервності перетворення Бесселя та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, співвідношення 3 а) замінимо граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to+0} F_B[G(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F_B[B_k G(t,\cdot)] = F_B[\delta] \qquad (11)$$

у просторі $(\overset{\circ}{\Psi})'$. Урахувавши зображення функції G та операторів B_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, рівність (11) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t \to +0} Q(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} b_k(\sigma) Q(t, \cdot) = 1. \tag{12}$$

Для доведення (12) візьмемо довільну функцію $\psi \in (\overset{\circ}{\Psi})'$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle Q(t, \cdot), \psi \rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle b_k(\cdot) Q(t, \cdot), \psi \rangle =$$

$$= \mu \lim_{t \to +0} \int_0^{\infty} Q(t, \sigma) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \int_0^{\infty} Q(t, \sigma) b_k(\sigma) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big[\mu Q(0, \sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) Q(t_k, \sigma) \Big] \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{b_k(\sigma) \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) \exp\{-t_k f(a(\sigma))\}} \Big] \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^{\infty} \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = \langle 1, \psi \rangle$$

(тут $Q(t, \cdot)$ розуміємо як регулярну узагальнену функцію з простору $(\overset{\circ}{\Psi})'$ при кожному $t > 0$). Звідси вже випливає, що співвідношення (12) виконується в просторі $(\overset{\circ}{\Psi})'$, а отже, правильним є співвідношення (11).

Із твердження 3 б) леми 2 випливає, що для рівняння (1) нелокальну m-точкову за часом задачу можна ставити так. Знайти функцію $u(t, \cdot) \in C^1((0, T], \overset{\circ}{\Phi})$, яка є розв'язком рівняння (1) і задовольняє умову

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = g, \quad g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)', \tag{13}$$

у тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} B_k u(t,\cdot) = g, \quad g \in (\overset{\circ}{\Phi}_*)',$$

де границі розглядаються в просторі $(\overset{\circ}{\Phi})'$ (параметри μ, μ_1, …, μ_m, t_1, …, t_m задовольняють умови, сформульовані вище). Правильним є таке твердження.

Теорема 1. *Задача* (1), (13) *є розв'язною, розв'язок зображується у вигляді* $u(t,x) = g*G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *при цьому* $u(t,\cdot) \in \overset{\circ}{\Phi}$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Твердження теореми є наслідком тверджень леми 2.

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М. : Высшая школа, 1995. – 301 с.
2. *Белавин И.А., Капица С.П., Курдюмов С.П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998. – **38**, № 6. – С. 885–902.
3. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М. : Наука, 1980. – 208 с.
4. *Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 11. – С. 117–131.
5. *Романко В.К.* Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Матем. заметки. – 1985. – **37**, № 7. – С. 727–733.
6. *Макаров А.А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 144–150.
7. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для некоторых абстрактных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 11. – С. 2104–2106.
8. *Илькив В.С., Пташник Б.И.* Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. – 2005. – **46**, № 11. – С. 119–129.
9. *Пташник Б.Й., Ільків В.С. , Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.
10. *Chabrouski J.* On the non-local problems with a functional for parabolic equation // Funckcialaj Ekvacioj. – 1984. – Vol. 27. – P. 101–123.

11. *Городецький В.В., Тодоріко Т.С.* Дослідження властивостей розв'язків нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу сингулярних еволюційних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія: математика. – 2011. – **1**, № 4. – С. 29–35.

12. *Кулик Т.С., Мироник В.І.* Багатоточкова задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія: математика. – 2011. – **1**, № 3. – С. 49–57.

13. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченно диференційовних функцій // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. – 2007. – Вип. 15. – С. 51–66.

14. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – **36**, № 2. – С. 299–310.

15. *Ленюк О.М.* Перетворення Бесселя одного класу узагальнених функцій типу розподілів // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту імені Юрія Федьковича. Серія: математика. – 2007. – Вип. 336–337. – С. 95–102.

16. *Городецкий В.В., Мироник В.И.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. I // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 3. – С. 349–363.

17. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М. : Физматгиз, 1958. – 307 с.

18. *Городецкий В.В., Мироник В.И.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. II // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 4. – С. 520–526.

19. *Шевчук Н.М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами нескінченного порядку // Наук. вісник Чернівецького університету. – 2008. – Вип. 374. – С. 145–154.

Gorodetskiy Vasyl, Martynyuk Olga, Todoriko Tetyana

ON A GENERALIZATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR EVOLUTIONARY SINGULAR PARABOLIC TYPE EQUATIONS OF INFINITY ORDER

We establish the solvability of a nonlocal multipoint for a time problem for evolution equations with pseudobessel operators of infinite order with initial condition which is an element of the space of generalized functions of distribution type in the case when the nonlocal multipoint condition contains pseudobessel operators.

УДК 517.956.4

Віталій Дронь[1], **Степан Івасишен** [2]

ГЛАДКІСТЬ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Розглядається задача Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основними змінними із залежними лише від часової змінної t коефіцієнтами. У просторах Гельдера зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій вивчаються показники гладкості відповідного такій задачі об'ємного потенціалу в залежності від гладкості його густини.

1. Вступ

Розглядатимемо одновимірну часову змінну t і n-вимірну просторову змінну x, яка складається з груп змінних $x_j := (x_{j1}, ..., x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$, $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Нехай b_1, ..., b_{n_1} – деякі числа з $\mathbb{N}$. Позначимо через $\overrightarrow{2b}$ вектор $(2b_1, ..., 2b_{n_1})$, через b – найменше спільне кратне чисел b_1, ..., b_{n_1}, через m_j – число b/b_j, $j \in \{1, ..., n_1\}$. Об'єктом дослідження в цій статті є задача Коші вигляду

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{\|k_1\| \leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}\Big)u(t, x) = f(t, x),$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де покладено $\|k_1\| := \sum\limits_{j=1}^{n_1} m_j k_{1j}$ для мультиіндекса $k_1 := (k_{11}, ..., k_{1n_1}) \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, T – додатне число. Припускається, що коефіцієнти a_{k_1}, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $\|k_1\| \leq 2b$, є неперервними комплекснозначними функціями на $[0, T]$ і такими, що диференціальний вираз $\partial_t - \sum\limits_{\|k_1\| \leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}$ рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічний на $[0, T] \times \mathbb{R}^{n_1}$, тобто існує стала $\delta > 0$ така, що для всіх

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів, vdron@ukr.net*

[2] *Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", ivasyshen.sd@gmail.com*

$t \in [0, T]$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ виконується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{\|k_1\|=2b} a_{k_1}(t)(i\sigma_1)^{k_1} \leq -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b_j}.$$

Тут i – уявна одиниця.

Якщо $n_3 \geq 1$, то рівняння (1) вироджується за двома групами змінних x_2 і x_3. Коли $n_3 = 0$, а $n_2 \geq 1$, то у рівнянні (1) відсутня друга сума і є виродження за однією групою змінних x_2. У випадку $n_2 = n_3 = 0$ рівняння (1) не має перших двох сум і воно невироджене.

Рівняння (1) з $n_2 > 0$ є виродженим рівнянням типу Колмогорова з $2\vec{b}$-параболічною частиною за основними змінними. Для нього існує фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) G, детальні властивості якого наведено в [1]. Функція G породжує об'ємний потенціал з густиною f вигляду

$$u(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{3}$$

Для випадку, коли рівняння (1) 2-го порядку, тобто $b_j = 1$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, в [1] досліджувались властивості функції (3) в припущенні локальної гельдеровості й експоненціального зростання при $|x| \to \infty$ функції f. Зв'язок гельдерівських властивостей і поведінки при $|x| \to \infty$ густини f і функції u та її похідних з'ясовувався в [2] для рівняння (1) 2-го порядку, в [12] – довільного порядку при $b_j = b$, $j \in \{1, ..., n_1\}$. У [4] наведено аналогічні властивості (3) для рівняння (1). Тут ми уточнимо гельдерівські показники, при яких зберігається відповідна гладкість об'ємного потенціалу (3).

2. Означення норм і просторів

Користуватимемось такими позначеннями: $M := \{1, 2, 3\}$; $N_s := \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_l} (2b(l-1) + m_j)/(2b)$, $s \in M$, $N := N_3$; $\mathbb{Z}_+^l$ – множина всіх l-вимірних мультиіндексів; $k_l := (k_{l1}, ..., k_{ln_l})$ – елемент множини $\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; $k := (k_1, k_2, k_3)$ – елемент множини $\mathbb{Z}_+^n$; $|k_l| := k_{l1} + ... + k_{ln_l}$, якщо $k_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; $N_{k_l} := \sum_{j=1}^{n_l} (2b(l-1) + m_j) k_{lj}/(2b)$, $k_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, ..., n_1\}$; q', q'' – найбільше і найменше з чисел $q_j, j \in \{1, ..., n_1\}$; m', m'' – найбільше і найменше з чисел $m_j, j \in \{1, ..., n_1\}$; $\overline{x}_{1j}(t) := x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_1\}$; $\overline{x}_{2j}(t) := x_{2j} + t x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$; $\overline{x}_{3j}(t) := x_{3j} + t x_{2j} + (t^2/2) x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_3\}$; $\overline{x}_l(t) := (\overline{x}_{l1}(t), ..., \overline{x}_{ln_l}(t))$, $l \in M$;

$$X_1(t) := (\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t)); \quad X_2(t) := (\xi_1, \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t));$$

$$X_{2j}(t):=(\xi_{11},...,\xi_{1n_1},\xi_{21},...,\xi_{2,(j-1)},\overline{x}_{2j}(t),\xi_{2,(j+1)},...,\xi_{2n_2},$$
$$\xi_{31},...,\xi_{3,(j-1)},\overline{x}_{3j}(t),\xi_{3,(j+1)},...,\xi_{3n_3});$$
$$X_3(t):=(\xi_1,\xi_2,\overline{x}_3(t));$$
$$X_{3j}(t):=(\xi_{11},...,\xi_{1n_1},\ \xi_{21},\ ...,\ \xi_{2n_2},\ \xi_{31},\ ...,\ \xi_{3,(j-1)},$$
$$\overline{x}_{3j}(t),\ \xi_{3,(j+1)},\ ...,\ \xi_{3n_3});$$
$$\rho(t,x,\xi):=\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}t^{1-lq_j}|\overline{x}_{lj}(t)-\xi_{lj}|^{q_j};$$

$E_c(t,x;\tau,\xi):=\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}$, якщо c – додатна стала; $[a,x]:=\sum\limits_{l=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_j}a_{lj}|x_{lj}|^{q_j}$, якщо $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^n$; $|x_l|:=\Big(\sum\limits_{j=1}^{n_l}x_{lj}^2\Big)^{1/2}$, $x_l\in\mathbb{R}^{n_l}$, $l\in M$; ∂_t, ∂_y – операції диференціювання першого порядку відповідно за змінними t, y; ∂_y^s – операція диференціювання порядку $s\geq 0$ за змінною y; $\partial_{x_l}^{k_l}:=\partial_{x_{l1}}^{k_{l1}}...\partial_{x_{ln_l}}^{k_{ln_l}}$, якщо $x_l\in\mathbb{R}^{n_l}$, $k_l\in\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l\in M$; $\Delta_x^{x'}f(\cdot,x,\cdot):=f(\cdot,x,\cdot)-f(\cdot,x',\cdot)$;

$$d(x,\xi,\alpha):=\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}|x_{lj}-\xi_{lj}|^{\alpha_{lj}/(2b(l-1)+m_j)},$$

якщо $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^n$, $\alpha_{1j}\in[0,m'']$, $j\in\{1,...,n_1\}$, $\alpha_{2j}\in[0,2b+m_j]$, $j\in\{1,...,n_2\}$, $\alpha_{3j}\in[0,4b+m_j]$, $j\in\{1,...,n_3\}$; $d(x,\xi;\gamma):=\sum\limits_{l=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_l}|x_{lj}-\xi_{lj}|^{\gamma/(2b(l-1)+m_j)}$, якщо $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\gamma>0$; $d(x,\xi):=d(x,\xi;1)$; $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^n|d(x,0)\leq R\}$.

Зауважимо, що існують додатні числа c', c'' такі, що для довільних $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ і $\gamma>0$:
$$c'(d(x,\xi))^\gamma\leq d(x,\xi;\gamma)\leq c''(d(x,\xi))^\gamma.$$

Однаково позначаються різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Для додатного числа c_0 і набору $a:=(a_1,a_2,a_3)$, $a_l:=(a_{l1},...,a_{ln_l})$, $l\in M$, невід'ємних чисел a_{lj}, $j\in\{1,...,n_l\}$, $l\in M$, таких, що $T<\min\limits_{l\in M,j\in\{1,...,n_l\}}(c_0/a_{lj})^{(2b_j-1)/(2b_j(l-1)+1)}$, розглянемо функції [1]

$k_{lj}(t,a_{lj}):=c_0a_{lj}(c_0^{2b_j-1}-a_{lj}^{2b_j-1}t^{2b_j(l-1)+1})^{1-q_j},\ \ j\in\{1,...,n_l\},\ \ l\in M;$
$k(t):=(k_{11}(t,a_{11}),...,k_{1n_1}(t,a_{1n_1}),k_{21}(t,a_{21}),...,k_{2n_2}(t,a_{2n_2}),k_{31}(t,a_{31}),$
$...,k_{3n_3}(t,a_{3n_3}));$
$s_{1j}(t):=k_{1j}(t,a_{1j})+2^{q_j-1}\theta(n_2-j)t^{q_j}k_{2j}(t,a_{2j})+2^{q_j-2}\theta(n_3-j)t^{2q_j}k_{3j}(t,a_{3j}),$
$j\in\{1,...,n_1\};$
$s_{2j}(t):=2^{q_j-1}k_{2j}(t,a_{2j})+4^{q_j-1}\theta(n_3-j)t^{q_j}k_{3j}(t,a_{3j}),\quad j\in\{1,...,n_2\};$

$s_{3j}(t) := 4^{q_j - 1} k_{3j}(t, a_{3j}), \quad j \in \{1, ..., n_3\};$
$s(t) := (s_{11}(t), ..., s_{1n_1}(t), s_{21}(t), ..., s_{2n_2}(t), s_{31}(t), ..., s_{3n_3}(t)), \;\; t \in [0, T],$
де $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$. Введені функції мають такі властивості:

$$k(0) = a, \;\; a_{lj} \leq k_{lj}(\tau, a_{lj}) < k_{lj}(t, a_{lj}) < s_{lj}(t), \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$
$$j \in \{1, ..., n_l\}, \;\; l \in M; \tag{4}$$
$$k_{lj}(t - \tau, k_{lj}(\tau, a_{lj})) \leq k_{lj}(t, a_{lj}), \;\; 0 \leq \tau \leq t \leq T, \;\; j \in \{1, ..., n_l\}, \;\; l \in M; \tag{5}$$
$$-c_0 \rho(t, x, \xi) + [a, \xi] \leq [k(t), X_1(t)] \leq [s(t), x], \quad t \in (0, T], \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Легко переконатися, що справджуються ще такі нерівності:

$$-c_0 \rho(t - \tau, x, \xi) + [k(\tau), \xi)] \leq [k(t), X_1(t - \tau)] \leq [s(t), x], \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{7}$$
$$-c_0 \rho(t - \tau, x, \xi) + [k(\tau), X_{lj}(t - \tau)] \leq [k(t), X_1(t - \tau)],$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \;\; j \in \{1, ..., n_l\}, \;\; l \in M. \tag{8}$$

Означимо норми і простори функцій. Нехай $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_{1j} \in (0, m'']$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $\alpha_{2j} \in (m_j, 2b + m_j]$, $j \in \{1, ..., n_2\}$, $\alpha_{3j} \in (2b + m_j, 4b + m_j]$, $j \in \{1, ..., n_3\}$, $p_1 \in \{0, 1, ..., 2b\}$, $\{p_2, p_3\} \subset \{0, 1\}$, $p := (p_1, p_2, p_3)$. Використовуватимемо такі гельдерові простори функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$:

$C_{k(\cdot)}$ – простір усіх неперервних функцій w, для яких скінченною є норма

$$||w||_{k(\cdot)} := \sup_{(t,x) \in \Pi_{[0,T]}} (|w(t, x)| \exp\{-[k(t), x]\});$$

$C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ – простір усіх функцій w, для яких скінченною є норма

$$||w||^{\alpha}_{k(\cdot)} := ||w||_{k(\cdot)} + [w]^{\alpha}_{k(\cdot)},$$

де $[w]^{\alpha}_{k(\cdot)} := \sup\limits_{\substack{\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ x \neq x'}} \frac{|\Delta_x^{x'} w(t,x)|}{d(x,x',\alpha)} (\exp\{[k(t), x]\} + \exp\{[k(t), x']\})^{-1};$

$C^{p,\alpha}_{k(\cdot)}$ – простір усіх функцій w, які разом зі своїми похідними $\partial^{k_l}_{x_l} w$, $l \in M$, $\|k_1\| \leq p_1$, $|k_2| \leq p_2$, $|k_3| \leq p_3$ належать до простору $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, тобто є скінченною норма

$$||w||^{p,\alpha}_{k(\cdot)} := ||w||^{\alpha}_{k(\cdot)} + \sum_{0 < \|k_1\| \leq p_1} ||\partial^{k_1}_{x_1} w||^{\alpha}_{k(\cdot)} + \sum_{l=2}^{3} \sum_{0 < |k_l| \leq p_l} ||\partial^{k_l}_{x_l} w||^{\alpha}_{k(\cdot)};$$

$C^{p,\alpha}_{s(\cdot)}$ – простір, означення якого одержується з означення простору $C^{p,\alpha}_{k(\cdot)}$ заміною функції k на функцію s.

Зауважимо, що в [4] розглядалися подібні гельдерові простори з $\alpha_{lj} = \alpha_{li}$, $\{j, i\} \subset \{1, ..., n_l\}$, $l \in M$.

3. Відомості про фундаментальний розв'язок задачі Коші

В [1] встановлено, що ФРЗК G для рівняння (1) має вигляд

$$G(t, x; \tau, \xi) = (t - \tau)^{-N} F^{-1}_{\sigma \to y} [\tilde{V}(t, \tau, \sigma)](t, \tau, y)|_{y = y(t - \tau, x, \xi)},$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де F^{-1} – обернене перетворення Фур'є за просторовими змінними,

$$\tilde{V}(t,\tau,\sigma) := \exp\{ \sum_{\|k_1\| \le 2b} i^{|k_1|} (t-\tau)^{1-\|k_1\|/(2b)} \int_0^1 a_{k_1}(\tau + (t-\tau)\beta) \times$$

$$\times (\sigma_1' + \beta\sigma_2' + \frac{\beta^2}{2}\sigma_3)^{k_1'} (\sigma_1'' + \beta\sigma_2'')^{k_1''} (\sigma_1''')^{k_1'''} d\beta\},$$

$y(t,x,\xi) := (t^{-1/(2b_1)}(x_{11} - \xi_{11}), ..., t^{-1/(2b_{n_1})}(x_{1n_1} - \xi_{1n_1}), t^{-1-1/(2b_1)}(x_{21} + tx_{11} - \xi_{21}), ..., t^{-1-1/(2b_{n_2})}(x_{2n_2} + tx_{1n_2} - \xi_{2n_2}), t^{-2-1/(2b_1)}(x_{31} + tx_{21} + \frac{t^2}{2}x_{11} - \xi_{31}), ..., t^{-2-1/(2b_{n_3})}(x_{3n_3} + tx_{2n_3} + \frac{t^2}{2}x_{1n_3} - \xi_{3n_3}))$, і такі властивості:

1) функція $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, неперервна при $(t,x) \ne (\tau,\xi)$ разом зі своїми похідними $\partial_x^k G$ і справджуються оцінки

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C_k (t-\tau)^{-N-N_{k_1}-N_{k_2}-N_{k_3}} E_c(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{9}$$

де C_k і c – деякі додатні сталі;

2) для $0 \le \tau < t \le T$ і $x \in \mathbb{R}^n$ правильні рівності

$$\partial_x^k \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) d\xi = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\};$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} \partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 d\xi_3 = 0, \quad (k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^{n_2+n_3} \setminus \{0\};$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3 = 0, \quad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \setminus \{0\}. \tag{10}$$

Справджується також таке твердження [4]: для довільного $\gamma \in (0,1]$ і деякого $\bar{c} \in (0,c)$, де c – стала з оцінок (9), правильними є оцінки

$$|\Delta_x^{x'} \partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C_k (d(x,x'))^\gamma (t-\tau)^{-N-N_{k_1}-N_{k_2}-N_{k_3}-\gamma/(2b)} E_{\bar{c}}(t,x;\tau,\xi),$$

$$(d(x,x'))^{2b} \le t-\tau, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{11}$$

Зауваження 1. Зі структури рівняння (1) та ФРЗК для нього випливає, що функція $\int_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3$ є ФРЗК для рівняння (1), якщо в нього входять тільки перші дві групи просторових змінних ($n_3 = 0$), а $\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3$ – ФРЗК для невиродженого $2\vec{b}$-параболічного рівняння ($n_2 = n_3 = 0$), адже

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3 = (t-\tau)^{-N_2} F^{-1}_{(\sigma_1,\sigma_2)\to(y_1,y_2)}[\tilde{V}(t,\tau,(\sigma_1,\sigma_2,0))](t,\tau,y_1,y_2),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3 = (t-\tau)^{-N_1} F^{-1}_{\sigma_1\to y_1}[\tilde{V}(t,\tau,(\sigma_1,0,0))](t,\tau,y_1),$$

де $y_1 = y_1(t-\tau,x,\xi)$, $y_2 = y_2(t-\tau,x,\xi)$.

Зауваження 1 використовується, зокрема, для доведення рівностей (10).

Оскільки у цій статті ми досліджуємо показники гладкості об'ємного потенціалу за кожною просторовою змінною окремо, то замість формул (10) використовуватимемо таке твердження.

Твердження 1. *Для* $0 \le \tau < t \le T$ *і* $x \in \mathbb{R}^n$ *правильні рівності*

$$\partial^{k_{2j}}_{x_{2j}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_{2j}d\xi_{3j} = 0, \quad k_{2j} > 0, \quad j \in \{1,...,n_3\};$$

$$\partial^{k_{2j}}_{x_{2j}} \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_{2j} = 0, \quad k_{2j} > 0, \quad j \in \{n_3+1,...,n_2\}; \tag{12}$$

$$\partial^{k_{3j}}_{x_{3j}} \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_{3j} = 0, \quad k_{3j} > 0, \quad j \in \{1,...,n_3\}.$$

Доведення твердження 1 випливає з тих же міркувань, що й формули (10) та зауваження 1 на підставі структури рівняння (1) та ФРЗК для нього.

Надалі сталу c_0 з означення функцій $k_l(t,a_l)$, $l \in M$, братимемо з інтервалу $(0,\bar{c})$, де $\bar{c}$ – стала з оцінок (11). Права частина нерівностей (9) і (11) містить функції E_c і ρ, які мають такі властивості [1,4]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N} E_\delta(t,x;\tau,\xi)d\xi = C, \quad \tau < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \delta > 0; \tag{13}$$

$$\forall \bar{R} > 0: \ \rho(t,x,\xi) \ge t^{-\lambda} R^{q'}, \ t \in (0,T], \quad x \in B_{\bar{R}}, \ \xi \in R^n \setminus B_{2R}, \tag{14}$$

де R – досить велике число ($R > \bar{R}$), $\lambda = q'' - 1$ при $t \in (0,1]$, $\lambda = 3q' - 1$ при $t > 1$;

$$(d(X_l(t-\tau),\xi))^\beta E_{c_1}(t,x;\tau,\xi) \le C(t-\tau)^{\beta/(2b)} E_{c_2}(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \beta > 0, \quad l \in M, \tag{15}$$

з деяким $C > 0$ і довільними $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$ такими, що $0 < c_2 < c_1$.

Твердження 2. *Для деякого $C > 0$ і довільних $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$ таких, що $0 < c_2 < c_1$, правильна нерівність*

$$(d(X_{lj}(t-\tau), \xi))^\beta E_{c_1}(t, x; \tau, \xi) \le C(t-\tau)^{\beta/(2b)} E_{c_2}(t, x; \tau, \xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \beta > 0, \quad l \in M; \tag{16}$$

Нерівність (16) випливає з нерівності (15).

4. Формули для похідних від об'ємного потенціалу, породженого фундаментальним розв'язком рівняння (1)

У [4] наведено такі твердження.

Лема 1. *Якщо $f \in C_{k(\cdot)}$, то об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} u$, $\|k_1\| < 2b$, які визначаються формулами*

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi,$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \ \|k_1\| < 2b. \tag{17}$$

Лема 2. *Нехай $f \in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з $\beta \in (0, m'']$:*

$$\forall R > 0 \ \exists C > 0 \ \forall (t, x) \in [0, T] \times B_R : \quad |\Delta_x^{x'} f(t, x)| \le C d(x, x'; \beta).$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} u$, $\|k_1\| = 2b$, які визначаються формулами

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X_1(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi,$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \ \|k_1\| = 2b. \tag{18}$$

При доведенні леми 1 отримується оцінка

$$|\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x)| \le C t^{1 - \|k_1\|/(2b)} \exp\{[s(t), x]\} ||f||_{k(\cdot)},$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \ \|k_1\| < 2b; \tag{19}$$

при встановленні твердження леми 2 – нерівність

$$|\partial_{x_1}^{k_1} u(t, x)| \le C(t^{1 - \|k_1\|/(2b) + \beta/(2b)} + t \exp\{[s(t), x]\} ||f||_{k(\cdot)}),$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \ \|k_1\| = 2b. \tag{20}$$

Надалі використаємо методику доведень з [2, 12].

Лема 3. *Нехай* $f \in C_{k(\cdot)}$ *і задовольняється така умова Гельдера з* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_{1j} = 0$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $\alpha_{2j} \in (m_j, 2b + m_j]$, $j \in \{1, ..., n_2\}$, $\alpha_{3j} \in (2b + m_j, 4b + m_j]$, $j \in \{1, ..., n_3\}$*:*

$$\forall R > 0 \ \exists C > 0 \ \forall (t, x) \in [0, T] \times B_R : \quad |\Delta_x^{x'} f(t, x)| \le C d(x, x', \alpha). \quad (21)$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u$, $k_{lj} = 1$, $j \in \{1, ..., n_l\}$, $l \in \{2, 3\}$, *які визначаються формулами*

$$\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X_{lj}(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]},$$

$$k_{lj} = 1, \quad j \in \{1, ..., n_l\}, \quad l \in \{2, 3\}. \quad (22)$$

Крім того, справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u(t, x)| \le C(t^{1-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_{lj}/(2b)} + t \exp\{[s(t), x]\} ||f||_{k(\cdot)}),$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad k_{lj} = 1, \quad j \in \{1, ..., n_l\}, \quad l \in \{2, 3\}. \quad (23)$$

Доведення. Нехай $k_{lj} = 1$ з деякими $j \in \{1, ..., n_l\}$, $l \in \{2, 3\}$. Для доведення леми покладемо

$$I_{lj}(t, x; \tau) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^y f(\tau, \xi)|_{y = X_{lj}(t-\tau)} d\xi,$$

$$K'_{k_{lj}}(t, x; \tau) := \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X_{lj}(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi, \ 0 \le \tau < t \le T, x \in \mathbb{R}^n.$$

Доведемо, що

$$\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I_{lj}(t, x; \tau) = K'_{k_{lj}}(t, x; \tau), \ 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (24)$$

Для цього оцінимо підінтегральну функцію з $K'_{k_{lj}}$. Нехай $\bar{R} > 0$ і $R > \bar{R}$. При $(t, x) \in (0, T] \times B_{\bar{R}}$ і $(\tau, \xi) \in [0, t) \times B_{2R}$ на підставі (9) та (21), а потім (16) з $c_1 = c$ з урахуванням того, що $\alpha_{2j} < \alpha_{3j}$, маємо

$$|\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X_{lj}(t-\tau)} f(\tau, \xi)| \le$$

$$\le C_{k_{lj}} (t - \tau)^{-N-(2b(l-1)+m_j)/(2b)} E_c(t, x; \tau, \xi) d(\xi, X_{lj}(t - \tau), \alpha) \le$$

$$\le C(t - \tau)^{-N-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_{lj}/(2b)} E_{c_2}(t, x; \tau, \xi). \quad (25)$$

Використовуючи нерівності (7)–(9) і (14), а також те, що $f \in C_{k(\cdot)}$, для $(t, x) \in (0, T] \times B_{\bar{R}}$ і $(\tau, \xi) \in [0, t) \times (\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})$ отримуємо

$$|\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} G(t, x; \tau, \xi) \Delta_\xi^{X_{lj}(t-\tau)} f(\tau, \xi)| \le C_{k_{lj}} (t - \tau)^{-N-(2b(l-1)+m_j)/(2b)} \times$$

$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)(\exp\{[k(\tau),\xi]\}+\exp\{[k(\tau),X_{lj}(t-\tau)]\})||f||_{k(\cdot)}\leq$$

$$\leq C_{k_{lj}}(t-\tau)^{-N-(2b(l-1)+m_j)/(2b)}E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}\leq$$

$$\leq C_{k_{lj}}(t-\tau)^{-N-(2b(l-1)+m_j)/(2b)}\exp\{-\frac{c-c_0}{2}(t-\tau)^{-\lambda}R^{q'}\}\times$$

$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}.$$

Очевидно, що існує таке $c_3\in(0,\frac{c-c_0}{2})$, що

$$(t-\tau)^{-(2b(l-1)+m_j)/(2b)}\exp\{-\frac{c-c_0}{2}(t-\tau)^{-\lambda}R^{q'}\}\leq C\exp\{-c_3(t-\tau)^{-\lambda}R^{q'}\}.$$

Тому

$$|\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_{\xi}^{X_{lj}(t-\tau)}f(\tau,\xi)|\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{-N}\exp\{-c_3(t-\tau)^{-\lambda}R^{q'}\}E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)},$$

$$(t,x)\in(0,T]\times B_{\bar R},(\tau,\xi)\in[0,t)\times(\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}), \tag{26}$$

а λ визначене в (14).

Якщо подати $K'_{k_{lj}}$ у вигляді суми інтегралів по B_{2R} і по $\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}$, то на підставі (25) і (26) перший доданок оціниться виразом

$$J_{lj}(t,x;\tau):=\int\limits_{B_{2R}}C(t-\tau)^{-N-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_{lj}/(2b)}E_{c_2}(t,x;\tau,\xi)d\xi,$$

$$0\leq\tau<t\leq T,\quad x\in B_{\bar R},$$

а другий – виразом

$$J'_l(t,x;\tau):=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}}C(t-\tau)^{-N}\exp\{-c_3(t-\tau)^{-\lambda}R^{q'}\}\times$$

$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}d\xi,\quad 0\leq\tau<t\leq T,\quad x\in B_{\bar R}.$$

Враховуючи рівність (13) і те, що при заданих α_{lj} виконується нерівність $-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_{lj}/(2b)>-1$, $j\in\{1,...,n_l\}$, $l\in\{2,3\}$, дістаємо збіжність інтегралів J_{lj} і J'_l та рівномірну збіжність інтеграла $K'_{k_{lj}}(t,x;\tau)$ стосовно $x\in B_{\bar R}$ при фіксованих t і τ. На підставі довільності $\bar R>0$ звідси випливає рівність (24). Крім того, оскільки

$$J_{lj}(t,x;\tau)\leq\int\limits_{R^n}C(t-\tau)^{-N-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_{lj}/(2b)}E_{c_2}(t,x;\tau,\xi)d\xi=$$

$$=C(t-\tau)^{-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_{lj}/(2b)},$$

$$J'_l(t,x;\tau) \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(t-\tau)^{-N} E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi)d\xi \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)} =$$

$$= C\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то маємо ще таку оцінку:

$$|\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I_{lj}(t,x;\tau)| \le C((t-\tau)^{-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_{lj}/(2b)} + \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{27}$$

Вираз $\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I_{lj}(t,x;\tau)$ можна записати у вигляді

$$\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I_{lj}(t,x;\tau) = \partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I(t,x;\tau) - \partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I'_{lj}(t,x;\tau),$$

де

$$I(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

а

$$I'_{lj}(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,y)|_{y=X_{lj}(t-\tau)}d\xi, \quad 0 \le \tau < t \le T, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

На підставі відповідної рівності з (12)

$$\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I'_{lj}(t,x;\tau) = 0.$$

Отже,

$$\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I_{lj}(t,x;\tau) = \partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I(t,x;\tau), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{28}$$

Оцінка (27), в якій $-(2b(l-1)+m_j)/(2b) + \frac{\alpha_{lj}}{2b} > -1$, та рівність (28) доводять рівномірну збіжність стосовно $(t,x) \in (0,T] \times B_R$ при довільному $R > 0$ інтеграла

$$\int\limits_0^t \partial_{x_l}^{k_l} I(t,x;\tau)d\tau.$$

Звідси та довільності $R > 0$ випливає рівність

$$\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u(t,x) = \int\limits_0^t \partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} I(t,x;\tau)d\tau, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{29}$$

З довільності $j \in \{1,...,n_l\}$, $l \in \{2,3\}$, вона разом з (28) і (24) доводить формулу (22).

Оцінка (23) випливає з (28), (29) та оцінки (27). Лему доведено. ■

5. Оцінки об'ємного потенціалу в гельдеровому просторі

Теорема 1. *Якщо* $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, *де* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_{1j} := \beta$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, $\alpha_{2j} := \beta + m_j$, $j \in \{1, ..., n_2\}$, $\alpha_{3j} := \beta + 2b + m_j$, $j \in \{1, ..., n_3\}$, *з деяким* $\beta \in (0, m'']$, *то* $u \in C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, *де* $\alpha' := (\beta, \beta, \beta)$, $r := (r_1, r_2, r_3) := (2b, 1, 1)$, *справджуються оцінки*

$$||u||^{r,\alpha'}_{s(\cdot)} \le C||f||^{\alpha}_{k(\cdot)} \tag{30}$$

і рівності

$$\lim_{t \to 0} \Big(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\partial^k_x u(t,x)| \exp\{-[s(t),x]\}) \Big) = 0, \quad \frac{\|k_1\|}{2b} + |k_2| + |k_3| \le 1. \tag{31}$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що оскільки $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ із указаними α і β, то функція f задовольняє умови лем 1—3, зокрема умову (21) з $\alpha_{2j} = \beta + m_j$, $\alpha_{3j} = \beta + 2b + m_j$. Тому для u правильні твердження цих лем.

Спочатку розглянемо випадок, коли $\|k_1\| < 2b$. На підставі (19) при $d(x,x') \ge t^{1/(2b)}$ для довільного $\gamma \in (0,1]$ одержуємо

$$|\Delta^{x'}_x \partial^{k_1}_{x_1} u(t,x)| \le |\partial^{k_1}_{x_1} u(t,x)| + |\partial^{k_1}_{x_1} u(t,x)|_{x=x'}| \le$$
$$\le Ct^{1-\|k_1\|/(2b)}(\exp\{[s(t),x]\} + \exp\{[s(t),x']\})||f||_{k(\cdot)} \le$$
$$\le C(d(x,x'))^{\gamma} t^{1-(\|k_1\|+\gamma)/(2b)}(\exp\{[s(t),x]\} + \exp\{[s(t),x']\})||f||_{k(\cdot)}.$$

Якщо $d(x,x') < t^{1/(2b)}$, то за допомогою (7), (11), (13), (17) і належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ маємо

$$|\Delta^{x'}_x \partial^{k_1}_{x_1} u(t,x)| \le \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{x'}_x \partial^{k_1}_{x_1} G(t,x;\tau,\xi)||f(\tau,\xi)|d\xi \le C(d(x,x'))^{\gamma} \times$$
$$\times \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-(\|k_1\|+\gamma)/(2b)} E_{\bar{c}}(t,x;\tau,\xi) \exp\{[k(\tau),\xi]\} d\xi ||f||_{k(\cdot)} \le$$
$$\le C(d(x,x'))^{\gamma} \int_0^t (t-\tau)^{-(\|k_1\|+\gamma)/(2b)} d\tau \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)} =$$
$$= C(d(x,x'))^{\gamma} t^{1-(\|k_1\|+\gamma)/(2b)} \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}.$$

З цих оцінок та (19) випливає, що $u \in C^{p,\alpha''}_{s(\cdot)}$, де $p = (p_1, 0, 0)$, $p_1 < 2b$, $\alpha'' = (\gamma, \gamma, \gamma)$, $\gamma \in (0,1]$, і

$$||u||^{p,\alpha''}_{s(\cdot)} \le C||f||_{k(\cdot)}.$$

Нехай тепер $k \in \mathbb{Z}_+^n$ таке, що $\frac{\|k_1\|}{2b} + |k_2| + |k_3| = 1$. Оцінки (20) і (23) за умов теореми на f не є точними. Тому оцінимо $\partial_{x_l}^{k_l} u$ за допомогою формул (18) або (22), належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, нерівностей (7)–(9) і (15) або (16) та рівності (13). Маємо для $\|k_1\| = 2b$

$$|\partial_{x_1}^{k_1} u(t,x)| \le C_{k_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-N_{k_1}} E_c(t,x;\tau,\xi) d(\xi, X_1(t-\tau),\alpha) \times$$

$$\times (\exp\{[k(\tau),\xi]\} + \exp\{[k(\tau), X_1(t-\tau)]\}) d\xi [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le$$

$$\le C \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-N_{k_1}} E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi) d(\xi, X_1(t-\tau),\alpha) d\xi \times$$

$$\times \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le$$

$$\le C \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-N_{k_1}+\beta/(2b)} E_{c_2}(t,x;\tau,\xi) d\xi \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} =$$

$$= C \int\limits_0^t (t-\tau)^{-N_{k_1}+\beta/(2b)} d\tau \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} =$$

$$= C t^{1-N_{k_1}+\beta/(2b)} \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)}.$$

З урахуванням того, що $\alpha_{2j} < \alpha_{3j}$, маємо для таких $k \in \mathbb{Z}_+^n$, що $|k_1| + |k_2| = 1$ (тобто таких $l \in \{2,3\}$ і $j \in \{1,...,n_l\}$, що $k_{lj} = 1$)

$$|\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u(t,x)| \le C_{k_l} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-N_{k_l}} E_c(t,x;\tau,\xi) d(\xi, X_{lj}(t-\tau),\alpha) \times$$

$$\times (\exp\{[k(\tau),\xi]\} + \exp\{[k(\tau), X_{lj}(t-\tau)]\}) d\xi [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le$$

$$\le C \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-N_{k_l}} E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi) d(\xi, X_{lj}(t-\tau),\alpha) d\xi \times$$

$$\times \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le$$

$$\le C \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-N_{k_l}+\alpha_{lj}/(2b)} E_{c_2}(t,x;\tau,\xi) d\xi \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} =$$

$$= C \int\limits_0^t (t-\tau)^{-N_{k_l}+\alpha_{lj}/(2b)} d\tau \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} =$$

$$= Ct^{1-N_{k_l}+\alpha_{lj}/(2b)} \exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}.$$

Якщо $\frac{\|k_1\|}{2b}+|k_2|+|k_3|=1$, $\beta \in [0,m'']$, $\alpha_{2j}=\beta+m_j$, $\alpha_{3j}=\beta+2b+m_j$, то $-N_{k_1}+\beta/(2b)=-1+\beta/(2b)$, $-N_{k_l}+\alpha_{lj}/(2b)\geq -1+\beta/(2b)$, $j\in\{1,...,n_l\}$, $l\in\{2,3\}$, і отримуємо таку оцінку:

$$|\partial^k_x u(t,x)| \leq Ct^{\beta/(2b)} \exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)},$$

$$(t,x)\in \Pi_{(0,T]},\ \frac{\|k_1\|}{2b}+|k_2|+|k_3|=1. \tag{32}$$

Якщо $d(x,x')\geq t^{1/(2b)}$, то з (32) відразу маємо

$$|\Delta^{x'}_x \partial^{k_l}_{x_l} u(t,x)| \leq C(d(x,x'))^{\beta}(\exp\{[s(t),x]\}+\exp\{[s(t),x']\})[f]^{\alpha}_{k(\cdot)},$$

$$\{(t,x),(t,x')\}\subset \Pi_{(0,T]}, l\in M, \frac{\|k_1\|}{2b}+|k_2|+|k_3|=1. \tag{33}$$

Нехай тепер $\{(t,x),(t,x')\}\subset \Pi_{(0,T]}$ і $d:=d(x,x')<t^{1/(2b)}$.

При $\|k_1\|=2b$ з виразу (18) і першої з рівностей (10)

$$|\Delta^{x'}_x \partial^{k_1}_{x_1} u(t,x)| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_0^{t-d^{2b}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta^{x'}_x \partial^{k_1}_{x_1} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t-d^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^{k_1}_{x_1} G(t,x;\tau,\xi) \Delta^{X_1(t-\tau)}_{\xi} f(\tau,\xi) d\xi\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t-d^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^{k_1}_{x_1} G(t,x';\tau,\xi) \Delta^{X_1'(t-\tau)}_{\xi} f(\tau,\xi) d\xi\right| =: P_{11}+P_{12}+P_{13},$$

де $X_1'(t-\tau)=X_1(t-\tau)|_{x=x'}$.

За допомогою першої рівності з (10), оцінки (11) і належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ маємо

$$P_{11} \leq \int\limits_0^{t-d^{2b}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{x'}_x \partial^{k_1}_{x_1} G(t,x;\tau,\xi)||\Delta^{X_1(t-\tau)}_{\xi} f(\tau,\xi)| d\xi \leq$$

$$\leq Cd^{\gamma} \int\limits_0^{t-d^{2b}} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-N_{k_1}-\gamma/(2b)} E_{\bar{c}}(t,x;\tau,\xi) d(\xi, X_1(t-\tau),\alpha)\times$$

$$\times(\exp\{[k(\tau),\xi]\}+\exp\{[k(\tau),X_1(t-\tau)]\})d\xi)[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}.$$

Далі використаємо нерівності (4), (7) і (15) та рівність (13). Одержуємо

$$P_{11}\leq Cd^{\gamma}\int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-N_{k_1}-\gamma/(2b)}d(\xi,X_1(t-\tau),\alpha)E_{\bar{c}-c_0}(t,x;\tau,\xi)d\xi\times$$

$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}\leq Cd^{\gamma}\int\limits_0^{t-d^{2b}}(t-\tau)^{-N_{k_1}+(\beta-\gamma)/(2b)}d\tau\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}=$$

$$=Cd^{\gamma}\int\limits_0^{t-d^{2b}}(t-\tau)^{-1+(\beta-\gamma)/(2b)}d\tau\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}$$

або при $\gamma\in(\beta,1)$

$$P_{11}\leq Cd^{\gamma}(t-\tau)^{(\beta-\gamma)/(2b)}\Big|_0^{t-d^{2b}}\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}=Cd^{\gamma}(d^{\beta-\gamma}-t^{(\beta-\gamma)/(2b)})\times$$

$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}\leq C(d(x,x'))^{\beta}\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}. \tag{34}$$

На підставі (4), (7), (9), (13) і (15) та належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ маємо

$$P_{12}\leq C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-N_{k_1}}E_c(t,x;\tau,\xi)d(\xi,X_1(t-\tau),\alpha)\times$$

$$\times(\exp\{[k(\tau),\xi]\}+\exp\{[k(\tau),X_1(t-\tau)]\})d\xi[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}\leq$$

$$\leq C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}(t-\tau)^{-N_{k_1}+\beta/(2b)}d\tau\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}=$$

$$=C\int\limits_{t-d^{2b}}^{t}(t-\tau)^{-1+\beta/(2b)}d\tau\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}=$$

$$=C(t-\tau)^{\beta/(2b)}\Big|_t^{t-d^{2b}}\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}=C(d(x,x'))^{\beta}\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}. \tag{35}$$

Аналогічно,

$$P_{13}\leq C(d(x,x'))^{\beta}\exp\{[s(t),x']\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}. \tag{36}$$

Якщо $|k_2|+|k_3|=1$, тобто при деякому $l\in\{2,3\}$ і $j\in\{1,...,n_l\}$ $k_{lj}=1$, то з виразу (22) і рівностей (12) маємо

$$|\Delta_x^{x'}\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}u(t,x)|\le$$

$$\le\left|\int_0^{t-d^{2b}}d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_x^{x'}\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi\right|+$$

$$+\left|\int_{t-d^{2b}}^{t}d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_{lj}(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi\right|+$$

$$+\left|\int_{t-d^{2b}}^{t}d\tau\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}G(t,x';\tau,\xi)\Delta_\xi^{X'_{lj}(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi\right|=:P_{l1}+P_{l2}+P_{l3},$$

де $X'_{lj}(t-\tau)=X_{lj}(t-\tau)|_{x=x'}$, $l\in\{2,3\}$.

Подібно до оцінок для P_{11}, P_{12} і P_{13} (тільки з використанням, крім (4) і (7), також нерівностей (8), а замість першої рівності з (10) відповідної рівності з (12)) отримуємо

$$P_{l1}\le C(d(x,x'))^\beta\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)},\tag{37}$$

$$P_{l2}\le C(d(x,x'))^\beta\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)},\tag{38}$$

$$P_{l3}\le C(d(x,x'))^\beta\exp\{[s(t),x']\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}.\tag{39}$$

З оцінок (33)–(39) випливає, що $u\in C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, де $\alpha'=(\beta,\beta,\beta)$, $r=(r_1,r_2,r_3)=(2b,1,1)$ і правильна оцінка (30). З оцінок (19) і (32) безпосередньо випливає (31). ■

Зауважимо, що в доведеній теоремі вказано точніші значення показників гельдеровості $\alpha\in\mathbb{R}^n$, ніж у подібних результатах, установлених в [4].

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type . – Basel-Boston-Berlin: Birkhaüser Verlag, 2004. – 390p. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152).

2. *Дронь В.С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С.32–41.

3. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Властивості об'ємного потенціалу для одного класу ультрапараболічних рівнянь довільного порядку // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3–4. – С.47–56.

4. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Властивості об'ємного потенціалу для вироджених $\vec{2b}$-параболічних рівнянь типу Колмогорова // Буков. мат. журн. – 2017. – **5**, № 1–2. – С.80-86.

Vitaly Dron', Stepan Ivasyshen

ON SMOOTHNESS OF VOLUME POTENTIAL FOR DEGENERATE $\vec{2b}$-PARABOLIC EQUATIONS OF KOLMOGOROV TYPE

A Cauchy problem for degenerate equation of Kolmogorov type with $\vec{2b}$-parabolic part with respect to main variables with dependent on only time-variable t coefficients is considered. In Hölder spaces of increased functions as $|x| \to \infty$ exponents of smoothness of a volume potential which corresponding to the problem with respect to smoothness of density are investigated.

УДК 517.95

Микола Іванчов[1], **Наталія Кінаш** [2]

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕВІДОМИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЧАСОВОЇ ТА ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ

У роботі розглянуто обернену задачу для рівняння теплопровідності у прямокутнику. Невідомими є два старших коефіцієнти, що залежать від часової та різних просторових змінних. За допомогою функції Гріна задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, дослідження якої приводить до умов існування та єдиності розв'язку оберненої задачі.

1. Вступ

У коефіцієнтних обернених задачах для одновимірного рівняння теплопровідності невідомими є, зазвичай, або функції, залежні від часової змінної, або функції просторової змінної. Зустрічаються і задачі, в яких одночасно визначають два коефіцієнти, які залежать від різних змінних [1]- [6]. При переході до двовимірного рівняння теплопровідності виникають нові можливості, окрім тих, які були в одновимірному випадку: невідомі коефіцієнти можуть залежати і від часової, і від просторової змінних. Такий випадок розглянуто у роботі — в рівняння теплопровідності входять два невідомі коефіцієнти, які залежать від часової та різних просторових змінних.

2. Формулювання задачі та основні припущення

В області $Q_T := \{(x, y, t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для рівняння теплопровідності з невідомими коефіцієнтами $(a(y, t), b(x, t))$:

$$u_t = a(y,t)u_{xx} + b(x,t)u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{2}$$

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, ivanchov@franko.lviv.ua*

[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, kinashnataliia@gmail.com*

$$u(0,y,t) = \mu_{11}(y,t), \quad u(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = \mu_{21}(x,t), \quad u(x,l,t) = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{4}$$

$$a(y,t)u_x(0,y,t) = \mu_{31}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{5}$$

$$b(x,t)u_y(x,0,t) = \mu_{32}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{6}$$

де $D := \{(x,y) : 0 < x < h, 0 < y < l\}$.

Під розв'язком задачі (1)-(6) будемо розуміти трійку функцій [7, с.75]

$$(a(y,t), b(x,t), u(x,y,t))$$

з класу

$$(C^{1,0}([0,l] \times [0,T]) \times C^{1,0}([0,h] \times [0,T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)),$$

яка задовольняє умови (1)-(6) у звичайному розумінні.

Крім того, припускається, що

$$a(y,t) > 0, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

$$b(x,t) > 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T].$$

Будемо вважати виконаними такі припущення:

(A1) $\varphi \in C^2(\overline{D})$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$,
$\mu_{1k} \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T])$, $\mu_{2k} \in C^{2,1}([0,h] \times [0,T])$, $k \in \{1,2\}$,
$\mu_{31} \in C^{1,0}([0,l] \times [0,T])$, $\mu_{32} \in C^{1,0}([0,h] \times [0,T])$;

(A2) $\varphi_x(x,y) > 0$, $\varphi_y(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$;
$\mu_{1k_y}(y,t) > 0$, $\mu_{31}(y,t) > 0$, $(y,t) \in [0,l] \times [0,T]$;
$\mu_{2k_x}(x,t) > 0$, $\mu_{32}(x,t) > 0$, $(x,t) \in [0,h] \times [0,T]$, $k \in \{1,2\}$;

(A3) умови узгодження нульового порядку [7].

3. Зведення задачі (1)-(6) до системи інтегральних рівнянь

Припустимо тимчасово, що функції $a(y,t) > 0, (y,t) \in [0,l] \times [0,T]$, $b(x,t) > 0, (x,t) \in [0,h] \times [0,T]$ задані. Відомо [7, с.486], що існує функція Гріна крайових задач для рівняння (1). Позначимо її $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$, де $i,j = 1$ у випадку крайових умов Діріхле та $i,j = 2$ у випадку крайових умов Неймана; i відповідає типу крайових умов за змінною x, j

відповідає типу крайових умов за змінною y. Застосовуючи стандартну процедуру, знайдемо зображення розв'язку задачі (1)-(6):

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = &\iint\limits_D G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+ \\ &+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\eta,\tau)\mu_{11}(\eta,\tau)d\eta d\tau- \\ &-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\eta,\tau)\mu_{12}(\eta,\tau)d\eta d\tau+ \\ &+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)b(\xi,\tau)\mu_{21}(\xi,\tau)d\xi d\tau- \\ &-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)b(\xi,\tau)\mu_{22}(\xi,\tau)d\xi d\tau+ \\ &+\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T. \end{aligned} \tag{7}$$

Позначимо $v := u_x, w := u_y$. Диференціюючи рівняння (1) за змінними x і y та використовуючи умови (2)-(4), отримаємо задачу стосовно невідомих (v,w):

$$v_t = a(y,t)v_{xx} + b(x,t)v_{yy} + b_x(x,t)w_y + f_x(x,y,t), \quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{8}$$

$$v(x,y,0) = \varphi_x(x,y), \quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} a(y,t)v_x(0,y,t) = \mu_{11_t}(y,t) - f(0,y,t) - b(0,t)\mu_{11_{yy}}(y,t), \\ a(y,t)v_x(h,y,t) = \mu_{12_t}(y,t) - f(h,y,t) - b(h,t)\mu_{12_{yy}}(y,t), \\ (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \end{cases} \tag{10}$$

$$v(x,0,t) = \mu_{21_x}(x,t), \quad v(x,l,t) = \mu_{22_x}(x,t), \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{11}$$

$$w_t = a(y,t)w_{xx} + b(x,t)w_{yy} + a_y(y,t)v_x + f_y(x,y,t), \quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{12}$$

$$w(x,y,0) = \varphi_y(x,y), \quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{13}$$

$$w(0,y,t)=\mu_{11_y}(y,t),\quad w(h,y,t)=\mu_{12_y}(y,t),\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{14}$$

$$\begin{cases} b(x,t)w_y(x,0,t)=\mu_{21_t}(x,t)-f(x,0,t)-a(0,t)\mu_{21_{xx}}(x,t),\\ b(x,t)w_y(x,l,t)=\mu_{22_t}(x,t)-f(x,l,t)-a(l,t)\mu_{22_{xx}}(x,t),\\ (x,t)\in[0,h]\times[0,T]. \end{cases} \tag{15}$$

Зведемо задачу (8)-(15) до системи інтегральних рівнянь

$$v(x,y,t)=v_0(x,y,t)+ \\ +\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)b_\xi(\xi,\tau)w_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \tag{16}$$

$$w(x,y,t)=w_0(x,y,t)+ \\ +\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a_\eta(\eta,\tau)v_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \tag{17} \\ (x,y,t)\in\overline{Q}_T,$$

де

$$v_0(x,y,t)=\iint\limits_D G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)\left(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau)-b(0,\tau)\mu_{11_{\eta\eta}}(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)\left(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau)-b(h,\tau)\mu_{12_{\eta\eta}}(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)b(\xi,\tau)\mu_{21_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)b(\xi,\tau)\mu_{22_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{18}$$

$$w_0(x,y,t)=\iint\limits_D G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\eta,\tau)\mu_{11_\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\eta,\tau)\mu_{12_\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\left(\mu_{21_\tau}(\xi,\tau)-f(\xi,0,\tau)-a(0,\tau)\mu_{21_{\xi\xi}}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\left(\mu_{22_\tau}(\xi,\tau)-f(\xi,l,\tau)-a(l,\tau)\mu_{22_{\xi\xi}}(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{19}$$

Легко бачити, що функції v_0 та w_0 є, відповідно, розв'язками задач

$$\begin{aligned}
&v_{0_t}=a(y,t)v_{0_{xx}}+b(x,t)v_{0_{yy}}+f_x(x,y,t),\quad (x,y,t)\in Q_T,\\
&v_0(x,y,0)=\varphi_x(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D},\\
&v_0(x,0,t)=\mu_{21_x}(x,t),\ v_0(x,l,t)=\mu_{22_x}(x,t),\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T],\\
&a(y,t)v_{0_x}(0,y,t)=\mu_{11_t}(y,t)-f(0,y,t)-b(0,t)\mu_{11_{yy}}(y,t),\\
&a(y,t)v_{0_x}(h,y,t)=\mu_{12_t}(y,t)-f(h,y,t)-b(h,t)\mu_{12_{yy}}(y,t),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],
\end{aligned}\tag{20}$$

та

$$\begin{aligned}
&w_{0_t}=a(y,t)w_{0_{xx}}+b(x,t)w_{0_{yy}}+f_y(x,y,t),\quad (x,y,t)\in Q_T,\\
&w_0(0,y,t)=\mu_{11_y}(y,t),\ w_0(h,y,t)=\mu_{12_y}(y,t),\ (y,t)\in[0,l]\times[0,T],\\
&w_0(x,y,0)=\varphi_y(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D},\\
&b(x,t)w_{0_y}(x,0,t)=\mu_{21_t}(x,t)-f(x,0,t)-a(0,t)\mu_{21_{xx}}(x,t),\\
&b(x,t)w_{0_y}(x,l,t)=\mu_{22_t}(x,t)-f(x,l,t)-a(l,t)\mu_{22_{xx}}(x,t),,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,t)\in[0,h]\times[0,T]
\end{aligned}\tag{21}$$

Інтегруючи частинами, надамо системі (16), (17) такого вигляду:

$$v(x,y,t) = v_0(x,y,t) - \\ - \int_0^t \iint_D G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) b_\xi(\xi,\tau) w(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau, \tag{22}$$

$$w(x,y,t) = w_0(x,y,t) - \\ - \int_0^t \iint_D G_{12_\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) a_\eta(\eta,\tau) v(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau,\ (x,y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{23}$$

Подамо умови (5), (6) у вигляді

$$a(y,t)v(0,y,t) = \mu_{31}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{24}$$

$$b(x,t)w(x,0,t) = \mu_{32}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{25}$$

Зауважуючи, що

$$u(x,y,t) = \mu_{11}(y,t) + \int_0^x v(\xi,y,t) d\xi, \tag{26}$$

замість (1)-(6) отримуємо еквівалентну задачу (22)-(25).

4. Існування розв'язку задачі (1)-(6)

Оскільки задача (1)-(6) еквівалентна системі рівнянь (22)-(25), то достатньо встановити існування розв'язку даної системи.

Знайдемо оцінки розв'язків системи рівнянь (22)-(25). З (18) та припущень теореми випливає

$$v_0(x,y,t) \geq \iint_D G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0) \varphi_\xi(\xi,\eta) d\xi d\eta + \\ + \int_0^t \int_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau) b(\xi,\tau) \mu_{21_\xi}(\xi,\tau) d\xi d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau) b(\xi,\tau) \mu_{22_\xi}(\xi,\tau) d\xi d\tau \geq \\ \geq \min\{\min_D \varphi_x(x,y), \min_{[0,h]\times[0,T]} \mu_{21_x}(x,t), \min_{[0,h]\times[0,T]} \mu_{22_x}(x,t)\} \\ := M_1 > 0.$$

Аналогічно отримуємо

$$\begin{gathered} w_0(x,y,t) \geq \\ \geq \min\{\min_D \varphi_y(x,y), \min_{[0,l]\times[0,T]} \mu_{11_y}(y,t), \min_{[0,l]\times[0,T]} \mu_{12_y}(y,t)\} := M_2 > 0. \end{gathered}$$

Всі інші інтеграли, що входять до (22), (23), дорівнюють нулю при $t = 0$. Тому існує таке число $T_0 \in (0, T]$, що виконуються нерівності

$$\begin{aligned} &\Bigg| - \int_0^t \int_0^l G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11_\tau}(\eta,\tau) - f(0,\eta,\tau) - b(0,\tau)\mu_{11_{\eta\eta}}(\eta,\tau))d\eta d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^l G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12_\tau}(\eta,\tau) - f(h,\eta,\tau) - b(h,\tau)\mu_{12_{\eta\eta}}(\eta,\tau))d\eta d\tau + \\ &+ \int_0^t \iint_D G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) f_\xi(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau + \\ &+ \int_0^t \iint_D G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) b_\xi(\xi,\tau) w(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau \Bigg| \leq \frac{M_1}{2}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &\Bigg| - \int_0^t \int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)(\mu_{21_\tau}(\xi,\tau) f(\xi,0,\tau) - a(0,\tau)\mu_{21_{\xi\xi}}(\xi,\tau))d\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)(\mu_{22_\tau}(\xi,\tau) - f(\xi,l,\tau) - a(l,\tau)\mu_{22_{\xi\xi}}(\xi,\tau))d\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t \iint_D G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) f_\eta(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau + \\ &+ \int_0^t \iint_D G_{12_\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) a_\eta(\eta,\tau) v(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau \Bigg| \leq \frac{M_2}{2}, \end{aligned} \tag{28}$$

де $(x,y,t) \in \overline{Q}_{T_0}$. Тоді з (22), (23) випливають оцінки

$$\begin{aligned} &\frac{M_1}{2} \leq v(x,y,t) \leq \\ &\leq \frac{M_1}{2} + \max\{\max_D \varphi_x(x,y), \max_{[0,h]\times[0,T]} \mu_{21_x}(x,t), \max_{[0,h]\times[0,T]} \mu_{22_x}(x,t)\}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{gathered}\frac{M_2}{2} \le w(x,y,t) \le \\ \le \frac{M_2}{2} + \max\{\max_D \varphi_y(x,y), \max_{[0,l]\times[0,T]} \mu_{11_y}(y,t), \max_{[0,l]\times[0,T]} \mu_{12_y}(y,t)\}, \\ (x,y,t) \in \overline{Q}_{T_0}.\end{gathered} \tag{30}$$

Використовуючи їх в (24), (25), встановлюємо оцінки $a(y,t)$ та $b(x,t)$:

$$\begin{gathered}0 < A_0 \le a(y,t) \le A_1 < \infty, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T_0], \\ 0 < B_0 \le b(x,t) \le B_1 < \infty, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T_0],\end{gathered} \tag{31}$$

де сталі $A_k, B_k, k \in \{0,1\}$, визначаються відомими величинами.

Перейдемо до оцінок похідних $a_y(y,t), b_x(x,t)$. З (24), (25) знаходимо

$$a_y(y,t) = \frac{\mu_{31_y}(y,t)v(0,y,t) - \mu_{31}(y,t)v_y(0,y,t)}{v^2(0,y,t)}, \\ (y,t) \in [0,l] \times [0,T_0], \tag{32}$$

$$b_x(x,t) = \frac{\mu_{32_x}(x,t)w(x,0,t) - \mu_{32}(x,t)w_x(x,0,t)}{w^2(x,0,t)}, \\ (x,t) \in [0,h] \times [0,T_0]. \tag{33}$$

Диференціюванням рівнянь (22), (23) за змінними y та x, відповідно, отримуємо

$$v_y(x,y,t) = v_{0_y}(x,y,t) - \\ - \int_0^t \iint_D G_{21_{y\eta}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) b_\xi(\xi,\tau) w(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau, \tag{34}$$

$$w_x(x,y,t) = w_{0_x}(x,y,t) - \\ - \int_0^t \iint_D G_{12_{x\xi}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) a_\eta(\eta,\tau) v(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau, \ (x,y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{35}$$

Розглянемо інтеграл з (34) і подамо його у вигляді

$$\int_0^t \iint_D G_{21_{y\eta}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)b_\xi(\xi,\tau)w(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau =$$

$$= \int_0^t \iint_D G_{21_{y\eta}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)b_\xi(\xi,\tau)(w(\xi,\eta,\tau)-w(\xi,y,\tau))d\xi d\eta d\tau +$$

$$+ \int_0^t \iint_D G_{21_{y\eta}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)b_\xi(\xi,\tau)w(\xi,y,\tau)d\xi d\eta d\tau =$$

$$= \int_0^t \iint_D G_{21_{y\eta}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)b_\xi(\xi,\tau)d\xi d\eta d\tau \int_y^\eta w_s(\xi,s,\tau)ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h \big(G_{21_y}(x,y,t,\xi,l,\tau) - G_{21_y}(x,y,t,\xi,0,\tau)\big)b_\xi(\xi,\tau)w(\xi,y,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t \iint_D G_{21_{y\eta}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)b_\xi(\xi,\tau)d\xi d\eta d\tau \int_y^\eta w_s(\xi,s,\tau)ds.$$

Аналогічно маємо

$$\int_0^t \iint_D G_{12_{x\xi}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a_\eta(\eta,\tau)v(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau =$$

$$= \int_0^t \iint_D G_{12_{x\xi}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a_\eta(\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau \int_x^\xi v_s(s,\eta,\tau)ds.$$

Позначимо

$$A_2(t) := \max_{y\in[0,l]} |a_y(y,t)|, \quad V(t) := \max\{\max_{(x,y)\in\overline{D}} v_x(x,y,t), \max_{(x,y)\in\overline{D}} v_y(x,y,t)\},$$

$$B_2(t) := \max_{x\in[0,h]} |b_x(x,t)|, W(t) := \max\{\max_{(x,y)\in\overline{D}} w_x(x,y,t), \max_{(x,y)\in\overline{D}} w_y(x,y,t)\}.$$

Беручи до уваги оцінки функції Гріна [7, с.472]

$$|G_{12_{x\xi}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)| \le C_1 \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{C_2|x-\xi|^2}{t-\tau}\right),$$

з рівнянь (34), (35) знаходимо

$$
\begin{aligned}
&|v_y(x,y,t)| \le C_3 + \\
&\quad + C_4 \int\limits_0^t \iint\limits_D |G_{21_{y\eta}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)||y-\eta||b_\xi(\xi,\tau)|W(\tau)d\xi d\eta d\tau \le \\
&\quad \le C_3 + C_5 \int\limits_0^t \frac{B_2(\tau)W(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}},
\end{aligned} \tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
&|w_x(x,y,t)| \le C_6 + \\
&\quad + C_7 \int\limits_0^t \iint\limits_D |G_{12_{x\xi}}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)||x-\xi||a_\eta(\eta,\tau)|V(\tau)d\xi d\eta d\tau \le \\
&\quad \le C_6 + C_8 \int\limits_0^t \frac{A_2(\tau)V(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

З нерівностей (36), (37) випливає

$$
V(t) \le C_3 + C_5 \int\limits_0^t \frac{B_2(\tau)W(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0,T_0], \tag{38}
$$

$$
W(t) \le C_6 + C_8 \int\limits_0^t \frac{A_2(\tau)V(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0,T_0]. \tag{39}
$$

Беручи до уваги (29), (30), з (32), (33) встановимо оцінки

$$
A_2(t) \le C_9 + C_{10}V(t), \quad B_2(t) \le C_{11} + C_{12}W(t), \quad t \in [0,T_0], \tag{40}
$$

і підставимо їх у (38), (39). Після застосування нерівності Коші будемо мати

$$
V(t) \le C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t \frac{W^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0,T_0], \tag{41}
$$

$$
W(t) \le C_{15} + C_{16} \int\limits_0^t \frac{V^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0,T_0]. \tag{42}
$$

Позначимо $V_1(t) := V(t) + W(t)$. Зведемо (41), (42) до нерівності

$$
V_1(t) \le C_{17} + C_{18} \int\limits_0^t \frac{V_1^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0,T_0]. \tag{43}
$$

Підносячи до квадрату обидві частини цієї нерівності, застосовуючи нерівності Коші та Гельдера, отримаємо

$$\int_0^t \frac{V_1^2(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \le C_{19} + C_{20}\int_0^t V_1^4(\tau)d\tau, \quad t\in[0,T_0],$$

що дає змогу звести (43) до вигляду

$$V_1(t) \le C_{21} + C_{22}\int_0^t V_1^4(\tau)d\tau, \quad t\in[0,T_0]. \tag{44}$$

Аналогічно до [7, с.126] знаходимо

$$V_1(t) \le M_3 < \infty, \quad t\in[0,T_1], \tag{45}$$

де сталі $T_1 \in (0,T_0], M_3$ визначаються відомими величинами. Звідси та з (40) випливають такі оцінки:

$$\begin{array}{lll} |v_y(x,y,t)| \le M_3, & |w_x(x,y,t)| \le M_3, & (x,y,t)\in \overline{Q}_{T_1}, \\ |a_y(y,t)| \le A_3 < \infty, & (y,t)\in[0,l]\times[0,T_1], & \\ |b_x(x,t)| \le B_3 < \infty, & (x,t)\in[0,h]\times[0,T_1], & \end{array} \tag{46}$$

де сталі A_3, B_3 визначаються вихідними даними.

Позначимо $\mathcal{N} := \{(a(y,t),b(x,t)) \in C([0,l]\times[0,T_1])\times C([0,h]\times[0,T_1]) : |(a(y,t)| \le A_1, |(b(x,t)| \le B_1\}$. Подамо систему рівнянь (24), (25) у вигляді

$$\omega = P\omega, \tag{47}$$

де

$$P := (P_1,P_2), \quad \omega := (a(y,t),b(x,t)),$$

$$P_1(y,t) := \frac{\mu_{31}(y,t)}{v(0,y,t)}, \quad P_2(x,t) := \frac{\mu_{32}(y,t)}{w(x,0,t)},$$

а $v(x,y,t)$, $w(x,y,t)$ знаходяться як розв'язок системи (22), (23), у яку підставлені фіксовані функції $(a(y,t),b(x,t)) \in \mathcal{N}$. З оцінок (31) випливає, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Окрім того, з оцінок (46) маємо, що функції $a(y,t), b(x,t)$ задовольняють умову Гельдера з довільним фіксованим показником $\alpha\in(0,1)$:

$$|a(y_1,t)-a(y_2,t)| \le M_4|y_1-y_2|^\alpha, \quad \forall y_1,y_2\in[0,l], t\in[0,T_1],$$
$$|b(x_1,t)-b(x_2,t)| \le M_4|x_1-x_2|^\alpha, \quad \forall x_1,x_2\in[0,h], t\in[0,T_1]$$

зі сталою M_4, що визначається вихідними даними задачі. Беручи до уваги отримані нерівності та [7], робимо висновок, що оператор P є цілком неперервним на $\mathcal{N}$. Застосовуючи до рівняння (47) теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, встановлюємо існування неперервного розв'язку рівняння (47). Враховуючи (46), з (22), (23), (26) знаходимо функцію $u(x,y,t)$, яка разом зі знайденими додатними функціями $(a(y,t), b(x,t))$ утворює розв'язок задачі (1)-(6). Отже, доведено таку теорему:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A1)-(A3). Тоді можна вказати таке* $T_1 \in (0,T]$, *що задача (1)-(6) має розв'язок* $(a(y,t), b(x,t), u(x,y,t))$ *з класу* $C^{1,0}([0,l]\times[0,T_1])\times C^{1,0}([0,h]\times[0,T_1])\times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_1})$, *такий, що* $a(y,t) > 0, (y,t) \in [0,l]\times[0,T_1], b(x,t) > 0, (x,t) \in [0,h]\times[0,T_1]$.

5. Єдиність розв'язку задачі (1)-(6)

Теорема 2. *Нехай виконується припущення*

(A4) $\mu_{31}(y,t) \neq 0, (y,t) \in [0,l]\times[0,T], \mu_{32}(x,t) \neq 0, (x,t) \in [0,h]\times[0,T]$.

Тоді розв'язок (a,b,u) *задачі (1)-(6) єдиний у класі функцій* $C^{1,0}([0,l]\times[0,T])\times C^{1,0}([0,h]\times[0,T])\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(6) має два розв'язки $(a_i(y,t), b_i(x,t), u_i(x,y,t)), i \in \{1,2\}$ з класу $C^{1,0}([0,l]\times[0,T])\times C^{1,0}([0,h]\times[0,T])\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$. Позначимо $a := a_1 - a_2, b := b_1 - b_2, u := u_1 - u_2$. З (1)-(6) випливає, що трійка функцій (a,b,u) є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} u_t = a_1(y,t)u_{xx} + b_1(x,t)u_{yy} + \\ + a(y,t)u_{2_{xx}}(x,y,t) + b(x,t)u_{2_{yy}}(x,y,t), (x,y,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{48}$$

$$u(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{49}$$

$$u(0,y,t) = u(h,y,t) = 0, \quad (y,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{50}$$

$$u(x,0,t) = u(x,l,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,h]\times[0,T], \tag{51}$$

$$a(y,t)u_{2x}(0,y,t) = -\frac{a_1(y,t)a_2(y,t)}{\mu_{31}(y,t)}u_x(0,y,t), \quad (y,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{52}$$

$$b(x,t)u_{2y}(x,0,t) = -\frac{b_1(x,t)b_2(x,t)}{\mu_{32}(x,t)}u_y(x,0,t), \quad (x,t) \in [0,h]\times[0,T]. \tag{53}$$

Позначимо через $\tilde{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ функцію Гріна задачі (48)-(51). Вважаючи тимчасово відомими функції $a(y,t), b(x,t)$, з її допомогою знаходимо розв'язок задачі (48)-(51):

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = \int\limits_0^t \iint\limits_D \tilde{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times \\ \times (a(\eta,\tau)u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\eta,\tau) + b(\xi,\tau)u_{2_{\eta\eta}}(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau. \end{aligned} \tag{54}$$

Підставимо його в умови (52), (53):

$$a(y,t) = -\frac{a_1(y,t)a_2(y,t)}{\mu_{31}(y,t)} \int\limits_0^t \iint\limits_D \tilde{G}_{11x}(0,y,t,\xi,\eta,\tau)(a(\eta,\tau)u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\eta,\tau)+$$

$$+ b(\xi,\tau)u_{2_{\eta\eta}}(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{55}$$

$$b(x,t) = -\frac{b_1(x,t)b_2(x,t)}{\mu_{32}(x,t)} \int\limits_0^t \iint\limits_D \tilde{G}_{11y}(x,0,t,\xi,\eta,\tau)(a(\eta,\tau)u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\eta,\tau)+$$

$$+ b(\xi,\tau)u_{2_{\eta\eta}}(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T]. \tag{56}$$

Отримали систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегровними ядрами. Згідно з властивостями таких рівнянь маємо $a(y,t) \equiv 0, (y,t) \in [0,l] \times [0,T], b(x,t) \equiv 0, (x,t) \in [0,h] \times [0,T]$. Враховуючи це в задачі (48)-(51), отримуємо $u(x,y,t) \equiv 0, (x,y,t) \in \overline{Q}_T$. Теорему доведено. ■

1. *Саватеев Е.Г.* О задаче идентификации коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1995. – **36**, № 1. – С. 177–185.

2. *Ivantchov M.I.* Determination simultanee de deux coefficients aux variables diverses dans une equation parabolique // Мат. студії – 1998. – **10**, № 2. – С. 173-187.

3. *Іванчов М.І.* Обернена задача одночасного визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 319-325.

4. *Безнощенко Н.Я.* О существовании решения задач определения коэффициентов при старших производных параболических уравнений // Дифференц. уравн. – 1982. – **18**, № 6. – С. 996–1000.

5. *Безнощенко Н.Я.* Достаточные условия существования решения задач определения коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференц. уравн. – 1983. – **19**, № 11. – С. 1908–1915.

6. *Hussein M.S., Lesnic D.* Simultaneous determination of time and space-dependent coefficients in a parabolic equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – April 2016. – 33. – P. 194–217.

7. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Mathematical Studies. Monograph Series. Vol. 10. – Lviv : VNTL Publishers, 2003. – 240 p.

8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. : Наука, 1967. – 736 с.

Mykola Ivanchov, Natalia Kinash

INVERSE PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION WITH UNKNOWN TIME AND SPACE-DEPENDENT COEFFICIENTS

The paper deals with the inverse problem for the heat equation in a rectangle. The two elders coefficients depending on time and spatial variables are unknown. Using the Green function, the problem is reduced to the system integral equations, the study of which lead us to the conditions of existence and the uniqueness of the solution of the inverse problem.

УДК 517.956+517.958

Степан Івасишен[1,4] , Ігор Мединський[2] , Галина Пасічник[3]

ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З РІЗНИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ ТА ВИРОДЖЕННЯМИ

Наведено короткий огляд основних результатів, отриманих співробітниками Чернівецької філії Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. Результати стосуються широких класів рівнянь параболічного типу з різними особливостями та виродженнями. Вони отримані в рамках виконання науково-дослідних робіт, які виконувалися протягом 1988–2016 рр. під керівництвом професорів С. Д. Івасишена і Б. Й. Пташника.

З 1988 р. в Чернівцях працює філія Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. У 1988–1996 рр. філія мала статус структурного відділу крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а з 1996 р. – статус Чернівецької філії відділу математичної фізики, керівником якого до його передчасної кончини був професор Б. Й. Пташник.

З 1996 р. наукові дослідження співробітників філії виконувалися в рамках тематики відділу математичної фізики. Автори цієї статті брали активну участь у розробці окремих питань науково-дослідних робіт, якими керував Богдан Йосипович. У статті наводиться короткий огляд результатів, отриманих співробітниками Чернівецької філії з часу її заснування, який підводить певний підсумок плідного співробітництва з науковою школою Б. Й. Пташника. Цю статтю присвячуємо світлій пам'яті Б. Й. Пташника, відомого вченого, талановитого педагога, прекрасної душі людини та друга.

Головними об'єктами досліджень були задача Коші та деякі крайові задачі для параболічних (у різних сенсах) рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними за наявності різних вироджень та особливостей

[1] *Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського“, ivasyshen.sd@gmail.com*

[2] *Національний університет „Львівська політехніка“, i.p.medynsky@gmail.com*

[3] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, pasichnyk.gs@gmail.com*

[4] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, ivasyshen.sd@gmail.com*

(коли, наприклад, порушується умова рівномірної параболічності, коефіцієнти рівнянь є необмеженими в околі деяких точок чи на нескінченності, в рівняння входять псевдодиференціальні вирази, праві частини задачі мають різного роду особливості тощо). Для таких задач досліджувались питання коректної розв'язності, інтегрального зображення та властивостей розв'язків.

Основним поняттям у теорії задачі Коші є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК). Повнота й точність результатів дослідження такої задачі, як відомо, істотно залежить від того, наскільки повно й точно досліджений ФРЗК. Тому основні зусилля були спрямовані, в першу чергу, на побудову та встановлення точних оцінок і властивостей ФРЗК, а також вивчення властивостей відповідних інтегралів Пуассона та об'ємних потенціалів.

Дослідженням охоплені, головно, такі класи рівнянь і систем рівнянь:

1) параболічні за І. Г. Петровським та $\overrightarrow{2b}$-параболічні (параболічні за С. Д. Ейдельманом) системи з обмеженими коефіцієнтами та виродженнями на початковій гіперплощині (*С. Д. Івасишен, О. Г. Возняк, І. П. Мединський* [1–7]);

2) параболічні за І. Г. Петровським рівняння і системи з оператором Бесселя (*С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, Т. М. Балабушенко, Л. М. Мельничук* [8–11]);

3) параболічні за І. Г. Петровським та за С. Д. Ейдельманом системи зі зростаючими зі зростанням просторових змінних коефіцієнтами за відсутності та наявності вироджень на початковій гіперлощині (*С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник* [12–14]);

4) класи вироджених рівнянь, які є узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова і містять за основними змінними диференціальні вирази, параболічні за І. Г. Петровським та за С. Д. Ейдельманом (*С. Д. Івасишен, Л. М. Андросова, О. Г. Возняк, В. С. Дронь, В. В. Лаюк, Г. С. Пасічник, І. П. Мединський* [15–32]);

5) параболічні рівняння, які містять псевдодиференціальні вирази (*С. Д. Ейдельман, Я. М. Дрінь, В. В. Городецький, В. А. Літовченко* [33–40]).

Для перших чотирьох класів рівнянь і систем рівнянь розроблена теорія їх розв'язності за звичайних і вагових початкових умов та без початкових умов залежно від того, чи відсутні, а якщо присутні, то якого характеру, виродження на початковій гіперплощині. Зокрема, для однорідних слабко вироджених систем із першого класу, систем із другого класу, а також рівнянь із четвертого класу, коефіцієнти яких можуть залежати лише від часової змінної, і рівнянь із цього класу другого порядку із залежними від усіх змінних коефіцієнтами, знайдено необхідні й достатні умови того, що спеціально побудовані вагові L_p-простори функцій та відповідні простори узагальнених мір є множинами початкових значень і що розв'язки зображуються через їх початкові значення у вигляді інтегралів Пуассона. Останні результати є поширенням відповідних класичних результатів теорії гармонічних функцій на розв'язки вищевказаних рівнянь і систем рівнянь. Зазначимо, що в рамках розробленої теорії для систем з першого класу доведено теореми про апріорні оцінки та підвищення гладкості розв'язків, коректну розв'язність лінійних систем, а також локальну розв'язність квазілінійних систем.

У рамках досліджень рівнянь з четвертого класу, коефіцієнти яких залежать від усіх змінних, побудовано та вивчено властивості дещо ослабленого порівняно з класичним L-ФРЗК, коли в рівнянні вираз, що містить похідну за t і похідні за змінними з груп виродження, тлумачиться як похідні за С. Лі. Для рівнянь другого порядку з однією групою змінних виродження в [27,29,30] знайдено умови на коефіцієнти, за яких побудовано класичний ФРЗК, одержано точні оцінки його похідних та їх приростів за просторовими змінними. При цьому використано запропоновану раніше авторами модифікацію класичного методу Леві, яка є фактично поетапним застосуванням методу параметриксу Леві.

Для випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу ультрарозподілів Жевре, доведено теореми про однозначну розв'язність та властивості локалізації розв'язків задачі Коші для еволюційних параболічних рівнянь, параболічних за Г. Є. Шиловим та за І. Г. Петровським рівнянь з виродженнями на початковій гіпершющині й параболічних за І. Г. Петровським рівнянь з оператором Бесселя (*В. В. Городецький, І. В. Житарюк* [41–43]), а також вироджених рівнянь типу А. М. Колмогорова (*С. Д. Івасишен, Л. М. Андросова* [44]).

У працях [45, 46] *С. Д. Івасишена* та *В. А. Літовченка* означено нові широкі класи вироджених рівнянь, які є узагальненнями рівнянь із четвертого класу, та розроблено методику дослідження задачі Коші для них у випадку, коли початкові дані можуть бути узагальненими функціями типу розподілів Жевре.

Значна увага приділялась дослідженням рівнянь із п'ятого класу. Для рівномірно параболічних за І. Г. Петровським систем псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами побудовано ФРЗК та досліджено його властивості (*С. Д. Ейдельман, Я. М. Дрінь* [33, 34]). Для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком і деяких параболічних псевдодиференціальних рівнянь з неоднорідними символами досліджена асимптотична поведінка ФРЗК та встановлена єдиність слабких невід'ємних розв'язків задачі Коші (*С. Д. Ейдельман, Р. Я. Дрінь* [35, 36])

В. В. Городецьким [37, 38] розглянуто задачу Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у випадку, коли початкові дані є узагальненими періодичними функціями, означено клас псевдодиференціальних операторів, який містить оператори дробового диференціювання в просторі узагальнених періодичних функцій, і з його допомогою – відповідний клас параболічних псевдодиференціальних рівнянь. Для таких рівнянь установлено однозначну розв'язність задачі Коші та вивчено питання про граничні значення розв'язків. Розглянуто також задача Коші в банахових просторах періодичних функцій. Ряд важливих результатів В. В. Городецького стосуються загального вигляду всіх гладких розв'язків спеціальних класів параболічних рівнянь, які містять оператори дробового диференціювання. Описано множини початкових значень таких розв'язків, установлено коректну розв'язність задачі Коші для вказаних рівнянь з початковими даними в просторах узагальнених функцій скінченного та нескінченного порядків.

В. А. Літовченком [39, 40] означено клас параболічних псевдодиференціальних систем рівнянь з опуклими цілими аналітичними символами, який охоплює $\overrightarrow{2B}$-параболічні системи рівнянь із частинними похідними з коефіцієнтами, не залежними від просторової змінної. Для систем з такого класу встановлено коректну розв'язність задачі Коші у випадку узагальнених початкових функцій типу ультрарозподілів Жевре та описано всі граничні значення гладких розв'язків, які мають характерні для їх фундаментальних матриць розв'язків властивості.

Крім вищенаведених проводились й інші дослідження.

Так, окремі питання якісної теорії розв'язків параболічних та еліптичних систем вивчали *С. Д. Ейдельман і Л. М. Івасишин.* Перший автор досліджував властивості додатних слабких розв'язків параболічних за І. Г. Петровським систем дивергентної структури. Друга авторка встановила спеціальні L_1-оцінки класичних розв'язків загальних параболічних у сенсі І. Г. Петровського систем і деяких еліптичних систем зі структурою лінеаризованої стаціонарної системи Нав'є–Стокса. Такі оцінки цікаві й самі по собі, й своїми змістовними застосуваннями в якісній теорії додатних розв'язків.

Вивчались також питання стабілізації розв'язків. *В. В. Городецьким* знайдено умови слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для деяких параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами, а *С. Д. Ейдельманом* – умови, за яких стабілізуються обмежені розв'язки крайових задач для системи рівнянь тепло- і масообміну, при цьому дано повний опис ядер Пуассона цих задач.

М. І. Матійчуком доведено теорему про коректну розв'язність і побудовано матрицю Ґріна параболічних крайових задач з оператором Бесселя в рівняннях і крайових умовах, при цьому досліджено властивості ядер Пуассона відповідних модельних задач.

Зауважимо, що більшість вищеназваних результатів увійшли повністю або частково до монографій [38, 47–50], а огляди результатів з окремих питань містяться в статтях [51–54].

1. *Ивасишен С.Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 500–506.

2. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України. – 1994. – № 6. – С. 7–11.

3. *Возняк О.Г.* Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали міжнародної математичної конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці : Рута, 1995. – С. 42–60.

4. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Властивості інтегралів типу похідних від об'ємних потенціалів для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 76–86.

5. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 15–24.

6. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Локальна розв'язність задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 110–114.

7. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Апріорні оцінки розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині та їх застосування // Нелінійний аналіз: праці Укр. мат. конгресу–2001. – Київ : Ін-т математики НАН України, 2006. – С. 28–41.

8. *Ивасишен С.Д., Лавренчук В.П.* Об интегральном представлении решений параболической системы линейных уравнений с оператором Бесселя // Нелинейные граничные задачи: Респ. межвед. сб. науч. тр. – 1992. – Вып. 4. – С. 19–25.

9. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 288. Математика. – Чернівці : Рута, 2006. – С. 5–11.

10. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 314–315. Математика. – Чернівці : Рута, 2006. – С. 7–16.

11. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Інтегральне зображення розв'язків деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького

ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 336–337. Математика. – Чернівці : Рута, 2007. – С. 7–15.

12. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1484–1496.

13. *Пасічник Г.С.* Про задачу Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С.138–143.

14. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Задача Коші для рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова багатовимірного нормального марковського процесу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 15–22.

15. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении и начальных значениях решений некоторых вырождающихся параболических уравнений // Докл АН УССР. Сер. А – 1989. – № 1. – С. 16–19.

16. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 479–487.

17. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11–16.

18. *Дронь В.С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці : Рута, 2000. – С. 32–41.

19. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. вісник. – 2004. – **1**, № 1. – С. 61–68.

20. *Лаюк В.В.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 239. Математика. – Чернівці : Рута, 2005. – С. 82–85.

21. *Івасишен С.Д., Лаюк В.В.* Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 56–65.

22. *Івасишен С.Д., Лаюк В.В.* Характеризація розв'язків одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. вісник. – 2010. – **7**, № 1. – С. 1–38.

23. *Івасишен С.Д., Лаюк В.В.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1469–1500.

24. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В.А. Михайлець.– 2014. – **11**, № 2. – С. 126–153.

25. *Івасишен С., Пасічник Г.* Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. – 2014. – **11**. – С. 73–87.

26. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: зб. праць Ін-ту математики НАН України. / Відп. ред. В.А. Михайлець. – 2015. – **12**, № 2. – С. 205–229.

27. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2**, № 2–3. – С. 94–106.

28. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2015. – **3**, № 3–4. – С. 41–51.

29. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В.А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.

30. *Івасишен С.Д., Мединський І.П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 2. – С. 28–42.

31. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Властивості об'ємного потенціалу для одного класу ультрапараболічних рівнянь довільного порядку // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3–4. – С. 47–56.

32. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Властивості об'ємного потенціалу для вироджених $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь типу Колмогорова // Буков. мат. журн. – 2017. – **5**, № 1–2. – С. 80–86.

33. *Дрінь Я.М., Ейдельман С.Д.* До теорії систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 10–12.

34. *Дрінь Я.М., Ейдельман С.Д.* Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних параболічних систем з негладкими символами // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: зб. наук. праць. – Чернівці. – 1990. – С. 21–31.

35. *Eidelman S.D., Drin R. Ya.* About properties of the solutions of diffusion equations with the pseudodifferential summand // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 9–12.

36. *Дрінь Р.Я., Ейдельман С.Д.* Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком // Матеріали міжнародної математичної конф., присвяченої пам'ті Ганса Гана. – Чернівці : Рута, 1995. – С. 78–88.

37. *Городецький В.В., Дрінь Я.М.* Параболічні псевдодиференціальні рівняння у просторах узагальнених періодичних функцій // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 8. – С. 18–22.

38. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці : Рута, 1993. – 219 с.

39. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем з цілими аналітичними символами диференціювання // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1211–1233.

40. *Літовченко В.А.* Задача Коші для сингулярних псевдодиференціальних систем параболічного типу // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4**, № 1. – С. 21–55.

41. *Городецкий В.В., Житарюк И.В.* О скорости локализации решений задачи Коши для уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 4. – С. 697–699.

42. *Городецький В.В., Житарюк І.В.* Задача Коші для одного класу параболічних систем з оператором Бесселя в просторах узагальнених функцій // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 7. – С. 20–23.

43. *Городецкий В.В., Житарюк И.В.* О разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений параболического типа с вырождением в некоторых пространствах // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 8. – С. 1373–1381.

44. *Івасишен С.Д., Андросова Л.М.* Принцип локалізації для розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: зб. наук. праць. – Чернівці, 1990. – С. 48–61.

45. *Івасишен С.Д., Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 8. – С. 1066–1087.

46. *Івасишен С.Д., Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з недодатним родом // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 10. – С. 1330–1350.

47. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel : Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152).

48. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев : Штиинца, 1992. – 328 с.

49. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці : Рута, 1998. – 225 с.

50. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ : Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

51. *Ivasyshen S.D., Medynsky I.P.* The Fokker–Planck–Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes // Theory Stoch. Processes. – 2010. – **16(32)**, № 1. – P. 57–66.

52. *Мединський І.П.* Дослідження С.Д. Ейдельмана нелінійних задач та їх розвиток // Наук. вісник Чернівець. нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. математика: зб. наук. праць.– **1**, № 1–2. – Чернівці : Чернівець. нац. ун-т, 2011. – С. 114–128.

53. *Івасишен С.Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // Мат. студії. – 2013. – **40**, № 2. – С. 172–181.

54. *Івасишен С.Д., Мединський І.П., Пасічник Г.С.* Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3–4. – С. 57–68.

Stepan Ivasyshen, Ihor Medynsky, Halyna Pasichnyk

PARABOLIC EQUATIONS WITH DIFFERENT SINGULARITIES AND DEGENERATIONS

A brief overview of the main results which obtained by research workers of Chernivtsi Branch of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Science of Ukraine is given. The results relate to wide classes of equations of the parabolic type with different degenerations and singularities. These results were obtained through research that carried out during 1988–2016 under the direction of professor S. D. Ivasyshen and professor B. Yo. Ptashnyk.

УДК 517.96

Володимир Ільків[1]

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИЩИМИ ПОХІДНИМИ В УМОВАХ

Досліджено задачу з нелокальними двоточковими умовами за часовою координатою для систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Знайдено необхідні і достатні умови існування розв'язку цієї задачі у класі періодичних за просторовими змінними функцій. Вивчено асимптотичні властивості розв'язку та встановлено фредгольмовість задачі та ізоморфізм оператора нелокальних умов.

1. Вступ

Нелокальні умови (зокрема, багатоточкові та інтегральні) для рівнянь із частинними похідними часто зустрічаються у математичних моделях багатьох фізичних, біологічних і технічних процесів.

Задачі з нелокальними умовами, взагалі, є некоректними за Адамаром і пов'язані з проблемою малих знаменників, в якій проявляються діофантові властивості параметрів задачі. Метричний підхід до вивчення нелокальних задач у соболєвських (та інших) шкалах періодичних, майже періодичних функцій застосовано у роботах [1, 2].

Результати вивчення задач з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними опубліковано у багатьох роботах, зокрема [3–17].

Прикладами нелокальних задач для гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

є некоректна задача з інтегральною умовою

$$\int_0^T u(t,x)\,dt = \varphi(x),$$

де T — ірраціональне число, у шкалі просторів Соболєва функцій періодичних за змінною x. Узагальнений розв'язок у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{ik\varphi_k}{1-e^{-ikT}} e^{ik(x-t)}$$

[1] *Національний університет „Львівська політехніка“, ilkivv@i.ua*

такої задачі для деяких значень T не належить до шкали просторів Соболєва для довільної функції φ з цієї шкали, яка не є тригонометричним многочленом, оскільки послідовність $\left|1-e^{-ikT}\right|$ може як завгодно швидко наближатися до нуля.

Задача стає коректною у соболєвській шкалі, якщо використати таку інтегральну умову:

$$\int_0^T tu(t,x)\,dt = \varphi(x).$$

Вона має розв'язок у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k^2\varphi_k}{1+(ikT-1)e^{-ikT}} e^{ik(x-t)},$$

у якому для всіх $T>0$ норми дільників не менші $|k|T/2$, якщо $|k|\geq 4/T$.

Коректною є також двоточкова задача з умовою

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} + u|_{t=T} = \varphi(x),$$

що містить похідну за змінною t, як і рівняння $(\partial/\partial t)u + (\partial/\partial x)u = 0$, оскільки її розв'язок

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\varphi_k}{e^{-ikT}-ik} e^{ik(x-t)}$$

для всіх t належить простору Соболєва, якщо φ належить простору Соболєва.

З іншого боку, двоточкова задача з умовою

$$u|_{t=0} + u|_{t=T} = \varphi(x)$$

є знову некоректною зважаючи на її розв'язок

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\varphi_k}{1+e^{-ikT}} e^{ik(x-t)},$$

в якому присутні малі знаменники $1+e^{-ikT}$, тому їх послідовність має нуль точкою скупчення.

У цій роботі для систем рівнянь із частинними похідними розглядається крайова задача з нелокальними двоточковими умовами на часовому проміжку, які містять похідні порядку не нижчого, ніж у системі. Вивчається залежність розв'язності задачі від довжини цього проміжку та її коректність у соболєвській шкалі періодичних за просторовими змінними функцій, а також досліджуються властивості фредгольмовості та ізоморфності. Результати доповнюють твердження робіт [14–16].

2. Постановка задачі

У цьому пункті введено область, у якій розглядається задача, систему рівнянь із частинними похідними n-го порядку та нелокальні двоточкові умови з вищими похідними порядку $n+l$, де $l \geq 0$, простори періодичних вектор-функцій і дано означення розв'язку.

Нехай $Q_p = [0,T] \times \Omega^p$ — циліндр, Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, де $p \in \mathbb{N}$, $0 < T_0 \leq T \leq T_1 < +\infty$, і нехай $t \in [0,T]$, $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega^p$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_p})$ та $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$ для $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$.

В області Q_p для $n \geq 2$ розглядається задача для системи диференціальних рівнянь

$$L_n(\partial_t, \partial_x)u \equiv \partial_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(\partial_x)\partial_t^{n-j} u = 0 \tag{1}$$

з нелокальною за змінною t векторною умовою

$$\sum_{j=0}^{l+n} B_{0j}(\partial_x)\partial_t^{l+n-j} u\big|_{t=0} + \sum_{j=1}^{l+n} B_j(\partial_x)\partial_t^{l+n-j} u\big|_{t=T} = \varphi, \tag{2}$$

де диференціальні вирази

$$A_j(\partial_x) = \sum_{|s| \leq j} A_{js}\partial_x^s, \quad B_{0j}(\partial_x) = \sum_{|s| \leq j} B_{0j}^s \partial_x^s, \quad B_j(\partial_x) = \sum_{|s| \leq j} B_j^s \partial_x^s$$

мають комплексні матричні порядку m коефіцієнти A_{js} і матричні коефіцієнти B_{0j}^s, B_j^s розміру $nm \times m$. Праву частину $\varphi = \varphi(x) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ в умові (2) і шуканий розв'язок $u = u(t,x) = (u_1, \dots, u_m)$ задачі (1), (2) вважаємо 2π-періодичними за змінною x векторами розміру nm і m.

Нехай $\tilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2}$, а $\mu_j = \mu_j(k)$ — всі корені рівняння

$$\det \sum_{j=0}^{n} A_j(ik)\lambda^{n-j} \equiv \det L_n(i\tilde{k}\mu, ik) = 0, \tag{3}$$

де $A_0(ik) = I_m$ (I_m — одинична матриця порядку m); позначимо

$$\lambda_j = \lambda_j(k) = i\tilde{k}\mu_j(k), \qquad j = 1, \dots, nm. \tag{4}$$

Припускаємо існування додатних чисел $K \geq 1$, $R \geq 1$, μ_0, μ_-, μ^+ таких, що корені μ_j у разі $\tilde{k} \geq K$ задовольняють такі нерівності:

$$\left|e^{\lambda_j(k)T}\right| \leq R, \qquad |\mu_\alpha(k) - \mu_\beta(k)| \geq \mu_0, \qquad \mu_- \leq |\mu_j(k)| \leq \mu^+. \tag{5}$$

Зокрема, числа $R = R(\vec{a})$, $\mu_0 = \mu_0(\vec{a})$ та $\mu^+ = \mu^+(\vec{a})$ існують для строго гіперболічної системи (тут μ_0 — стала гіперболічності) та для довільного вектора $\vec{a}$, складеного з усіх коефіцієнтів системи (1).

З умови (5) випливає, що корені $\mu_j(k)$ — прості та відмінні від нуля для множини векторів k, які не належать кулі $\{k \in \mathbb{Z}^p \colon \tilde{k} < K\}$.

Нехай $\mathbf{H}$ — простір m-вимірних векторів, компоненти яких є тригонометричними 2π-періодичними многочленами (простір основних функцій), а $\mathbf{H}'$ — спряжений з ним простір узагальнених 2π-періодичних вектор-функцій (формальних тригонометричних рядів).

Нехай $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega^p)$ — простір Соболєва 2π-періодичних за $x_1, \dots, x_p$ вектор-функцій $v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k e^{ik\cdot x}$, $v_k \in \mathbb{C}^m$, що утворений поповненням простору $\mathbf{H}$ за нормою $\|v; \mathbf{H}_q\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q} \|v_k\|^2\Big)^{1/2}$, де $\|\cdot\|$ — евклідова норма, $k\cdot x = k_1x_1 + \dots + k_px_p$. Включення $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}_q \subset \mathbf{H}'$ просторів є неперервними для всіх чисел $q \in \mathbb{R}$.

Позначимо $\mathbf{H}_q^{n+l} = \mathbf{H}_q^{n+l}(Q_p)$ — банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що $\partial_t^j u \in \mathbf{C}([0,T]; \mathbf{H}_{q-j})$ для $j = 1, \dots, n+l$ та введемо норму $\|u; \mathbf{H}_q^{n+l}\| = \big(\sum_{j=0}^{n+l} \max_{t\in[0,T]} \|\partial_t^j u(t,\cdot); \mathbf{H}_{q-j}\|^2\big)^{1/2}$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі* (1), (2) *називається елемент* $u \in \mathbf{C}^{n+l}([0,T]; \mathbf{H}')$, *який задовольняє на* $(0,T)$ *систему диференціальних рівнянь* (1) *і нелокальні умови* (2) *у просторі* $\mathbf{H}'$.

Означення 2. *Розв'язком задачі* (1), (2) *називається такий її узагальнений розв'язок, який належить до простору* $\mathbf{H}_q^{n+l}$.

З означення 9 випливає, що *необхідною* умовою існування розв'язку задачі (1), (2) є умова належності векторів $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (компонент вектора φ) до простору $\mathbf{H}_{q-n-l}$.

Задача (1), (2), взагалі, є некоректною за Адамаром [1, 2] у шкалі $\{\mathbf{H}_q\}_{q\in\mathbb{R}}$ (як і в інших шкалах, пов'язаних з простором $\mathbf{H}'$).

Якщо ж справджується умова (5), то задача коректна у цій шкалі, що і доведено у роботі.

3. Розв'язки звичайних диференціальних рівнянь

У цьому пункті розглянуто задачі з нелокальними умовами для системи звичайних диференціальних рівнянь, які містять векторний параметр k, що пов'язані із задачею (1), (2).

Оскільки розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{ik\cdot x}, \tag{6}$$

то функція $u_k = u_k(t)$ є розв'язком задачі

$$L_n\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big)u_k = 0, \tag{7}$$

$$B_{00}u_k^{(l+n)}(0) + \sum_{j=1}^{l+n}\big[B_{0j}(ik)u_k^{(l+n-j)}(0) + B_j(ik)u_k^{(l+n-j)}(T)\big] = \hat{\varphi}_k, \tag{8}$$

тут $\hat{\varphi}_k$ — коефіцієнти Фур'є вектор-функції φ.

Для визначення функцій u_k, $k \in \mathbb{Z}^p$, зробимо заміну

$$v_k \equiv v_k(t) = \mathrm{col}(v_{jk})_{j=1,\dots,n} = \mathrm{col}\big((i\tilde{k})^{n+1-j}u_k^{(j-1)}\big)_{j=1}^n \tag{9}$$

і запровадимо nm-матрицю $L(k)$, де

$$L(k) = \mathrm{col}\Big(\big(0 \quad I_{(n-1)m}\big), \Big(\frac{-A_{n+1-j}(ik)}{(i\tilde{k})^{n+1-j}}\Big)_{j=1}^n\Big), \tag{10}$$

з власними значеннями $\mu_1, \dots, \mu_{nm}$ і рівномірно обмеженою нормою

$$\|L(k)\|^2 \le (n-1)m + A^2(K_1), \quad A^2(K_1) = \sum_{j=1}^n \sum_{|s|\le j} K_1^{2(|s|-j)}\|A_{js}\|^2, \tag{11}$$

у разі $\tilde{k} \ge K_1 \ge K$ (функція $A(K_1)$ монотонно спадає до граничного значення $A_0 \equiv A(\infty) = \Big(\sum_{j=1}^n \sum_{|s|=j}\|A_{js}\|^2\Big)^{1/2}$).

Тоді v_k — розв'язок двоточкової задачі для системи першого порядку

$$\begin{aligned} &v_k' = i\tilde{k}L(k)v_k,\\ &v_k^{(l+1)}(0) + i\tilde{k}\mathbf{B}_0^{-1}\sum_{j=1}^{l+1}\big[\mathbf{B}_j^*(k)Z_k^{-1}v_k^{(l+1-j)}(0) + \\ &\qquad\qquad + \mathbf{B}_j(k)Z_k^{-1}v_k^{(l+1-j)}(T)\big] = i\tilde{k}\mathbf{B}_0^{-1}\hat{\varphi}_k \equiv \hat{\varphi}_k^*, \end{aligned} \tag{12}$$

де $\mathbf{B}_{l+1}^*(k) = \big(B_{l+n}^*(k)\dots B_{l+1}^*(k)\big)$, $\mathbf{B}_{l+1}(k) = \big(B_{0,l+n}(ik)\dots B_{0,l+1}(ik)\big)$, $\mathbf{B}_j^*(k) = \big(0_{nm\times(n-1)m}\ B_j^*(k)\big)$, $\mathbf{B}_j(k) = \big(0_{nm\times(n-1)m}\ B_j(ik)\big)$ у разі $l > 0$ для інших значень j, а $\mathbf{B}_0 = \big(I_m^\top(1)\dots I_m^\top(n-1)\ B_{00}\big)$. Матриці $B_j^*(k)$ визначаються формулами $B_j^*(k) = B_{0j}(ik) - (i\tilde{k})^j I_m^\top(n-j)$ для $j = 1,\dots,n-1$ та $B_j^*(k) = B_{0j}(ik)$ для $j = n,\dots,l+n$, а прямокутні матриці $I_m(j)$ складаються з m рядків та утворюють горизонтальне розбиття одиничної матриці I_{nm}, тобто $I_{nm} = \mathrm{col}\big(I_m(1),\dots,I_m(n)\big)$. Для $n = 1$ маємо $\mathbf{B}_0 = B_{00}$ і $B_j^*(k) = B_{0j}(ik)$, де $j = 1,\dots,l+1$.

Для оцінювання розв'язку $v_k = v_k(t)$, який містить функції від $L(k)$, доцільно подати останні у спеціальній формі [2]. Нехай матриця $L(k)$

має прості власні значення $\mu_1 = \mu_1(k), \dots, \mu_{nm} = \mu_{nm}(k)$ і функція $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ визначена в околі цих значень, $C \in \mathbb{C}^{nm}$ — довільний вектор, тоді

$$S\big(L(k)\big)C = \mathbf{R}_k\big(C\big)W^{-\top}(k)\begin{pmatrix} S(\mu_1) \\ \dots \\ S(\mu_{nm}) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

де $W^{-\top}(k)$ — обернена до транспонованої $W^{\top}(k)$ матриці Вандермонда $W(k) = \big(\mu_j^{i-1}\big)_{i,j=1,\dots,nm}$, $\mathbf{R}_k(C) = \big(C \; L(k)C \; \dots \; L^{nm-1}(k)C\big)$ — матриця керованості (див. [17, с. 135] та [18, с. 123]) лінійної неоднорідної системи $v_k' = L(k)v_k + Ch_k$, в якій $h_k = h_k(t)$ — скалярне керування.

Теорема 1. *Для довільного $K_1 \geq K$ і для довільної матриці F з nm стовпцями функція $S\big(L(k)\big)$ з матричним аргументом $L(k)$ для $C \in \mathbb{C}^{nm}$ і $\tilde{k} \geq K_1$ справджує оцінки*

$$\begin{aligned} \big\|FS\big(L(k)C\big)\big\| &\leq \mu nm\big\|F\mathbf{R}_k(C)\big\| \max_{j=1,\dots,nm}\big|S(\mu_j)\big|, \\ \big\|S\big(L(k)\big)\big\| &\leq \mu nm R_1(K_1) \max_{j=1,\dots,nm}\big|S(\mu_j)\big|, \end{aligned} \tag{14}$$

де $\mu = \big((1+\mu^+)/\mu_0\big)^{nm-1}$ *і* $R_1^2(K_1) = \sum_{j=1}^{nm}\big((n-1)m + A^2(K_1)\big)^{j-1}$.

Доведення. Із формули (13) випливає оцінка

$$\big\|FS\big(L(k)\big)C\big\| \leq (nm)^{1/2}\big\|F\mathbf{R}_k(C)\big\|\big\|W^{-\top}(k)\big\| \max_{j=1,\dots,nm}\big|S(\mu_j)\big|,$$

а з формули (11) – нерівність

$$\big\|\mathbf{R}_k(C)\big\|^2 = \sum_{j=1}^{nm}\big\|L^{j-1}(k)C\big\|^2 \leq \|C\|^2\sum_{j=1}^{nm}\big\|L(k)\big\|^{2j-2} \leq R_1^2(K_1)\|C\|^2.$$

Тепер оцінки (14) є наслідком нерівності $\|W^{-\top}(k)\| \leq \mu\sqrt{nm}\mu$. Вона є результатом застосування таких двох формул :

$$\|W^{-1}(k)\|^2 \leq nm\,\|W^{-1}(k)\|_\infty^2, \quad \|W^{-1}(k)\|_\infty \leq \max_{\alpha=1,\dots,nm}\prod_{j=1,j\neq\alpha}^{nm}\frac{1+|\mu_j|}{|\mu_\alpha - \mu_j|}$$

із роботи [21, p. 108, 109, 417]. ■

На основі формул (5) і (14), де $S(z) = (i\tilde{k}z)^{j-l-1}e^{i\tilde{k}zt}$, отримуємо оцінку для розв'язку $v_k = E_k(t)C_k$ системи $v_k' = i\tilde{k}L(k)v_k$:

$$\|Fv_k^{(j)}(t)\| \leq \frac{\mu nmR}{(\tilde{k}\mu_-)^{l-j+1}}\big\|F\mathbf{R}_k(C_k)\big\|, \quad k \geq K_1, \quad 0 \leq j \leq l+1, \tag{15}$$

де $t \in [0,T]$, а $C_k \in \mathbb{C}^{nm}$.

Розв'язки системи (7) і системи з формули (12) пов'язують згідно зі заміною (9) співвідношення

$$(i\tilde{k})^{q-j}u_k^{(j)}(t) = \begin{cases} (i\tilde{k})^{q-n}v_{j+1,k}(t), & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ (i\tilde{k})^{q-j-1}v_{nk}^{(j-n+1)}(t), & j = n, \dots, n+l, \end{cases}$$

тому, посилаючись на теорему 1, маємо

$$\begin{aligned} \left\|u_k^{(j)}(t)\right\| &\le \tilde{k}^{j-n-l-1}\frac{\mu nmR}{\mu_-^{l+1}}\left\|I_m(j+1)\mathbf{R}_k(C_k)\right\|, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \left\|u_k^{(j)}(t)\right\| &\le \tilde{k}^{j-n-l-1}\frac{\mu nmR}{\mu_-^{l+n-j}}\left\|I_m(n)\mathbf{R}_k(C_k)\right\|, \qquad j = n, \dots, n+l. \end{aligned} \tag{16}$$

4. Дослідження узагальнених розв'язків

У цьому пункті введено позначення, сформульовано та доведено теорему про єдиність і теорему про існування узагальнених розв'язків задачі (1), (2), зокрема, подано зображення цих розв'язків.

Використаємо фундаментальну матрицю E_k та характеристичну матрицю M_k, покладаючи

$$\begin{aligned} &E_k \equiv E_k(t) = \big(i\tilde{k}L(k)\big)^{-l-1}e^{i\tilde{k}L(k)t}, \ \tilde{k} \ge K, \quad E_k = e^{i\tilde{k}L(k)t}, \ \tilde{k} < K, \\ &M_k = E_k^{(l+1)}(0) + i\tilde{k}\mathbf{B}_0^{-1}\sum_{j=1}^{l+1}\big[\mathbf{B}_j^*(k)Z_k^{-1}E_k^{(l+1-j)}(0) + \\ &\qquad\qquad + \mathbf{B}_j(k)Z_k^{-1}E_k^{(l+1-j)}(T)\big]. \end{aligned} \tag{17}$$

Введемо проектори $P_k = M_k^- M_k$ та $Q_k = M_k M_k^-$, що діють у просторі $\mathbb{C}^{nm}$, де M_k^- — псевдообернена [19, p. 428] до M_k матриця (для невиродженої матриці M_k маємо $M_k^- = M_k^{-1}$ і $P_k = Q_k = I_{nm}$), а також проектори P та Q, що діють на функції $\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat{\psi}_k e^{ik\cdot x}$, де $\hat{\psi}_k \in \mathbb{C}^{nm}$, за правилами

$$P\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} P_k\hat{\psi}_k e^{ik\cdot x}, \qquad Q\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} Q_k\hat{\psi}_k e^{ik\cdot x}. \tag{18}$$

Теорема 2. *Розв'язок задачі* (12) *існує тоді і тільки тоді, коли* $(I_{nm} - Q_k)\hat{\varphi}_k^* = 0$*; він має вигляд*

$$v_k = E_k(t)M_k^-\hat{\varphi}_k^* + E_k(t)(I_{nm} - P_k)U_k, \tag{19}$$

де U_k *— довільний вектор з простору* $\mathbb{C}^{nm}$*.*

Доведення. У разі $M_k C_k = \hat{\varphi}_k^*$ загальний розв'язок $v_k = E_k(t) C_k$ системи $v_k' = i\tilde{k} L(k) v_k$ задовольняє нелокальну умову (12), тобто є шуканим розв'язком.

Оскільки $M_k C_k - \hat{\varphi}_k^* = M_k C_k - Q_k \hat{\varphi}_k^* + (Q_k - I_{nm}) \hat{\varphi}_k^*$, то, на основі формули

$$(I_{nm} - Q_k^H) M_k = M_k^H (I_{nm} - Q_k) = 0, \tag{20}$$

яка випливає [20, с. 123] з властивостей $Q_k M_k = M_k$ і $Q_k^H = Q_k$, де матриця Q_k^H ермітово спряжена з Q_k, отримуємо рівність

$$\|M_k C_k - \hat{\varphi}_k^*\|^2 = \|M_k C_k - Q_k \hat{\varphi}_k^*\|^2 + \|(I_{nm} - Q_k) \hat{\varphi}_k^*\|^2.$$

Якщо $(I_{nm} - Q_k) \hat{\varphi}_k^* \neq 0$, то $\|M_k C_k - \hat{\varphi}_k^*\|^2 \geq \|(I_{nm} - Q_k) \hat{\varphi}_k^*\|^2 > 0$ для довільного вектора C_k, зокрема $M_k C_k \neq \hat{\varphi}_k^*$, тобто розв'язок задачі (12) не існує.

У протилежному випадку, система $M_k C_k = \hat{\varphi}_k^*$ еквівалентна зі системою $M_k C_k = Q_k \hat{\varphi}_k^* + M_k (I_{nm} - P_k) U_k$, яка має [19, с. 436] загальний розв'язок

$$C_k = M_k^- \hat{\varphi}_k^* + (I_{nm} - P_k) U_k,$$

де $(I_{nm} - P_k) U_k$ — ядро матриці M_k.

Звідси випливає (19). Теорему доведено. ■

Встановимо теорему існування узагальненого розв'язку задачі (1), (2), яка справджується для довільного вектора коефіцієнтів $\vec{a}$.

Теорема 3. *Узагальнений розв'язок u задачі* (1), (2) *існує тоді і тільки тоді, коли справджується умова* $(I - Q) \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \tilde{\varphi}_k^* e^{ik \cdot x} = 0$. *Його зображує формула* $u = I_m(1) \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} (i\tilde{k})^{-n} v_k^* e^{ik \cdot x}$, *якщо*

$$v = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} v_k e^{ik \cdot x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} E_k(t) M_k^- \hat{\varphi}_k^* e^{ik \cdot x} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} E_k(t) \big((I - P)U\big)_k e^{ik \cdot x}, \tag{21}$$

де $U = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} U_k e^{ik \cdot x}$ — *довільний вектор, n компонент якого належать до простору $\mathbf{H}'$, вектори $\big((I - P)U\big)_k = (I_{nm} - P_k) U_k$ є коефіцієнтами Фур'є функції $(I - P)U$, а I — одиничний оператор.*

Доведення. Оскільки розв'язок задачі (1), (2) має вигляд (6), то функція $v_k = v_k(t)$ є розв'язком задачі (12) і $v_{1k} = I_m(1) v_k = (i\tilde{k})^n u_k$ за формулою (9), тобто $u_k = (i\tilde{k})^{-n} I_m(1) v_k$.

Використавши формулу (19) здобудемо рівність (21). Підстановка співвідношення між u_k і v_k у формулу (6) завершує доведення. ■

Для довільної підмножини $\mathcal{Z} \subset \mathbb{Z}^p$ введемо у просторі узагальнених 2π-періодичних вектор-функцій проектор $\Pi(\mathcal{Z})$, значення якого на елементі $\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \hat{\psi}_k e^{ik \cdot x}$, де $\hat{\psi}_k \in \mathbb{C}^m$, дає формула $\Pi(\mathcal{Z})\psi = \sum_{k \in \mathcal{Z}} \hat{\psi}_k e^{ik \cdot x}$.

Якщо $\mathcal{Z}$ — скінченна множина, то $\Pi(\mathcal{Z})\varphi$ є векторним тригонометричним многочленом для періодичної узагальненої вектор-функції φ.

Нехай $\mathcal{K}_0 \equiv \mathcal{K}_0(T) = \{k \in \mathbb{Z}^p\colon\ \det M_k = 0\}$, а $\bar{\mathcal{K}}_0 = \mathbb{Z}^p \setminus \mathcal{K}_0$ — доповнення множини $\mathcal{K}_0$, тоді формулу (21) перепишемо у вигляді

$$v \equiv \Pi(\mathcal{K}_0)v + \Pi(\bar{\mathcal{K}}_0)v = \sum_{k\in\mathcal{K}_0} E_k(t)\big(M_k^{-}\hat{\varphi}_k^{*} + (I_{nm} - P_k)U_k\big)e^{ik\cdot x} + \\ + \sum_{k\in\bar{\mathcal{K}}_0} E_k(t)M_k^{-1}\hat{\varphi}_k^{*}e^{ik\cdot x}, \quad (22)$$

з якого випливають такі очевидні наслідки.

Наслідок 1. *Ядро задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{C}^n([0,T];\mathbf{H}')$ *складається з таких елементів:*

$$u = I_m(1)\sum_{k\in\mathcal{K}_0} E_k(t)(I_{nm} - P_k)U_k e^{ik\cdot x}, \qquad (23)$$

де U_k *— довільні вектори із* $\mathbb{C}^{nm}$.

Наслідок 2. *Задача* (1), (2) *є фредгольмовою тоді і лише тоді, коли множина* $\mathcal{K}_0$ *— скінченна. У цьому випадку ядро задачі має скінченну розмірність, яка дорівнює* $\sum_{k\in\mathcal{K}_0} \operatorname{rank}(I_{nm} - P_k)$, *де* $\operatorname{rank}(I_{nm} - P_k)$ *— ранг мариці* $I_{nm} - P_k$.

Наслідок 3. *Якщо* $\mathcal{K}_0 = \emptyset$, *тобто* $\det M_k \neq 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$, *то узагальнений розв'язок задачі* (1), (2) *— єдиний і має вигляд*

$$u = I_m(1)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} (i\tilde{k})^{-n} E_k(t)M_k^{-1}\hat{\varphi}_k^{*}e^{ik\cdot x}; \qquad (24)$$

навпаки, з єдиності випливає, що $\mathcal{K}_0$ *— порожня множина.*

5. Коректність розв'язності задачі (1), (2)

Встановимо умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) і властивості фредгольмовості та ізоморфності.

Введемо функції β_j і β_j^* за формулами

$$\beta_j^2(y) = \sum_{|s|\le j} \|B_j^s\|^2 y^{2(|s|-j)}, \quad j = 1,\dots,l,$$

$$\beta_{l+1}^2(y) = \sum_{j=l+1}^{l+n}\sum_{|s|\le j} \|B_j^s\|^2 y^{2(|s|-j)},$$

$$\beta_j^{*2}(y) = \sum_{|s|\le j} \|B_{0j}^s\|^2 y^{2(|s|-j)} + \begin{cases} 0, & j > n-1, \\ m, & j \le n-1, \end{cases} \quad j = 1,\dots,l,$$

$$\beta_{l+1}^{*2}(y) = \sum_{j=l+1}^{l+n}\sum_{|s|\le j} \|B_{0j}^s\|^2 y^{2(|s|-j)} + \begin{cases} 0, & l \ge n-1, \\ (n-l-1)m, & l < n-1, \end{cases}$$

виберемо сталу $\mathcal{K}_1 = \max(K, \tilde{K})$, де $\tilde{K}$ — невід'ємний корінь рівняння

$$\tilde{K} = 2\mu\tilde{\mu}nmRR_1(\tilde{K})\beta(\tilde{K}),$$

де $\beta(y) = \sum_{j=1}^{l+1}\big(\beta_j(y) + \beta_j^*(y)\big)$ і $\tilde{\mu} = \max\big(\mu_-^{-l-1}, \sum_{j=0}^{l}\mu_-^{-j}\big)$.

Позначимо множину $\mathcal{K}_1 = \big\{k \in \mathbb{Z}^p \colon \tilde{k} \ge K_1\big\}$, тоді для розв'язку $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} E_k(t)C_k$ отримуємо оцінку

$$\|\Pi(\mathcal{K}_1)u; \mathbf{H}_q^{n+l}\|^2 = \sum_{k\in\mathcal{K}_1}\tilde{k}^{2(q-n)}\sum_{j=0}^{n+l}\max_{t\in[T_0,T_1]}\|\tilde{k}^{n-j}u_k^{(j)}(t)\|^2 \le$$
$$\le (\mu\tilde{\mu}nmR)^2\sum_{k\in\mathcal{K}_1}\tilde{k}^{2(q-n-l-1)}\sum_{j=1}^{n}\|I_m(j)\mathbf{R}_k(C_k)\|^2 +$$
$$+ (\mu\tilde{\mu}nmR)^2\sum_{k\in\mathcal{K}_1}\tilde{k}^{2(q-n-l-1)}\|I_m(n)\mathbf{R}_k(C_k)\|.$$

Оскільки для евклідової норми для всіх $j = 1, \dots, n$ маємо

$$\|I_m(j)\mathbf{R}_k(C_k)\|^2 \le \sum_{j=1}^{n}\|I_m(j)\mathbf{R}_k(C_k)\|^2 = \|\mathbf{R}_k(C_k)\|^2 \le R_1^2(K_1)\|C_k\|^2,$$

то справджується нерівність

$$\|\Pi(\mathcal{K}_1)u; \mathbf{H}_q^{n+l}\|^2 \le 2\big(\mu\tilde{\mu}nmRR_1(K_1)\big)^2\sum_{k\in\mathcal{K}_1}\|\tilde{k}^{q-n-l-1}C_k\|^2. \qquad (25)$$

Остання формула дає оцінку норми у просторі $\mathbf{H}_q^n$ проекції $\Pi(\mathcal{K}_1)u$ розв'язку лише для випадку збіжності ряду у правій частині нерівності. Далі досліджується це питання.

Введемо позначення для виключної множини задачі

$$\mathcal{T}_0 = \bigcup_{k\in\bar{\mathcal{K}}_1}\big\{T \in [T_0, T_1] \colon \det M_k = 0\big\}. \qquad (26)$$

Теорема 4. *Нехай виконується умова теореми 3, вектор $\vec{a}$ коефіцієнтів диференціального рівняння* (1) *задовольняє умови* (5) *і $\varphi_j \in \mathbf{H}_{q-n-l}$ для $j = 1, \dots, n$. Тоді існують розв'язки u задачі* (1), (2) *у просторі $\mathbf{H}_q^{n+l}$; вони відрізняються лише скінченновимірними проекціями (тригонометричними многочленами) $\Pi(\bar{\mathcal{K}}_1)u$ цих розв'язків і*

$$\|\Pi(\mathcal{K}_1)u; \mathbf{H}_q^{n+l}\|^2 \le 8n^3m^3\big(\mu\tilde{\mu}RR_1(K_1)\|\mathbf{B}_0^{-1}\|\big)^2\sum_{j=1}^{n}\|\Pi(\mathcal{K}_1)\varphi_j; \mathbf{H}_{q-n-l}\|^2. \qquad (27)$$

Множина $\mathcal{T}_0$ *— скінченна і для кожного значення* $T \in [T_0, T_1] \setminus \mathcal{T}_0$ *розв'язок задачі* (1), (2) *— єдиний та має вигляд* (24), *а для кожного* $T \in \mathcal{T}_0$ *— єдиний з точністю до ядра* (23) *за умови* $(I-Q)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{\varphi}_k^* e^{ik\cdot x} = 0$ *та має вигляд*

$$u = I_m(1)\sum_{k\in\mathcal{K}_0}(i\tilde{k})^{-n}E_k(t)(M_k^{-}\hat{\varphi}_k^* + (I_{nm} - P_k)U_k)e^{ik\cdot x} + \\ + I_m(1)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\mathcal{K}_0}(i\tilde{k})^{-n}E_k(t)M_k^{-1}\hat{\varphi}_k^* e^{ik\cdot x}.$$

Доведення. Існування узагальнених розв'язків задачі (1), (2) дає теорема 3. На основі формули (23) встановимо оцінку (27), яка й доводить існування розв'язку з простору $\mathbf{H}_q^n$.

У рівнянні $M_kC_k = \hat{\varphi}_k^*$ для визначення вектора C_k матриця M_k має за умови $\tilde{k} \geq K$ таку структуру: $M_k = I_{nm} + H(k)$, де

$$H(k) = (i\tilde{k})^{-1}\sum_{j=1}^{l+1}\Big(\frac{\mathbf{B}_j^*(k)Z_k^{-1}}{(i\tilde{k})^{j-1}}L^{-j}(k) + \frac{\mathbf{B}_j(k)Z_k^{-1}}{(i\tilde{k})^{j-1}}L^{-j}(k)e^{i\tilde{k}L(k)T}\Big). \quad (28)$$

З формул (14), (28) маємо оцінку

$$\|H(k)C_k\| \leq \mu\tilde{\mu}nmRR_1(K_1)\frac{\|C_k\|}{\tilde{k}}\sum_{j=1}^{l+1}\frac{\|\mathbf{B}_j^*(k)Z_k^{-1}\| + \|\mathbf{B}_j(k)Z_k^{-1}\|}{\tilde{k}^{j-1}}.$$

Продовжуючи оцінювання отримуємо нерівності

$$\Big\|\frac{\mathbf{B}_{l+1}(k)Z_k^{-1}}{(i\tilde{k})^l}\Big\| \leq \Big(\sum_{j=l+1}^{l+n}\big\|\sum_{|s|\leq j}B_j^s(ik)^s\big\|^2\tilde{k}^{-2j}\Big)^{1/2} \leq \\ \leq \Big(\sum_{j=l+1}^{l+n}\sum_{|s|\leq j}\|B_j^s\|^2K_1^{2(|s|-j)}\Big)^{1/2} = \beta_{l+1}(K_1),$$

$$\Big\|\frac{\mathbf{B}_j(k)Z_k^{-1}\|}{(i\tilde{k})^{j-1}}\Big\| \leq \Big(\big\|\sum_{|s|\leq j}B_j^s(ik)^s\big\|^2\tilde{k}^{-2j}\Big)^{1/2} \leq \\ \leq \Big(\sum_{|s|\leq j}\|B_{0j}^s\|^2K_1^{2(|s|-j)}\Big)^{1/2} = \beta_j(K_1), \quad j = 1, \ldots, l, \ l \geq 1,$$

а також нерівності

$$\Big\|\frac{\mathbf{B}_j^*(k)Z_k^{-1}\|}{(i\tilde{k})^{j-1}}\Big\| \leq \beta_j^*(K_1), \quad j = 1, \ldots, l+1.$$

Враховуючи останні оцінки для матриці $H(k)$ на множині $\mathcal{K}_1$, отримуємо оцінку $\|H(k)\| \le \mu\tilde{\mu}nmRR_1(K_1)\beta(K_1)/\tilde{k} \le 1/2$.

Отже, матриця M_k — невироджена, $C_k = M_k^{-1}\hat{\varphi}_k^* \equiv i\tilde{k}M_k^{-1}\mathbf{B}_0^{-1}\hat{\varphi}_k$ і

$$\|M_k^{-1}\| \le \|I_{nm}\| + \frac{\|H(k)\|}{1-\|H(k)\|} \le \|I_{nm}\| + 1, \quad \|C_k\| \le 2\tilde{k}\sqrt{nm}\|\mathbf{B}_0^{-1}\|\|\hat{\varphi}_k\|.$$

Скінченність множини (26) випливає зі скінченності множини $\big\{T \in [T_0, T_1]\colon \det M_k = 0\big\}$ нулів цілої функції $\det M_k \equiv \det M_k(T)$ на скінченному відрізку $[T_0, T_1]$, де $k \in \bar{\mathcal{K}}_1$, та скінченності множини $\bar{\mathcal{K}}_1$, число елементів якої не перевищує числа $(1+2K_1)^p$.

Якщо $T \in [T_0, T_1] \setminus \mathcal{T}_0$, то $\mathcal{K}_0 = \emptyset$ і відповідне твердження теореми випливає з наслідку 3. Останнє твердження отримуємо з теореми 3 та наслідку 1. Теорему доведено. ■

Наслідок 4. *Задача* (1), (2) *є фредгольмовою для всіх* $T \in [T_0, T_1]$, *де* T_0, T_1 *— довільні додатні числа і* $T_0 < T_1$.

Твердження цього наслідку випливає з наслідку 2 теореми 3 та із доведення теореми 4.

Також теорема 4 містить інший важливий наслідок.

Наслідок 5. *Для всіх чисел* $T \in [T_0, T_1] \setminus \mathcal{T}_0$ *оператор нелокальних умов* (2) *задачі* (1), (2) *є бієктивним неперервним відображенням (ізоморфізмом)* $u \to \varphi$ *з підпростору розв'язків системи* (1) *простору* $\mathbf{H}_q^{n+l}$ *на простір вектор-функцій* $\big(\mathbf{H}_{q-n-l}\big)^n$.

6. Висновки

Встановлено умови однозначної розв'язності задачі з нелокальними умовами для систем рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу у просторі узагальнених функцій та у шкалі соболєвських просторів періодичних за просторовими змінними вектор-функцій.

Ця задача є некоректною за Адамаром лише для скінченної кількості значень $T \in [T_0, T_1]$ і коректна для всіх інших значень.

Досліджено характер залежності норми розв'язку від параметрів задачі, розглянуто питання фредгольмовості задачі та встановлено вигляд елементів її ядра.

Встановлено єдиність розв'язку задачі (1), (2) для всіх (за винятком скінченної кількості) значень $T \in [T_0, T_1]$ в умовах (2) та її коректність у шкалі соболєвських просторів; при цьому гладкість правих частин у необхідних умовах існування така ж, як у достатніх умовах, тобто доведено властивість ізоморфізму оператора нелокальних умов (2).

1. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К. : Наукова думка, 2002. – 416 с.

2. *Il'kiv V. S., Ptashnyk B. I.* Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators, Ukr. Math. Journ., 58 (2006), No 12, 1847–1875.

3. *Fardigola L. V.* Test for propriety in a layer of a boundary problem with integral condition, Ukr. Math. Journ., 42 (1990), No 11, 1388–1394.

4. *Fardigola L. V.* An integral boundary-value problem in a layer for a system of linear partial differential equations, Sbornik Math, 53 (1995), No 6, 1671–1692.

5. *Ільків В. С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісн. держ. ун-ту „Львів. політехніка“. Сер. Прикл. математика. – 1999. – №364. – С. 318–323.

6. *Pul'kina L. S.* A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, Diff. Eq., 40 (2004), No 7, 947–953.

7. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2008. – №625. – С. 12–19.

8. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 32–39.

9. *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations, Bull. Georg. Nation. Acad. Sci, 5 (2011), No 11, 31–37.

10. *Симотюк М. М., Савка І. Я.* Початково-нелокальна задача для факторизованого рівняння із частинними похідними // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2013. – Вип. 768. – С. 19-–25.

11. *Каленюк П. І., Ільків В. С., Нитребич З. М., Когут І. В.* Однозначна розв'язність задачі з інтегральними умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2013. – Вип. 768. – С. 5—11.

12. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 40–53.

13. *Kuz' A. M., Ptashnyk B. I.* A problem with integral conditions with respect to time for Gårding hyperbolic equations, Ukr. Math. Journ, 65 (2013), No 2, 277–293.

14. *Kuz' A. M., Ptashnyk B. I.* A problem with integral conditions with respect to time for a system of equations of the dynamic elasticity theory, Journal of Mathematical Sciences, 208 (2015), No 3, 310–326.

15. *Ільків В. С., Нитребич З. М., Пукач П. Я.* Задача з інтегро-крайовими умовами для системи рівнянь Ляме у просторах майже періодичних функцій // Буков. мат. журн. – 2015. – **3**, № 2. – С. 27–41.

16. *Il'kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Ya.* Boundary-value problem with integral conditions for a system of Lamé equations in the space of almost periodic function, Electron.J. Differential. Equations, 2016 (2016), No 304, 1–12.

17. *Сэйдж Э. П., Уайт Ч. С., III* Оптимальное управление системами. – М. : Радио и связь, 1982. – 392 с.

18. *Острём К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. – М. : Мир, 1987. – 480 с.

19. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The Theory of Matrices, 2nd ed., Academic Press, Orlando, FL, 1985.

20. *Пытьев Ю. П.* Математические методы интерпретации эксперимента. – М. : Высш. шк., 1989. – 351 с.

21. *Higham Nicholas J.* Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. Second edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2002. xxx+680 pp.

Volodymyr Ilkiv

NONLOCAL PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH HIGHER DERIVATIVES IN CONDITIONS

The paper is devoted to investigation of the problem with nonlocal two point conditions on time coordinate for a system of partial differential equations with constant coefficients. Necessary and sufficient conditions for the existence of the solution of this problem in the class of periodic functions for the spatial variables are found. The study of asymptotic properties of solution and fredholmovity of the problem was proved, also isomorphism property of the nonlocal conditions operator established.

УДК 517. 927.6 +517.984.52

Петро Каленюк[1], **Ярослав Баранецький**[2], **Любов Коляса** [3]

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

Досліджено спектральні властивості несамоспряженої задачі, породженої нелокальними умовами для оператора диференціювання порядку $2n$. Вивчено випадки регулярних та нерегулярних за Біркгофом двоточкових крайових умов. Побудовано систему кореневих функцій задачі та елементи біортогональної системи. Встановлено умови, при виконанні яких ці системи є повними та утворюють базис Рісса.

1. Вступ

У роботі вивчаються спектральні властивості крайової задачі

$$(-1)^n y^{(2n)}(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$y^{(m_j)}(0) + (-1)^{(m_j)} y^{(m_j)}(1) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$y^{(m_{n+j})}(0) - (-1)^{(m_{n+j})} y^{(m_{n+j})}(1) +$$

$$+ \sum_{q=0}^{2n-1} b_{p,q} \left(y^{(q)}(0) + (-1)^{(q)} y^{(q)}(1-x) \right) = 0,$$

де $b_{p,q} \in \mathbb{R}$, $q = 0, 1, \ldots, 2n-1$, $p = 1, \ldots, n$, $m_j < 2n$, $j = 1, \ldots, 2n$.

Властивості повноти та базисності (умовної, безумовної, за Ріссом) системи кореневих функцій крайових задач є важливими при побудові розв'язків багатьох задач методом Фур'є або його аналогами. Для випадку звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі базисність за Ріссом для крайових задач, породжених регулярними за Біркгофом крайовими умовами, встановлено в працях [1, 2].

У випадку, коли крайові умови є регулярними, але не посилено регулярними, в роботі [3] було встановлено, що система кореневих підпросторів, які відповідають кратним власним значенням крайової задачі, утворює базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$. У працях [4, 5, 6] було запропоновано поняття приведеної системи кореневих функцій задачі, яка

[1] *НУ „Львівська політехніка“, kalenyuk@lp.edu.ua*
[2] *НУ „Львівська політехніка“, baryarom@ukr.net*
[3] *НУ „Львівська політехніка“, kolyasa.lubov@gmail.com*

утворює базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$, а також поняття суттєво несамоспряженого оператора (оператора, система кореневих функцій якого містить нескінченне число приєднаних) і вивчено властивості таких операторів.

Задачі з нерегулярними за Біркгофом умовами вивчались в роботах [7, 8, 9]. Властивості задач, для яких системи кореневих функцій є сумовані методом Абеля, аналізувались у працях [10, 11].

У роботах [12, 13] вивчались спектральні властивості задач з умовами періодичності та періодичними коефіцієнтами. Задачі з інтегральними та інтегро–диференціальними крайовими умовами розглядались в публікаціях [14, 15, 16]. У роботі [17] вивчались крайові задачі з дисипативними умовами. У роботі [18] досліджувались проблеми оцінки швидкості збіжності та рівнозбіжності з тригонометричним рядом Фур'є розвинень в ряд за системою кореневих функцій нелокальної задачі для диференціального рівняння на скінченому інтервалі. Властивості суттєво несамоспряжених операторів, визначених в абстрактному сепарабельному гільбертовому просторі, вивчались у праці [19].

2. Основні позначення

Нехай $W_2^{2n}(0,1) \equiv$

$$\equiv \left\{ y \in L_2(0,1) : y^{(m)} \in C[0,1], y^{(2n)} \in L_2(0,1), m = 0,1,\dots,2n-1 \right\},$$

$$\left(y,u;W_2^{2n}(0,1)\right) \equiv \sum_{k=0}^{2n} \left(y^{(k)},u^{(k)};L_2(0,1)\right),$$

$$\left\|y;W_2^{2n}(0,1)\right\|^2 \equiv \left(y,y;W_2^{2n}(0,1)\right),$$

$W^*(0,1)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $W_2^{2n}(0,1)$, $I: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – оператор інволюції, $Iy(x) \equiv y(1-x)$, $p_0 \equiv \frac{1}{2}(E+I)$, $p_1 \equiv \frac{1}{2}(E-I)$ – ортопроектори простору $L_2(0,1)$,

$$H_j = \{y \in L_2(0,1) : y = p_j y\}, K^j \equiv \{e^{icx} + (-1)^j e^{ic(1-x)}, c \in \mathbb{R}\}, j = 0,1,$$

$W_s^*(0,1) = \left\{\ell \in W^*(0,1) : \ell y = 0, y \in K^{1-s}\right\}$, $s = 0,1$, $B(L_2(0,1))$ – алгебра лінійних обмежених операторів $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$.

Функцію із простору H_0 (H_1) будемо називати симетричною (антисиметричною) відповідно. Крайову умову будемо називати симетричною, якщо до ядра відповідного функціоналу належить довільна функція із $K^1(K^0)$. Наприклад, умова $y(0) + y(1) = 0$ є симетричною. Аналогічно, антисиметричною є умова $y(0) - y(1) = 0$.

3. Самоспряжена крайова задача

Розглянемо крайову задачу

$$(-1)^n y^{(2n)}(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$l_j^0 y \equiv y^{(m_j)}(0) + (-1)^{m_j} y^{(m_j)}(1) = 0, \tag{2}$$

$$l_{n+j}^0 y \equiv y^{(m_{n+j})}(0) - (-1)^{m_{n+j}} y^{(m_{n+j})}(1) = 0, \tag{3}$$

де $m_n < m_{n-1} < \ldots < m_1, \quad m_{2n} < m_{2n-1} < \ldots < m_{n+1}, \quad j = 1, \ldots, n.$

Крайові умови (2), (3) вибрані таким чином, що

$$l_j^0 \in W_0^*(0,1), \quad l_{n+j}^0 \in W_1^*(0,1), \quad j = 1, \ldots, \quad , n. \tag{4}$$

Нехай $L_0 : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – оператор задачі (1)–(3), $L_0 y(x) \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x)$, $D(L_0) \equiv \left\{ y \in W_2^{2n}(0,1) : l_q^0 y = 0, q = 1, \ldots, 2n \right\}$.

Розглянемо спектральні властивості оператора L_0. Корені ρ_j характеристичного рівняння $(-1)^n \rho^{2n} = \lambda$, яке відповідає диференціальному рівнянню $L_0 y(x) = \lambda y(x)$, визначаємо співвідношеннями $\rho_j = \omega_j \rho$, $|\arg \rho| \leq \frac{\pi}{2n}$, $(\omega_j)^{2n} = (-1)^n$, $\omega_1 = i$, $\omega_j = \omega_1 \exp i\frac{\pi}{n}(j-1)$, $j = 2, \ldots, n$.

Фундаментальну систему розв'язків рівняння $L_0 y(x) = 0$ визначимо співвідношеннями

$$y_j(x,\rho) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{w_j \rho x} + e^{w_j \rho (1-x)}\right) \in H_0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$y_{n+j}(x,\rho) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{w_j \rho x} - e^{w_j \rho (1-x)}\right) \in H_1, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

Підставляючи загальний розв'язок цього рівняння

$$y(x,\rho) \equiv \sum_{p=1}^{2n} C_p y_p(x,\rho), \quad C_p \in \mathbb{R}, \quad p = 1, \ldots, 2n, \tag{7}$$

у крайові умови (2), (3), отримаємо рівняння для визначення власних значень оператора L_0

$$\Delta(\rho) \equiv \det\left(l_r^0 y_q\right)_{r,q=1,\ldots,2n} = 0. \tag{8}$$

Із припущень (4) та включень (5), (6) отримуємо, що

$$l_{n+j}^0 y_r(x,\rho) = 0, \quad l_j^0 y_{n+r}(x,\rho) = 0, \quad j, r = 1, \ldots, n.$$

Тому $\Delta(\rho) = \Delta_0(\rho)\Delta_1(\rho)$, де $\Delta_s(\rho) \equiv \det\left(l_{sn+j}^0 y_{sn+r}\right)_{j,r=1,\ldots,n}$, $s = 0, 1$.

Нехай $M \equiv \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, $M_0 \equiv \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, $M_1 \equiv \{m_{n+1}, m_{n+2}, \ldots, m_{2n}\}$. Визначимо припущення, за яких крайові умови (2), (3) є самоспряженими.

Нехай для кожного $m \in M_0 \cup M_1$ виконується одне із припущень

$$A_1 : m \in M_0 \cap M_1 \Rightarrow 2n - m - 1 \notin M_0 \cup M_1;$$

$$A_2 : m \in M_0, m \notin M_1 \Rightarrow 2n - m - 1 \in M_1;$$

$$A_3 : m \in M_1, m \notin M_0 \Rightarrow 2n - m - 1 \in M_0.$$

Припущення A_1– A_3 є достатніми умовами для самоспряженості оператора L_0. Справді,

1. якщо $m_j \in M_0 \bigcap M_1$, то $y^{(m_j)}(0) = y^{(m_j)}(1) = 0$, тому при $p = m_j$ рівна нулю різниця

$$y^{(2n-m_j-1)} y^{(m_j)} \Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= y^{(2n-m_j-1)}(1)\, y^{(m_j)}(1) - y^{(2n-m_j-1)}(0)\, y^{(m_j)}(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

у виразі $\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^n\, y^{(2n-p-1)} y^{(p)} \big|_{x=0}^{x=1}$;

2. якщо $m_j \in M_0 \backslash M_1$, $2n - 1 - m_j \in M_1$, тоді

$$y^{(m_j)}(0) = (-1)^{m_j+1}\, y^{(m_j)}(1),$$

$$y^{(2n-1-m_j)}(0) = (-1)^{2n-1-m_j}\, y^{(2n-1-m_j)}(1), \quad j = 1, \ldots, n,$$

тому при $p = m_j$ рівна нулю різниця

$$y^{(2n-m_j-1)} y^{(m_j)} \Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= y^{(2n-m_j-1)}(1)\, y^{(m_j)}(1) - y^{(2n-m_j-1)}(0)\, y^{(m_j)}(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

у виразі $\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^n\, y^{(2n-p-1)} y^{(p)} \big|_{x=0}^{x=1}$;

3. аналогічно, у випадку, коли $m_{n+j} \in M_1 \backslash M_0$, $2n - 1 - m_{n+j} \in M_0$, маємо

$$y^{(m_{n+j})}(0) = (-1)^{m_{n+j}}\, y^{(m_{n+j})}(1),$$

$$y^{(2n-1-m_{n+j})}(0) = (-1)^{2n-m_{n+j}}\, y^{(2n-1-m_{n+j})}(1),$$

$$y^{(2n-m_{n+j}-1)} y^{(m_{n+j})} \Big|_{x=0}^{x=1} = y^{(2n-m_{n+j}-1)}(1)\, y^{(m_{n+j})}(1) -$$

$$- y^{(2n-m_{n+j}-1)}(0)\, y^{(m_{n+j})}(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Припущення A_4. Крайові умови (2), (3) є сильно регулярними за Біркгофом [20, с. 67, 99].

Зауваження 1. Як відомо [22], із самоспряженості умов (3), (4) випливає регулярність цих умов.

Надалі вважаємо, що припущення $A_1 - A_4$ виконуються. Тому оператор L_0 є самоспряженим та корені рівняння (8) лежать на півосі $\mathrm{Im}\rho = 0, \mathrm{Re}\rho \geq 0$. Для кожного $s \in \{0,1\}$ занумеруємо числа $\rho_{s,k}$, $k = 1, 2, \ldots$ у порядку зростання $\rho_{s,1} < \rho_{s,2} < \ldots$. Отже, оператор L_0 має власні значення $\lambda_{s,k} = (\rho_{s,k})^{2n}$, $s = 0, 1,\ k = 1, 2, \ldots$.

Фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння

$$(-1)^n y^{(2n)} = \lambda_{s,k} y.$$

визначимо співвідношеннями

$$y_j\left(x, \rho_{s,k}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\left(e^{w_j \rho_{s,k} x} + e^{w_j \rho_{s,k}(1-x)}\right) \in H_0, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} y_{n+j}\left(x, \rho_{s,k}\right) \equiv \tfrac{1}{2}\left(e^{w_j \rho_{s,k} x} - e^{w_j \rho_{s,k}(1-x)}\right) \in H_1, \\ j = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots,\ s = 0, 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Нехай $\beta_0 = m_2 + m_3 + \ldots + m_n,\ \beta_1 = m_{n+2} + m_{n+3} + \ldots + m_{2n}$. За елементами систем (9), (10) визначимо власні функції оператора L_0

$$\begin{gathered} v_{s,k}\left(x, L_0\right) \equiv \left(\rho_{s,k}\right)^{-\beta_s} \theta_{s,k} \times \\ \times \det \begin{pmatrix} y_{sn+1}\left(x, \rho_{s,k}\right) & \ldots & y_{sn+n}\left(x, \rho_{s,k}\right) \\ l_{sn+2} y_{sn+1} & \cdots & l_{sn+2} y_{sn+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{sn+n} y_{sn+1} & \ldots & l_{sn+n} y_{sn+n} \end{pmatrix},\ s = 0, 1,\ k \geq 1, \end{gathered} \tag{11}$$

нормовані в $L_2(0,1)$ умовою $\|v_{s,k}(x, L_0); L_2(0,1)\| = 1$. Враховуючи, що $\mathrm{Re}\omega_j < 0$, $j = 2, \ldots, n$, з формули (11) отримаємо:

$$\begin{gathered} \left\| v_{s,k}\left(x, L_0\right) - \theta_{s,k} \left(\rho_{s,k}\right)^{-\beta_s} \Delta^s_{1,1} y_{sn+1}\left(x, \rho_{s,k}\right); L_2\left(0, 1\right) \right\| \to 0, \\ k \to \infty, \end{gathered} \tag{12}$$

де $\Delta^s_{p,q} = \det\left(\omega_r^{m_{sn+j}}\right)_{r,j=\overline{2,n}}^{j\neq p, r\neq q}$, $s = 0, 1,\ q = 2, \ldots, n,\ p = 1, \ldots, n$. Якщо $\lambda_0 = 0$ є власним значенням оператора L_0 кратності $s \in \{0,1\}$, то відповідні власні функції позначимо через $v_{s,0}(x, L_0)$, $\|v_{s,0}(x, L_0); L_2(0,1)\| = 1$. Розглянемо підсистеми власних функцій та власних значень оператора L_0: $V_s(L_0) \equiv \{v_{s,m}(x, L_0), m \geq 0\}$, $\sigma_s(L_0) \equiv \{\lambda_{s,m}, m \geq 0\}, s = 0, 1$.

Із рівності (11) випливає що $V_s\left(L_0\right) \subset H_s$, $s = 0, 1$.

Тому, враховуючи самоспряженість оператора L_0 в просторі $L_2\left(0, 1\right)$, отримаємо наступне твердження

Лема 1. *Підпростори $H_s \subset L_2\left(0, 1\right)$ є інваріантними для оператора L_0, $s = 0, 1$.*

Виберемо довільне власне значення $\lambda_{0,k} \in \sigma_0\left(L_0\right)$ та розглянемо функції

$$y_{n+j}\left(x, \rho_{0,k}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{w_j \rho_{0,k} x} - e^{w_j \rho_{0,k}(1-x)}\right) \in H_1,\ j = 1, \ldots, n, k = 1, 2, \ldots .$$

Функцію $y_{0,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right)$ визначимо як детермінант матриці порядку n, p-ий рядок якої складається з функцій $y_{n+1}\left(x, \rho_{0,k}\right), y_{n+2}\left(x, \rho_{0,k}\right), \ldots, y_{2n}\left(x, \rho_{0,k}\right)$. Елементи s-го рядка складені з чисел $\omega_j^{m_{n+s}}\left(1-(-1)^{m_{n+s}} \times \times e^{\omega_j \rho_{0,k}}\right)$, $s, j = 1, \ldots, n$, $j \neq p$.

Нехай

$$\Delta^1\left(\rho_{0,k}\right) = \det\left[\left(\omega_r\right)^{m_{n+j}}\left(1-(-)^{m_{n+j}} e^{\omega_r \rho_{0,k}}\right)\right]\Big|_{r=\overline{1,n}, j=\overline{1,n},},$$

$$\Delta^1_{p,q}\left(\rho_{0,k}\right) = \det\left[\left(\omega_r\right)^{m_{n+j}}\left(1-(-)^{m_{n+j}} e^{\omega_r \rho_{0,k}}\right)\right]\Big|^{j\neq p, r\neq q}_{r=\overline{1,n}, j=\overline{1,n},},$$

$$k = 1, \ldots, p, \quad q = 1, \ldots, n,$$

$$\begin{gathered} y_{1,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right) = \left(\Delta_{p,1}\left(\rho_{0,k}\right)\right)^{-1} y_{0,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right), \\ p = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots . \end{gathered} \tag{13}$$

Підставляючи вираз (13) у крайові умови (2), (3), переконуємося, що

$$\begin{gathered} l_j y_{1,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right) = 0, \\ l_{n+p} y_{1,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right) = \left(\rho_{0,k}\right)^{m_{n+p}}\left(\Delta_{p,1}\left(\rho_{0,k}\right)\right)^{-1} \Delta^1\left(\rho_{0,k}\right), \end{gathered} \tag{14}$$

$$j = 1, \ldots, n, \quad p = 1, \ldots, n, \quad j \neq n+p, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Враховуючи, що $\Delta_{p,q}\left(\rho_{0,k}\right) \to \Delta^1_{p,q}$, $\Delta^1\left(\rho_{0,k}\right) \to \Delta^1$, при $k \to \infty$, отримаємо, що

$$\begin{gathered} 0 < K_1 \leq c_{0,k,p} \equiv \left|l_{n+p} y_{1,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right)\right|\left(\rho_{0,k}\right)^{-m_{n+p}} \leq K_2, \\ p = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{15}$$

Аналогічно, для довільного власного значення $\lambda_{1,k} \in \sigma_1\left(L_0\right)$ розглянемо системи функцій

$$y_j\left(x, \rho_{1,k}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{w_j \rho_{1,k} x} + e^{w_j \rho_{1,k}(1-x)}\right) \in H_0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Функцію $y_{0,j}\left(x, \rho_{1,k}\right)$ визначимо як детермінант матриці порядку n, j-ий рядок якої складається з функцій $y_1\left(x, \rho_{1,k}\right), y_2\left(x, \rho_{1,k}\right), \ldots, y_n\left(x, \rho_{1,k}\right)$. Елементи s-го рядка складені з чисел $\omega_q^{m_{n+s}}\left(1-(-1)^{m_{n+s}} e^{\omega_q \rho_{0,k}}\right)$, $s, q = 1, \ldots, n$, $s \neq j$.

Нехай

$$\Delta^0\left(\rho_{1,k}\right) = \det\left[\left(\omega_r\right)^{m_s}\left(1+(-1)^{m_s} e^{\omega_r \rho_{1,k}}\right)\right]\Big|_{r=\overline{1,n}, s=\overline{1,n},}, k = 1, 2, \ldots,$$

$$\Delta^0_{j,q}\left(\rho_{1,k}\right) = \det\left[\left(\omega_s\right)^{m_r}\left(1+(-1)^{m_r} e^{\omega_r \rho_{1,k}}\right)\right]\Big|^{s\neq q, r\neq j}_{s=\overline{1,n}, r=\overline{1,n},},$$

$$j, q = 1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots,$$

$$\Delta^0_{j,q} = \det\left[(\omega_s)^{m_r}\right]\Big|^{s\neq q, r\neq j}_{s=\overline{1,n}, r=\overline{1,n},}, \ j, q = 1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots,$$

$$\begin{gathered} y_{1,j}\left(x, \rho_{1,k}\right) \equiv \left(\Delta_{j,1}\left(\rho_{1,k}\right)\right)^{-1} y_{0,j}\left(x, \rho_{1,k}\right), \\ j = 1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots \ . \end{gathered} \tag{17}$$

Підставляючи вираз (17) у крайові умови (2), (3), переконуємося, що

$$\begin{gathered} l_s y_{1,j}\left(x, \rho_{1,k}\right) = 0, \\ l_j y_{1,j}\left(x, \rho_{1,k}\right) = \left(\rho_{1,k}\right)^{m_j} \Delta^0\left(\rho_{1,k}\right)\left(\Delta_{j,1}\left(\rho_{1,k}\right)\right)^{-1}, \\ j, s = 1, \ldots, n, \quad j \neq s, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{18}$$

Приймаючи до уваги обмеженість чисел $\Delta^0\left(\rho_{1,k}\right)$, функцій $y_r\left(x, \rho_{1,k}\right)$ та враховуючи, що $\Delta^0_{j,q}\left(\rho_{1,k}\right) \to \Delta^0_{j,q}, \ (k \to \infty)$, отримаємо оцінки

$$\begin{gathered} \left\| y_{1,j}\left(x, \rho_{1,k}\right); L_2\left(0,1\right)\right\| \leq K_3, \\ K_4 \leq c_{1,k,j} \equiv \left|l_j y_{1,j}\right|\left(\rho_{1,k}\right)^{-m_j} \leq K_5, \\ 0 < K_3, \ K_4, \ K_5 < \infty, \ j = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots \ . \end{gathered} \tag{19}$$

4. Несамоспряжені крайові задачі

Для рівняння (1) розглянемо крайову задачу з умовами

$$l^1_j y \equiv l^0_j y = 0, \ j = 1, \ldots, 2n, \ j \neq n + p, \tag{20}$$

$$l^1_{n+p} y = l^0_{n+p} y + l_{q,b} y = 0, \tag{21}$$

$$l_{q,b} y \equiv b\left(y^{(q)}\left(0\right) + \left(-1\right)^{(q)} y^{(q)}\left(1\right)\right), \ b \in \mathbb{R}, \ q \in M. \tag{22}$$

Нехай $L_{p,q,b}$ – оператор задачі (1), (20)–(22), $L_{p,q,b} y \equiv \left(-1\right)^n y^{(2n)}\left(x\right), y \in D\left(L_{p,q,b}\right), D(L_{p,q,b}) \equiv \left\{y \in W^{2n}_2(0,1) : l^1_j y = 0, j = 1, \ldots, 2n\right\}$, $V\left(L_{p,q,b}\right)$ – система власних функцій оператора $L_{p,q,b}$, $p = 1, \ldots, n$, $b \in \mathbb{R}$, $q \in M$.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення $A_1 - A_4$. Тоді*

1) для довільних $p = 1, \ldots, n$, $0 \leq q \leq 2n - 1$, $b \in \mathbb{R}$, власні значення операторів L_0 та $L_{p,q,b}$ співпадають,

2) система $V\left(L_{p,q,b}\right)$ власних функцій оператора $L_{p,q,b}$ є повною в просторі $L_2\left(0,1\right)$,

3) якщо $0 \leq q < m_{n+p}$, то система $V\left(L_{p,q,b}\right)$ є базисом Рісса простору $L_2\left(0,1\right)$.

Доведення. Покажемо спочатку, що $\sigma(L_0) \subseteq \sigma(L_{p,q,b})$. Безпосередньою підстановкою можна переконатись, що функція $v_{1,k}(x, L_0)$ справджує умови (20)–(22). Тому власну функцію оператора $L_{p,q,b}$, яка відповідає власному значенню $\lambda_{1,k}$, визначимо рівністю

$$v_{1,k}(x, L_{p,q,b}) \equiv v_{1,k}(x, L_0), \; q \in M, \; p = 1, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots \; . \tag{23}$$

Отже, $\sigma_1(L_0) \subseteq \sigma(L_{p,q,b}), V_1(L_0) \subset V(L_{p,q,b}), q \in M, b \in \mathbb{R}, p = 1, \ldots, n.$

Покажемо, що $\sigma_0(L_0) \subseteq \sigma(L_{p,q,b})$. Власну функцію $v_{0,k}(x, L_{p,q,b})$ оператора $L_{p,q,b}$ визначимо виразом

$$\begin{gathered} v_{0,k}(x, L_{p,q,b}) = v_{0,k}(x, L_0) + v_k^1(x, L_{p,q,b}), \\ q \in M, \; b \in \mathbb{R}, \; p = 1, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{24}$$

де $v_k^1(x, L_{p,q,b}) = c_{p,q,b,k} y_{1,n+p}(x, \rho_{0,k})$, $q \in M$, $b \in \mathbb{R}$, $p = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. Підставляючи вираз (24) в крайові умови (21), (22), знаходимо невідомі параметри $c_{p,q,b,k}$:

$$\begin{gathered} c_{p,q,b,k} = -(l_{q,b} v_{0,k}) \left(l_{n+p}^0 y_{1,n+p} \right)^{-1}, \\ q \in M, \; b \in \mathbb{R}, \; p = 1, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots \; . \end{gathered} \tag{25}$$

Враховуючи співвідношення (22), (15), (19) та нерівність

$$|l_{q,b} v_{0,k}| \le K_6 (\rho_{0,k})^q, \; q \in M, \; b \in \mathbb{R}, \; k = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

отримуємо оцінки

$$\begin{gathered} |c_{p,q,b,k}| \le K_7 |b| (\rho_{0,k})^{q - m_{n+p}}, \\ p = 1, \ldots, n, \; q \in M, \; b \in \mathbb{R}, \; k = 1, 2, \ldots \; . \end{gathered} \tag{27}$$

Покажемо що система (23)–(25) власних функцій оператора $L_{p,q,b}$ є тотальною (повною) в просторі $L_2(0,1)$. Нехай існує така функція $h = h_0 + h_1 \in L_2(0,1)$, $h_s \in H_s$ що

$$(h, v_{s,k}(x, L_{p,q,b}); L_2(0,1)) = 0,$$

$$p = 1, \ldots, n, \; s = 0, 1, \; q \in M, \; b \in \mathbb{R}, \; k = 1, 2, \ldots \; .$$

Система $V_1(L_0)$ є ортонормованим базисом в H_1. Тому з припущення ортогональності маємо, що $h_1 = 0$, $h = h_0 \in H_0$. Враховуючи співвідношення (24), отримаємо

$$(h, v_{0,k}(x, L_{p,q.b}); L_2(0,1)) = (h_0, v_{0,k}(x, L_0); L_2(0,1)) = 0,$$

$$p = 1, \ldots, n, \; b \in \mathbb{R}, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Система $V_0(L_0)$ є ортонормованим базисом в H_0. Тому $h = h_0 = 0$. Отже, система $V(L_{p,q,b})$ – повна в просторі $L_2(0,1)$, $p = 1, \ldots, n$, $q \in M$, $b \in \mathbb{R}$.

Для задачі (1), (20)–(22), існує спряжена задача, власні функції якої утворюють систему $W\left(L_{p,q,b}\right) = \left\{w_r\left(x, L_{p,q,b}\right) \in L_2\left(0,1\right) : r = 1, 2, \ldots\right\}$, біортогональну до системи $V\left(L_{p,q,b}\right)$ в сенсі рівностей

$$\left(v_{s,k}\left(x, L_{p,q,b}\right), w_{r,m}\left(x, L_{p,q,b}\right); L_2\left(0,1\right)\right) = \delta_{s,r}\delta_{k,m},$$

$$s, r = 0, 1,\ q \in M,\ b \in \mathbb{R},\ p = 1, \ldots, n,\ k, m = 1, 2, \ldots\ .$$

Отже, система $V\left(L_{p,q,b}\right)$ є мінімальною в просторі $L_2\left(0,1\right)$, $q \in M$, $b \in \mathbb{R}$, $p = 1, \ldots, n$. Із нерівності (27) випливає, що при $m_{n+p} < q$ повна та мінімальна в просторі $L_2\left(0,1\right)$ система функцій $V\left(L_{p,q,b}\right)$ є квадратично близькою [21, с. 381] до ортонормованого базису $V\left(L_0\right)$. Тому, згідно з теоремою Барі [21, с. 382], вона є базисом Рісса простору $L_2\left(0,1\right)$. ■

Розглянемо детальніше випадок крайових умов (21), коли

$$q = m_{n+p},\ m_{n+p} \notin M_1,\ p = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Теорема 2. *Нехай для крайових умов* (2), (3) *виконуються припущення* $A_1 - A_4$ *і нехай* $m_{n+p} \notin M_1$. *Тоді для кожного* $b \in \mathbb{R}$ *система* $V\left(L_{p,b}\right)$ *є базисом Рісса простору* $L_2\left(0,1\right), p = 1, \ldots, n.$

Доведення. За припущення $m_{n+p} \notin M_1$ визначимо крайову умову (21) формулою

$$\begin{gathered} y^{(m_{n+p})}\left(0\right) - \left(-1\right)^{m_{n+p}} y^{(m_{n+p})}\left(1\right) + b\left(y^{(m_{n+p})}\left(0\right) + \right. \\ \left. \left(-1\right)^{m_{n+p}} y^{(m_{n+p})}\left(1\right)\right) = 0,\ p = 1, \ldots, n,\ b \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{29}$$

Нехай $L_{p,b} = L_{p,m_{n+p},b}$ – оператор задачі (1), (20), (29). Власні функції оператора $L_{p,b}$ визначимо співвідношеннями

$$v_{1,k}\left(x, L_{p,b}\right) = v_{1,k}\left(x, L_0\right),\ b \in \mathbb{R},\ p = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

$$\begin{gathered} v_{0,k}\left(x, L_{p,b}\right) = v_{0,k}\left(x, L_0\right) + b y_{2,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right), \\ p = 1, \ldots, n,\ b \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered} y_{2,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right) = c_{p,b,k} y_{1,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right), \\ p = 1, \ldots, n,\ b \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{32}$$

$$c_{p,b,k} = -b\left(l^0_{n+p} y_{1,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right)\right)^{-1}\left(l_{m_{n+p},b} v_{0,k}\left(x, L_0\right)\right),$$

$$p = 1, \ldots, n,\ b \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Враховуючи оцінки (15), (26), отримуємо нерівність

$$\begin{gathered} \left|c_{p,b,k}\right| \le K_8\left|b\right| < \infty,\ p = 1, \ldots, n,\ b \in \mathbb{R}, \\ 0 < K_8 < \infty,\ k = 1, 2, \ldots\ . \end{gathered} \tag{33}$$

Для випадку, коли $0 \in \sigma_s\left(L_{p,b}\right)$ через $v_{s,0}\left(x, L_{p,b}\right)$, позначимо відповідну власну функцію оператора $L_{p,b}$, $p = 1, \ldots, n$, $b \in \mathbb{R}$.

Крайові умови (20), (21), (29) є сильно регулярними. Тому за теоремою Кессельмана–Михайлова [1, 2], система $V\left(L_{p,b}\right)$ є базисом Рісса простору $L_2\left(0,1\right)$.

Із припущення $m_p \notin M_1$ та припущень $A_1 - A_4$ випливає існування такого числа $s \in \{1,\ldots,2n\}$, що $m_s = 2n-1-m_{n+p}$, $p=1,\ldots,n$.

Тому задача, яка є спряженою до задачі (1), (20), (21), (29), визначається співвідношеннями

$$L_0 z \equiv (-1)^n z^{(2n)}\left(x\right) = f\left(x\right), \; x \in \left(0,1\right), \tag{34}$$

$$\begin{gathered} l_j^2 z \equiv l_j^0 z = z^{(m_j)}\left(0\right) + (-1)^{(m_j)} z^{(m_j)}\left(1\right) = 0, \\ j \neq s, \; j,s = 1,\ldots,n, \end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered} l_s^2 z = b\left(z^{(m_s)}\left(1\right) + (-1)^{m_s} z^{(m_s)}\left(0\right)\right) + \\ \left(z^{(m_s)}\left(1\right) - (-1)^{m_s} z^{(m_s)}\left(0\right)\right) = 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad s \in \{1,\ldots,n\}, \end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered} l_{n+j}^2 z \equiv l_{n+j}^0 z = z^{(m_{n+j})}\left(0\right) - (-1)^{(m_{n+j})} z^{(m_{n+j})}\left(1\right) = 0, \\ j = 1,\ldots,n. \end{gathered} \tag{37}$$

Визначимо власні функції оператора задачі (34)–(37). Власна функція $v_{0,k}\left(x, L_0\right)$ оператора L_0 задовольняє умовам (35)–(37). Тому власну функцію оператора задачі (34)–(37), яка відповідає власному значенню $\lambda_{0,k}$, визначимо рівністю

$$w_{0,k}\left(x, L_{p,b}\right) = v_{0,k}\left(x, L_0\right), \quad k = 1,2,\ldots\,. \tag{38}$$

Власну функцію $w_{1,k}\left(x, L_{p,b}\right)$ оператора задачі (34)–(37) визначимо сумою

$$w_{1,k}\left(x, L_{p,b}\right) = v_{1,k}\left(x, L_0\right) + c_{1,p,b,k} y_{1,r_p}\left(x, \rho_{1,k}\right), \tag{39}$$

$$r_p = 2n-1-m_{n+p}, \quad k = 1,2,\ldots, b \in \mathbb{R}, \quad p = 1,\ldots,n.$$

Підставляючи вираз (39) в умови (36), знаходимо невідомі параметри $c_{1,p,b,k}$:

$$c_{1,p,b,k} = -b\left(1 + (-1)^{r_p} y_{1,r_p}\left(1, \rho_{1,k}\right)\right)^{-1} \left(1 - (-1)^{r_p} v_{1,k}\left(1, \rho_{1,k}\right)\right),$$

де $k = 1,2,\ldots$, $b \in \mathbb{R}$, $p = 1,2,\ldots,n$. Як відомо [21, с. 373–374], система, яка є біортогональною до базису Рісса гільбертового простору, також є базисом Рісса цього простору. Отже, $W\left(L_{p,b}\right)$ – система власних функцій задачі (34)–(37) є базисом Рісса простору $L_2\left(0,1\right)$. ■

Зауваження 2. Оцінюючи розвинення в ряди Фур'є за системами $V\left(L_{p,b}\right)$ та $W\left(L_{p,b}\right)$ можна показати, що вони є системами Бесселя [5] для кожного $b \in \mathbb{R}$, $p = 1,\ldots,n$.

Нехай $L_p = L_{p,1}$, $R_p \equiv E + S_p : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – оператор, який відображає систему $V(L_0)$ у систему $V(L_p)$, де $S_p : H_0 \to H_1$, $S_p : H_1 \to 0$, $p = 1, \ldots, n$.

Тому, $R_p^{-1} = E - S_p : L_2(0,1) \to L_2(0,1), R_p = e^{S_p}$, $p = 1, \ldots, n$.

Зауваження 3. З теореми 2 отримуємо, що $R_p^{-1}, R_p \in B(L_2(0,1))$, $p = 1, \ldots, n$.

Нехай $m_{n+p} \in M_0 \cap M_1$. З формули (33) маємо

$$c_{p,b}(\rho_{0,k}) = -l_{m_{n+p},b} v_{0,k} \left(l^0_{n+p} y_{1,n+p}\right)^{-1} = 0, \quad p = 1, \ldots, n, \ \ b \in \mathbb{R}.$$

Отже, $L_{p,b} = L_0$, тобто якщо $m_{n+p} \in M_0 \cap M_1$, тоді не існує нетривіальних збурень (29) крайових умов (3), $p = 1, \ldots, n$.

Приклад 1. Нехай $m_p = m_{n+p} = n - p$, $p = 1, \ldots, n$. Умови (2), (3) еквівалентні умовам Діріхле

$$y^{(m)}(0) = y^{(m)}(1) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

У цьому випадку не існує регулярних за Біркгофом двоточкових збурень крайових умов (2), (3) порядку $q \le m_{n+p}$, тобто завжди $q > m_{n+p}$, $p = 1, \ldots, n$.

Приклад 2. Нехай $m_p = m_{n+p} = 2n - p$, $p = 1, \ldots, n$. Умови (2), (3) еквівалентні умовам Неймана

$$y^{(m)}(0) = y^{(m)}(1) = 0, \quad m = n, n+1 \ldots, 2n-1.$$

У цьому випадку порядок регулярних за Біргофом двоточкових збурень крайових умов (2), (3) справджує нерівність $m_{n+p} > q$, $p = 1, \ldots, n$.

Побудуємо задачу зі сильно регулярними умовами, для яких існують відповідні нетривіальні збурення.

Розглянемо для рівняння (1) задачу з крайовими умовами

$$l^3_j y = l^0_j y = 0, \ j = 1, \ldots, n, \tag{40}$$

$$l^3_{n+j} y \equiv l^0_{n+j} y = 0, \ j \ne p, \ j = 1, \ldots, n, \tag{41}$$

$$\begin{gathered} l^3_{n+p} y \equiv l^0_{n+r_p} y + l_{0,p} y = 0, \ r_p = 2n - 1 - m_{n+p}, \\ l_{0,p} y \equiv b\left(y^{(r_p)}(0) + (-1)^{r_p} y^{(r_p)}(1)\right), \ b \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{42}$$

Нехай $L^1_{p,b}$ – оператор задачі. Для випадку $b = 0$ оператор самоспряженої задачі (1), (40)–(42) позначимо $L^1_p = L^1_{p,0}, p = 1, \ldots, n$.

Припущення A_4. Надалі припускаємо, що крайові умови (40)–(42) є сильно регулярними для $b = 0$.

Приклад 3. Нехай $n = 2$. Оператор L_0 породжується умовами Діріхле

$$\begin{array}{ll} y^{(1)}(0) - y^{(1)}(1) = 0, & y(0) + y(1) = 0, \\ y^{(1)}(0) + y^{(1)}(1) = 0, & y(0) - y(1) = 0. \end{array} \tag{43}$$

Для оператора L_0^1 визначимо крайові умови

$$\begin{array}{ll} y(0) + y(1) = 0, & y^{(2)}(0) + y^{(2)}(1) = 0, \\ y(0) - y(1) = 0, & y^{(1)}(0) + y^{(1)}(1) = 0. \end{array} \tag{44}$$

Отже, припущення A_4 виконується. Якщо оператор L_0 породжується умовами (44), тоді для оператора L_0^1 отримуємо не сильно регулярні за Біркгофом крайові умови антиперіодичності:

$$\begin{array}{c} y(0) + y(1) = 0, y^{(2)}(0) + y^{(2)}(1) = 0, \\ y^{(1)}(0) + y^{(1)}(1), y^{(3)}(0) + y^{(3)}(1) = 0. \end{array} \tag{45}$$

Отже, припущення A_4 не виконується.

Нехай $L_{0,s}^1$ – звуження оператора L_0^1 на підпростір H_s, $L_0^1 = L_{0,0}^1 + L_{0,1}^1$, $s = 0, 1$, $r = 0, 1$. Враховуючи, що крайові умови (2) та (40) співпадають, отримуємо, що $L_{0,0}^1 = L_{0,0}$.

Отже,

1. $\sigma_0\left(L_0^1\right) = \sigma_0(L_0)$ – спільна частина точкового спектра операторів L_0 та L_0^1;

2. власні функції, які відповідають спільним власним значенням, співпадають

$$v_{0,k}\left(x, L_0^1\right) = v_{0,k}(x, L_0), k = 1, 2, \dots\ ;$$

3. функції (13) операторів L_0 та L_0^1 співпадають;

4. власні функції $v_{1,k}\left(x, L_{p,b}^1\right)$, $k = 1, \dots$, операторів L_0^1 та $L_{p,b}^1$ співпадають

$$v_{1,k}\left(x, L_{p,b}^1\right) \equiv v_{1,k}\left(x, L_0^1\right),\ k = 1, 2, \dots,\ p = 1, 2, \dots, n,\ b \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

Зауваження 4. У випадку, коли $m_{n+p} \in M_1$, за умови виконання припущення $A_1 - A_4$, усі твердження є правильними, якщо замінити оператор L_0 на L_0^1, $p = 1, \dots, n$.

Означимо власні функції $v_{0,k}\left(x, L_{p,b}^1\right)$ оператора $L_{p,b}^1$ співвідношеннями

$$\begin{array}{c} v_{0,k}\left(x, L_{p,b}^1\right) = v_{0,k}(x) + c_{p,k,b}^1 y_{1,n+p}(x, \rho_{0,m}), \\ p = 1, \dots, n,\ b \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \dots, \end{array} \tag{47}$$

де

$$c_{p,k,b}^1 = -l_{0,p} v_{0,k}\left(l_{n+p}^3 y_{1,n+p}\right)^{-1},\ k = 1, \dots,\ p = 1, 2, \dots, n,\ b \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

Для оператора $L^1_{p,b}$ теореми 1, 2 усі міркування, які стосувались оператора $L_{p,b}$, є правильними. Зокрема,

$$\left|c^1_{p,k,b}\right| \le K_9 \left|b\right|, \; k = 1, \ldots, \; p = 1, 2, \ldots, n, \; b \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

Отже, система $V\left(L^1_{p,b}\right)$ – базис Рісса простору $L_2\left(0,1\right)$, $p = 1, \ldots, n$.

У випадку, коли $0 \in \sigma_s\left(L_p\right)$, відповідну власну функцію позначимо через $v_{s,0}\left(x, L_p\right)$.

Вивчимо випадок, коли для крайових умов (2), (3) $m_{n+p} \in M_0 \cap M_1$ єдиний елемент цієї множини та відповідні умови (40) – (42) є не сильно регулярними. Побудуємо крайову задачу оператор якої є квадратом оператора $L_{p,b}$, $p = 1, 2, \ldots, n$, $b \in \mathbb{R}$.

Розглянемо для рівняння

$$y^{(4n)}\left(x\right) = f\left(x\right)$$

крайову задачу з умовами

$$\begin{gathered}
y^{(m_j)}\left(0\right) + \left(-1\right)^{(m_j)} y^{(m_j)}\left(1\right) = 0, \\
y^{(2n+m_j)}\left(0\right) + \left(-1\right)^{(m_j)} y^{(2n+m_j)}\left(1\right) = 0, \; j = 1, \ldots, n, \\
y^{(m_{n+p})}\left(0\right) - \left(-1\right)^{m_{n+p}} y^{(m_{n+p})}\left(1\right) + \\
+b\left(y^{(m_{n+p})}\left(0\right) + \left(-1\right)^{m_{n+p}} y^{(m_{n+p})}\left(1\right)\right) = 0, \; p = 1, 2, \ldots, n, \; b \in \mathbb{R}, \\
y^{(2n-m_{n+p})}\left(0\right) - \left(-1\right)^{m_{n+p}} y^{(2n-m_{n+p})}\left(1\right) + \\
+b\left(y^{(2n-m_{n+p})}\left(0\right) + \left(-1\right)^{m_{n+p}} y^{(2n-m_{n+p})}\left(1\right)\right) = 0, \; p = 1, \ldots, n, \; b \in \mathbb{R}.
\end{gathered}$$

Відповідна множина $M_0 \cap M_1$ містить 2 елементи. Згідно з теоремою 2, система власних функцій $V\left(A\right)$ оператора A цієї задачі є базисом Рісса в просторі $L_2\left(0,1\right)$. Оператор A є квадратом оператора $L_{p,b}$, тому $V\left(L_{p,b}\right) = V\left(A\right)$. Отже, система функцій $V\left(L_{p,b}\right)$ є базисом Рісса простору $L_2\left(0,1\right)$, $p = 1, \ldots, n$, $b \in \mathbb{R}$.

Таким чином, при виконанні припущень A_1–A_4, одна зі систем функцій $V\left(L^1_{p,b}\right)$ або $V\left(L^1_{p,b}\right)$ є базисом Рісса, $p = 1, \ldots, n$, $b \in \mathbb{R}$.

5. Оператори перетворення

Розглянемо оператор $B_p : L_2\left(0,1\right) \to L_2\left(0,1\right)$, $p = 1, \ldots, n$, власні значення якого співпадають з власними значеннями оператора L_0, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$\begin{gathered}
v_{1,k}\left(x, B_p\right) = v_{1,k}\left(x, L_0\right), \\
v_{0,k}\left(x, B_p\right) = v_{0,k}\left(x, L_0\right) + c_k\left(B_p\right) y_{2,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right), \\
c_k\left(B_p\right) \in \mathbb{R}, \; k = 1, 2, \ldots, \; p = 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{50}$$

Оператор, який відображає $V(L_0)$ у систему $V(B_p)$ власних функцій оператора B_p, позначимо через $R(B_p)$, $p = 1, \ldots, n$.

Нехай $O(L_p)$ – множина операторів перетворення $R(B_p)$, для яких власні функції оператора B_p визначені за формулами (50), $O_c(L_p) \equiv O(L_p) \cap B(L_2(0,1))$, $p = 1, \ldots, n$.

Лема 2. *Система функцій $V(B_p)$ є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$ тоді та лише тоді, коли $\{c_k(B_p)\} \subset \mathbb{R}$ є обмеженою, $p = 1, \ldots, n$.*

Доведення. Нехай система $V(B_p)$ є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$. Тоді система $V(B_p)$ та базис Рісса $V(L_p)$ є майже нормованими

$$\begin{gathered} K_{10} \leq \|v_{0,k}(x, B_p); L_2(0,1)\| = \\ = 1 + |c_k(B_p)| \, \|y_{2,n+p}(x, \rho_{0,k}); L_2(0,1)\| \leq K_{11}, \end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered} K_{12} \leq \|y_{2,n+p}(x, \rho_{0,k}); L_2(0,1)\| \leq K_{13}, \\ p = 1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots\ . \end{gathered} \tag{52}$$

Тому

$$\begin{gathered} |c_k(B_p)| \leq K_{14}, K_{14} = (K_{12} - 1)(K_{13})^{-1}, \\ p = 1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots\ . \end{gathered} \tag{53}$$

Нехай послідовність $\{c_k(B_p)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — обмежена. Розвинемо довільну функцію $f \in L_2(0,1)$ в ряд Фур'є за системою $V(L_p)$:

$$f = \sum_{j,k} f_v^j v_{j,k}(x, L_p), \quad p = 1, \ldots, n.$$

Розглянемо

$$R(B_p) f = \sum_{j,m} f_m^j R(B_p) v_{j,m}(x, A_p) = \sum_{j,m} f_m^j v_{j,m}(x, B_p), \ p = 1, \ldots, n.$$

Із рівності (31) для $b = 1$ маємо

$$y_{2,n+p}(x, \rho_{0,k}) = v_{0,k}(x, L_p) - v_{0,k}(x, L_0), \ p = 1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots\ .$$

Тому

$$\left\| R(B_p) f; L_2(0,1) \right\|^2 = \left\| \sum_{j,k} f_k^j v_{j,k}(x, B_p); L_2(0,1) \right\|^2 \leq$$

$$\leq 2 \sum_{j,k} \left| f_k^j \right|^2 + 2 \left\| \sum_{j,k} f_k^0 c_k(B_p) \left(v_{0,k}(x, A_p) - v_{0,k}(x, A_0) \right); L_2(0,1) \right\|^2 \leq$$

$$\leq 2 \left(1 + (K_{15})^2 \|S_p; B(L_2(0,1))\|^2 \right) \sum_{j,k} \left| f_k^j \right|^2 < \infty,$$

$$p = 1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots, \ b \in \mathbb{R}.$$

Отже, оператор $R(B_p) : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ є обмеженим. З рівності $R(B_p) + R^{-1}(B_p) = 2E$ отримуємо обмеженість оператора $R^{-1}(B_p)$, $p = 1, \ldots, n$. Тому система $V(B_p)$, $p = 1, \ldots, n$, є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$ за означенням [21, с. 373]. Отже, лему доведено. ■

6. Задачі з нерегулярними за Біркгофом крайовими умовами

Нехай $0 \notin \sigma(L_p)$, $m_{n+p} \notin M_1$, $H_p^\theta \equiv \left\{y \in L_2(0,1) : L_p^\theta \equiv (L_p)^\theta \in \in L_2(0,1)\right\}$, $\theta \geq 0$, – гільбертовий простір функцій зі скалярним добутком та нормою відповідно

$$\left(u, y; H_p^\theta\right) \equiv \left(u, y; L_2(0,1)\right) + \left(L_p^\theta u, L_p^\theta y; L_2(0,1)\right),\ p = 1, \ldots, n,\ \theta \geq 0,$$

$$\left\|u; H_p^\theta\right\|^2 \equiv \left(u, u; H_p^\theta\right) \equiv (u, u; L_2(0,1)) + \left((L_p)^\theta u, (L_p)^\theta u; L_2(0,1)\right),$$
$$p = 1, \ldots, n,\ \theta \geq 0.$$

Нехай $f \in H_p^\theta$,

$$f = \sum\nolimits_{s,k} f_k^s v_{s,k}(x, L_p),\ f_k^s \equiv (f, w_{s,k}(x, L_p); L_2(0,1)),\quad k = 1, 2, \ldots,\ s = 0, 1, \tag{54}$$

$$L_p^\theta f = \sum\nolimits_{r=0}^\infty \lambda_p^\theta f_r v_r(x, L_p),\ k = 1, 2, \ldots,\ s = 0, 1,\ p = 1, \ldots, n, \tag{55}$$

$$v_{0,m}(x, L_{p,q,b}) = v_{0,m}(x, L_0) + c_{p,q,b}^1\left(\rho_{0,k}\right) y_{2,n+p}\left(x, \rho_{0,k}\right),\quad k = 1, 2, \ldots,\ s = 0, 1,\ b \in \mathbb{R}, \tag{56}$$

$$\left|c_{p,q,b}^1\left(\rho_{0,k}\right)\right| \leq K_{16}|b|\left(\rho_{0,k}\right)^{q-m_{n+p}},\quad b \in \mathbb{R},\ p = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots . \tag{57}$$

Розглянемо випадок, коли $q > m_{n+p}$, тобто крайові умови (20) – (22) є нерегулярними за Біркгофом.

Теорема 3. *Нехай* $0 \notin \sigma(L_p)$, $m_{n+p} \notin M_1$, $q > m_{n+p}$, $f \in H_p^\theta, \theta(p) \geq \frac{q-m_{n+p}}{2n}$. *Тоді справджується нерівність*

$$\left\|\sum\nolimits_{s,k} f_k^s v_{s,k}(x, L_{p,q,b}); L_2(0,1)\right\|^2 \leq K\left\|f; H_p^\theta\right\|^2,\quad p = 1, \ldots, n,\ b \in \mathbb{R},\ q \in M. \tag{58}$$

Доведення. Якщо $f = f_0 \in H_p^\theta \bigcap H_0$, то з формул (33)–(35) отримуємо

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{k=0}^\infty \left(f_k^0 v_{0,k}(x, L_{p,q,b}); L_2(0,1)\right)^2 = \\ = \sum\nolimits_{k=0}^\infty \left(f_k^0 v_{0,k}(x, L_0); L_2(0,1)\right)^2 = \|f; L_2(0,1)\|^2 \leq \left\|f; H_p^\theta\right\|^2, \\ p = 1, \ldots, n,\ b \in \mathbb{R},\ q \in M.\end{gathered} \tag{59}$$

Аналогічно, для $f = f_1 \in H_1^\theta \bigcap H_1$ маємо

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{k=1}^\infty \left\|\left(f_k^0, v_{0,k}(x, L_{p,q,b}); L_2(0,1)\right)\right\|^2 = \\ = \sum\nolimits_{k=1}^\infty \left\|\left(f_k^0\left(1 - c_{p,q,b,k}\right), v_{0,k}(x, L_0); L_2(0,1)\right) + \right. \\ \left. + \left(f_k^0 c_{p,q,b,k}, v_{0,k}(x, L_p); L_2(0,1)\right)\right\|^2 \leq K_{18}\left\|f; H_p^\theta\right\|^2,\end{gathered} \tag{60}$$

$$K_{17} = 2\left(1 + |b|\, K_{16}\right)^2, p = 1, 2, \ldots, n, b \in \mathbb{R}, q \in M.$$

З нерівностей (59), (60) отримаємо оцінку (58) для $2K_{17} \le K$. ■

7. Загальна крайова задача

Для диференціального рівняння (1) розглянемо нелокальну задачу з умовами

$$l_r^4 y \equiv l_r^0 y = y^{(m_r)}(0) + (-1)^{(m_r)} y^{(m_r)}(1) = 0,\ r = 1, \ldots, n, \tag{61}$$

$$l_{n+p}^4 y = l_{n+p}^0 y + l_p y = 0,\ p = 1, \ldots, n, \tag{62}$$

$$\begin{gathered} l_{n+p} y \equiv y^{(m_{n+p})}(0) - y^{(m_{n+p})}(1) + \\ + \sum_{q=0}^{2n-1} b_{p,q}\left(y^{(q)}(0) + (-1)^q y^{(q)}(1)\right) = 0, \\ b_{p,q} \in \mathbb{R},\ p = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{63}$$

Нехай L: $L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ оператор задачі (1), (61)–(63).

$$Ly \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), y \in D(L) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(L) \equiv \left\{y \in W_2^{2n}(0,1) : l_j^4 y = 0,\ j = 1, \ldots, 2n\right\}.$$

Розглянемо n задач, в кожній з яких збурюється лише одна з умов l_{n+p}^4, $p = 1, \ldots, n$,

$$l_j^5 y = l_j^0 y = 0,\ j = 1, \ldots, 2n,\ j \ne n + p, \tag{64}$$

$$l_{n+p}^5 y \equiv l_{n+p}^4 = 0,\ p = 1, \ldots, n. \tag{65}$$

Нехай B^p: $L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ – оператор задачі (1), (64)–(65), $V(B^p) \equiv \{v_{i,k}(x, B^p) \in D(B^p), i = 0, 1, k = 1, 2, \ldots\}$ – система власних функцій оператора B^p, $R(B^p) = E + S(B^p)$ – оператор перетворення $R(B^p) :$ $V(L_0) \to V(B^p)$, якщо $m_{n+p} \notin M_1$ та $R(B^p) : V\left(A_0^1\right) \to V(B^p)$ за умови $m_{n+p} \in M_1$, $p = 1, \ldots, n$.

Кожну задачу (1), (64) – (65) поділимо на простіші так, що умова (65) має вигляд $y^{(m_{n+p})}(0) - y^{(m_{n+p})}(1) + b_{p,q}\left(y^{(q)}(0) + (-1)^{(q)} y^{(q)}(1)\right)$. Відповідний оператор позначимо через $B^{p,q}$, $q \in M$, $p = 1, \ldots, n$. Отже, $B^{p,q} \equiv A_{p,q,b_{p,q}}$. Тому $R(B^{p,q}) \in O(L_p)$, якщо $m_{n+p} \notin M_1$ та $R(B^{p,q}) \in O\left(L_p^1\right)$ за умови $m_{n+p} \in M_1$, $p = 1, \ldots, n$.

Нехай $G(L_0)$ – множина операторів $R = E + S$ таких, що $S : H_0 \to H_1$, $S : H_1 \to 0$, та система функцій $\{Rv_{i,k} \in L_2(0,1) :\ v_{i,k}(x) \in V(L_0)\}$ є повною і мінімальною в просторі $L_2(0,1)$. Через $G_c(L_0)$ позначимо всі обмежені оператори з множини $G(L_0)$. З властивості $S^2 = 0$ отримаємо, що $R = e^S$. Тому множина $G(L_0)$ є абелевою групою, яка містить абелеву підгрупу $G_c(L_0)$.

Отже, для будь-яких операторів $R_j = E + S_j \in G(L_0)$, $j = 1, \ldots, d$, $d \in \mathbb{N}$, справджується рівність

$$\prod_{j=1}^{d} R_j = \prod_{j=1}^{d} (E + S_j) = E + \sum_{j=1}^{d} S_j, \ d \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

Тому, враховуючи розвинення (63), отримаємо

$$E + S(B^p) = \prod_{q=0}^{2n-1} (E + S(B^{p,q})) = E + \sum_{q=0}^{2n-1} S(B^{p,q}), \ p = 1, \ldots, n. \tag{67}$$

Оператори $R(B^p)$ належать $O(B_p) \cap G(L_0)$ або $O(B_p) \cap G\left(L_0^1\right)$, $p = 1, \ldots, n$. Елементи цих груп також комутують. Тому оператор $R(L)$ можна подати добутком

$$R(L) = \prod_{p=1}^{n} \prod_{q=0}^{2n-1} (E + S(B^{p,q})) = E + \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=0}^{2n-1} S(B^{p,q}). \tag{68}$$

Таким чином, встановлена

Теорема 4. *Нехай виконуються припущення A_1–A_4. Тоді для довільних $b_{p,q} \in \mathbb{R}$, $p \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in M$, множина власних значень $\sigma(L)$ оператора L співпадає з $\sigma(L_0)$. Система функцій $V(L)$ є повною та мінімальною в просторі $L_2(0,1)$.*

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 4 і $q \le m_{n+p}$. Тоді система функцій $V(L)$ є базисом Рісса в просторі $L_2(0,1)$.*

Доведення. Нехай $m_{n+p} \notin M_1$. З нерівності (57), припущення теореми, леми 2 та рівності (66) отримуємо: $R(B^p) \in G_c(L_0)$, $p = 1, \ldots, n$.

Якщо $m_{n+p} \in M_1$, то аналогічними міркуваннями доводимо включення $R(B^p) \in G_c\left(L_0^1\right)$, $p = 1, \ldots, n$.

Отже, з рівності (68) випливає включення $R(L) \in B(L_2(0,1))$. ■

8. Висновки

Отже, в роботі отримані наступні результати:

1) визначено нові класи несамоспряжених крайових задач, побудовано системи кореневих функцій, визначено спектр таких задач;

2) сформульовано достатні умови повноти та базисності за Ріссом системи кореневих функцій досліджуваних задач;

3) встановлено умови збіжності розкладу функції у ряд за системою кореневих функцій нерегулярних за Біркгофом крайових задач.

1. *Mikhailov V.P.* Riesz basis in $L_2[0,1]$ // Doklady AN SSSR. – 1962. – 144, No 5. – P. 981–984.

2. *Kessel'man G.M.* Unconditional convergence of the eigenvalues expansions of some differential operators // Izvestija Vyshsih Ucebnyh Zavedeniy. – Matematika – 1964. – 39, No 2. – P. 82–93.

3. *Shkalikov A. A.* On the basis problem on the eigenfunctinons of an ordinary differential operator // Uspekhi Math. Nauk. – 1979. – 34, No 5. – P. 235–236.

4. *Il'in V.A.* Existence of a reduced system of eigen–and associated functions for a nonself-adjoint ordinary differential operator// Proc. Steklov Inst. Math. – 1979. – Vol. 142. – P. 157–164.

5. *Il'in V.A., Kritskov L.V.* Properties of spectral expansions corresponding to non self-adjoint differential operators // J. Math. Sci. (N.Y.) – 2003. – Vol. 116. – P. 3489–3550.

6. *Il'in V.A.* On a connection between the form of the boundary conditions and the basis property and the property of equiconvergence with a trigonometric series of expansions in root functions of a nonselfadjoint differential operator // Differ. Equations. – 1994. – 30, No. 9. – P. 1516–1529.

7. *Khromov A.P.* Expansion in eigenfunctions of ordinary linear differential operators with irregular decomposing boundary conditions // Mat. Sb. – 1966. – 112, No 3. – P. 310–329.

8. *Shkalikov A.A.* The completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular-separated boundary conditions // Funct. Anal. Appl. – 1976. – 10, No 4. – P. 305–316.

9. *Khromov A.P.* Differential operator with irregular splitting boundary conditions // Mat. Zametki. – 1976. – **19**, No 5. – P. 763–772.

10. *Kostyuchenko A.G., Shkalikov A.A.* Summability of eigenfunction expansions of differential operators and convolution operators // Funct. Anal. Appl. – 1978. – 12, No 4. – P. 262–276.

11. *Trushin Yu.* Summability of eigenfunction expansions of differential and integral operators // Mat. Zametki. – 1993. – 54, No 3. – P. 114–122.

12. *Veliev O.A.* On the non selfadjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditons // Israel Journal of Mathematics. – 2010. – 176. – P. 195–207.

13. *Tkachenko V.A.* Eigenfunction expansions associated with one-dimensional periodic differential operators of order $2n$ // Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 2007. – 41, No 1. – P. 66–89.

14. *Shkalikov A.A.* O bazisnosti sobstvennykh funktsii obyknovennykh differentsialnykh operatorov s integralnymi kraevymi usloviyami // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. – 1982. 6. – P. 41–51.

15. *Kanguzhin B.E., Nurakhmetov D.B., Tokmagambetov N.E.* Approximate properties of the root functions generated by the correctly solvable boundary value problems for higher order ordinary differential equations // Ufimsk. Mat. Zh. – 2011. – 3, No 3. – P. 80–92.

16. *Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N.E.* Uniqueness theorem of boundary inverse problems of differential operators on an interval // Vestnik KaGU, ser. matem. Mech., Inf. – 2014. – 80, No 1.

17. *Shiryaev E.A.* Dissipative boundary conditions for ordinary differential operators // Mat. Zametki. – 2005. – 77, No 6. – P. 950–954.

18. *Lomov I. S.* Estimates jf speed of convergence and equiconvergence of spectral decomposition of ordinary differential operators// Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. – 2015. – 15, No4. – P. 405–418.

19. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, – 1993. – 231 с.

20. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

21. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, – 1969. – 326 с.

22. *Salaff S.* Regular boundary conditions for ordinary differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 134, No. 2. – P. 355–373.

Petro Kalenyuk, Yaroslav Baranetskyi, Lubov Kolyasa

NONLOCAL BOUNDARY PROBLEM FOR THE OPERATOR OF DIFFERENTIATION OF EVEN ORDER

The spectral properties of the non-self-adjoint problem generated by nonlocal boundary conditions for the differentiation operator of order 2n are investigated. The cases of regular and irregular Birkhoff boundary conditions are studied. A system of root functions of the problem and elements of biorthogonal systems are constructed. Sufficient conditions are obtained under which these systems are complete and under some additional assumptions form a Riesz basis.

UDC 512.643.4

Ivan Kyrchei [1]

EXPLICIT REPRESENTATION FORMULAS FOR SOLUTIONS TO SYSTEMS OF QUATERNION MATRIX EQUATIONS

Within the framework of the theory of column-row determinants, we get explicit determinantal representation formulas (analogs of Cramer's rule) for solutions to the systems of quaternion matrix equations, $\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1$, $\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2$, *and* $\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1$, $\mathbf{A}_2\mathbf{X} = \mathbf{C}_2$.

Throughout this paper, we denote the real number field by $\mathbb{R}$, the set of all $m \times n$ matrices over the quaternion skew field

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \,|\, i^2 = j^2 = k^2 = -1,\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

by $\mathbb{H}^{m\times n}$, and by $\mathbb{H}_r^{m\times n}$ the set of all $m \times n$ matrices over $\mathbb{H}$ with a rank r. Let $\mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ be the ring of $n \times n$ quaternion matrices. For $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times m}$, the symbols $\mathbf{A}^*$ stands for the conjugate transpose (Hermitian adjoint) matrix of $\mathbf{A}$. The matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ is Hermitian if $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.

A generalized inverse of a given matrix means a the notion of matrix that exists for a larger class of matrices than the nonsingular matrices. It has some properties of the usual inverse, and agrees with the inverse when the given matrix happens to be nonsingular. The most famous generalized inverse is the Moore-Penrose inverse. The Moore-Penrose inverse of $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, denoted by $\mathbf{A}^\dagger$, is the unique matrix $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times m}$ satisfying the following equations

$$1)\,\mathbf{AXA} = \mathbf{A};\quad 2)\,\mathbf{XAX} = \mathbf{X};\quad 3)\ (\mathbf{AX})^* = \mathbf{AX};\quad 4)\ (\mathbf{XA})^* = \mathbf{XA}.$$

The determinantal representation of the usual inverse is the matrix with the cofactors in the entries that suggests a direct method of finding of inverse and makes it applicable through Cramer's rule to systems of linear equations. The same is desirable for the generalized inverses. But there is no one as unambiguous as the usual inverse even for complex or real matrices. Therefore, there are various determinantal representations of generalized inverses because of looking for their more applicable explicit expressions (see, e.g. [1]).

The understanding of the problem of the determinantal representation of the generalized inverses as well as of solutions and of generalized inverse

[1] *Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, kyrchei@online.ua*

solutions of quaternion matrix equations only now comes consideration due to the theory of column-row determinants introduced in [2, 3].

In this paper we investigate the following two systems of quaternion matrix equations,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X} = \mathbf{C}_2 \end{cases} \tag{2}$$

Since Cecioni [4] in 1910 gave necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to (1), there have been many papers presenting various solutions to systems (1) and (2), such as Hermitian solution, minimal norm solution, least-squares solution, the maximal and minimal rank solutions, bisymmetric solution, positive semidefinite solution, generalized reflexive solution, and so on (see, e.g., [5–13]).

The main goal of the paper is to derive the determinantal representations of general solutions to the quaternion systems (1) and (2) by using previously obtained determinantal representations of the Moore-Penrose inverse.

At the beginning, we present some needed requisites from the theory of column-row determinants. For $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$, we define n row determinants and n column determinants as follows.

Suppose S_n is the symmetric group on the set $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

Definition 1. *The ith row determinant of $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ is defined for all $i = 1, \ldots, n$ by putting*

$$\mathrm{rdet}_i \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} (a_{i\, i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+l_1} i}) \ldots (a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}),$$
$$\sigma = (i\, i_{k_1} i_{k_1+1} \ldots i_{k_1+l_1}) (i_{k_2} i_{k_2+1} \ldots i_{k_2+l_2}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+l_r}),$$

with conditions $i_{k_2} < i_{k_3} < \ldots < i_{k_r}$ and $i_{k_t} < i_{k_t+s}$ for all $t = 2, \ldots, r$ and $s = 1, \ldots, l_t$.

Definition 2. *The jth column determinant of $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ is defined for all $j = 1, \ldots, n$ by putting*

$$\mathrm{cdet}_j \mathbf{A} = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{n-r} (a_{j_{k_r} j_{k_r+l_r}} \ldots a_{j_{k_r+1} i_{k_r}}) \ldots (a_{j\, j_{k_1+l_1}} \ldots a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} a_{j_{k_1} j}),$$
$$\tau = (j_{k_r+l_r} \ldots j_{k_r+1} j_{k_r}) \ldots (j_{k_2+l_2} \ldots j_{k_2+1} j_{k_2}) \; (j_{k_1+l_1} \ldots j_{k_1+1} j_{k_1} j),$$

with conditions, $j_{k_2} < j_{k_3} < \ldots < j_{k_r}$ and $j_{k_t} < j_{k_t+s}$ for $t = 2, \ldots, r$ and $s = 1, \ldots, l_t$.

Theorem 1 ([2]). *If* $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ *is Hermitian, then* $\mathrm{rdet}_1\mathbf{A} = \cdots = \mathrm{rdet}_n\mathbf{A} = \mathrm{cdet}_1\mathbf{A} = \cdots = \mathrm{cdet}_n\mathbf{A} \in \mathbb{R}$.

Due to Theorem 1, we can define the determinant of a Hermitian matrix $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ by putting, $\det \mathbf{A} := \mathrm{rdet}_i\, \mathbf{A} = \mathrm{cdet}_i\, \mathbf{A}$, for all $i = 1, \ldots, n$.

The determinant of a Hermitian matrix has properties similar to those of the usual determinant. They were completely explored by means of row and column determinants in [2]. In particular, within the framework of the theory of column-row determinants, the determinantal representations of a quaternion inverse have been obtained via analogs of the classical adjoint matrix [3].

We shall use the following notations. Let $\alpha := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ and $\beta := \{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ be subsets of the order $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. By $\mathbf{A}_{\beta}^{\alpha}$ denote the submatrix of $\mathbf{A}$ defined by the rows indexed by α and columns indexed by β. Then, $\mathbf{A}_{\alpha}^{\alpha}$ denotes a principal submatrix defined by the rows and columns indexed by α. If $\mathbf{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{H})$ is Hermitian, then $\det\mathbf{A}_{\alpha}^{\alpha}$ is the corresponding principal minor of $\det \mathbf{A}$, since $\mathbf{A}_{\alpha}^{\alpha}$ is Hermitian as well. For $1 \leq k \leq n$, the collection of strictly increasing sequences of k integers chosen from $\{1, \ldots, n\}$ is denoted by $L_{k,n} := \{\, \alpha : \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\,,\ 1 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k \leq n\}$. For fixed $i \in \alpha$ and $j \in \beta$, let $I_{r,\,m}\{i\} := \{\, \alpha : \alpha \in L_{r,m}, i \in \alpha\}$, $\quad J_{r,\,n}\{j\} := \{\, \beta : \beta \in L_{r,n}, j \in \beta\}$.

Let $\mathbf{a}_{.j}$ be the jth column and $\mathbf{a}_{i.}$ be the ith row of $\mathbf{A}$. Similarly, denote by $\mathbf{a}_{.j}^{*}$ and $\mathbf{a}_{i.}^{*}$ the jth column and the ith row of $\mathbf{A}^{*}$ respectively. Suppose $\mathbf{A}_{.j}\,(\mathbf{b})$ denotes the matrix obtained from $\mathbf{A}$ by replacing its jth column with the column $\mathbf{b}$, and $\mathbf{A}_{i.}\,(\mathbf{b})$ denotes the matrix obtained from $\mathbf{A}$ by replacing its ith row with the row $\mathbf{b}$.

Theorem 2 ([14]). *If* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$*, then the Moore-Penrose inverse* $\mathbf{A}^{\dagger} = \left(a_{ij}^{\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ *possess the following determinantal representations:*

(i) If $r < \min\{m, n\}$*, then*

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}\right)_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{*}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \det(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{\beta}^{\beta}}, \tag{3}$$

or

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{j\,.}\,(\mathbf{a}_{i.}^{*})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,m}} \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{*})_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{4}$$

(ii) If $r = n$*, then*

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\mathrm{cdet}_i(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{*}\right)}{\det(\mathbf{A}^{*}\mathbf{A})} \tag{5}$$

or (4) when $n < m$.

(iii) If $r = m$, then

$$a_{ij}^{\dagger} = \frac{\mathrm{rdet}_j(\mathbf{AA}^*)_{j\,.}(\mathbf{a}_{i.}^*)}{\det(\mathbf{AA}^*)} \tag{6}$$

or (3) when $m < n$.

Corollary 1. *If $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, where $r < \min\{m,n\}$ or $r = m < n$, then the projection matrix $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} =: \mathbf{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ possess the determinantal representation*

$$p_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}\{i\}} \mathrm{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)_{.\,i}(\dot{\mathbf{a}}_{.j})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,\,n}} \det(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{\beta}^{\beta}}, \tag{7}$$

where $\dot{\mathbf{a}}_{.j}$ is the jth column of $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

Corollary 2. *If $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_r^{m\times n}$, where $r < \min\{m,n\}$ or $r = n < m$, then the projection matrix $\mathbf{AA}^{\dagger} =: \mathbf{Q} = (q_{ij})_{m\times m}$ possess the determinantal representation*

$$q_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}\{j\}} \mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{A}\,\mathbf{A}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,\,m}} \det(\mathbf{AA}^*)_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{8}$$

where $\ddot{\mathbf{a}}_{i.}$ is the ith row of $\mathbf{AA}^* \in \mathbb{H}^{m\times m}$.

The following important projections $\mathbf{L}_A := \mathbf{I}-\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}$ and $\mathbf{R}_A := \mathbf{I}-\mathbf{AA}^{\dagger}$ will be used below.

To prove the main results of the paper we need the following

Lemma 1 ([11]). *Let $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{H}^{n\times s}$ be given and $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times r}$ is to be defined. Then the system*

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2 \end{cases} \tag{9}$$

is consistent if and only if

$$\mathbf{R}_{A_1}\mathbf{C}_1 = \mathbf{0},\ \mathbf{C}_2\mathbf{L}_{B_2} = \mathbf{0},\ \mathbf{A}_1\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{B}_2. \tag{10}$$

Under these conditions, the general solution to (9) can be established as

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{U}\mathbf{R}_{B_2}, \tag{11}$$

where $\mathbf{U}$ is a free matrix over $\mathbb{H}$ with suitable shape.

On the other hand, due to the condition (10), we have,

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}\right) + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{U}\mathbf{R}_{B_2} = \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\left(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}\right) + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{U}\mathbf{R}_{B_2} = \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{R}_{B_2} + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{U}\mathbf{R}_{B_2},$$

Denote by $\|\mathbf{A}\|$ the Frobenius norm of the quaternion matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$. Obviously, the minimum norm partial solution $\mathbf{X}^0$ to (9), i.e. $\|\mathbf{X}_0\| = \min\|\mathbf{X}\|$, is given by

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger}, \tag{12}$$

or

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{\dagger} + \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1\mathbf{R}_{B_2}, \tag{13}$$

Now, we give determinantal representations of $\mathbf{X}_0$. Because of (12), we have the following theorem.

Theorem 3. *Let* $\mathbf{A}_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}_k^{m\times n}$, $\mathbf{B}_2 = \left(b_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}_p^{r\times s}$, $\mathbf{C}_1 = \left(c_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{C}_2 = \left(c_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}^{n\times s}$, *and there exist* $\mathbf{A}_1^{\dagger} = \left(a_{ij}^{(1),\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$, $\mathbf{B}_2^{\dagger} = \left(b_{ij}^{(2),\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{s\times r}$, $\mathbf{L}_{A_1} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_1 =: (l_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$. *Denote* $\mathbf{A}_1^{*}\mathbf{C}_1 =: \hat{\mathbf{C}}_1 = (\hat{c}_{ij}^{(1)}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$ *and* $\mathbf{L}_{A_1}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^{*} =: \hat{\mathbf{C}}_2 = (\hat{c}_{ij}^{(2)}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$.

(i) If $\operatorname{rank}\mathbf{A}_1 = k \le m < n$ *and* $\operatorname{rank}\mathbf{B}_2 = p \le s < r$, *then* $\mathbf{X}^0 = (x_{ij}^0) \in \mathbb{H}^{n\times s}$ *possess the following determinantal representation,*

$$x_{ij}^0 = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left(\left(\mathbf{A}_1^{*}\mathbf{A}_1\right)_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}} \det\left(\mathbf{A}_1^{*}\mathbf{A}_1\right)_{\beta}^{\beta}} + \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{p,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left(\left(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{*}\right)_{j\,.}\left(\hat{\mathbf{c}}_{i\,.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{p,r}} \det\left(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{*}\right)_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{14}$$

where $\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}$ *is the* j*th column of* $\hat{\mathbf{C}}_1$, *and* $\hat{\mathbf{c}}_{i.}^{(2)}$ *is the* i*th row of* $\hat{\mathbf{C}}_2$.

(ii) If $\operatorname{rank}\mathbf{A}_1 = n$ *and* $\operatorname{rank}\mathbf{B}_2 = r$, *then*

$$x_{ij}^0 = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}_1^{*}\mathbf{A}_1)_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)}{\det(\mathbf{A}_1^{*}\mathbf{A}_1)} + \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{*})_{j.}\left(\hat{\mathbf{c}}_{i\,.}^{(2)}\right)}{\det(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{*})}. \tag{15}$$

(iii) If $\operatorname{rank}\mathbf{A}_1 = k \le m < n$ *and* $\operatorname{rank}\mathbf{B}_2 = r$*, then*

$$x_{ij}^0 = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{\,.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}} \det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{\beta}^{\beta}} + \frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}(\hat{\mathbf{c}}_{i.}^{(2)})}{\det(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)} \tag{16}$$

(iv) If $\operatorname{rank}\mathbf{A}_1 = n$ *and* $\operatorname{rank}\mathbf{B}_2 = p \le s < r$*, then*

$$x_{ij}^0 = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)}{\det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)} + \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{p,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}\left(\hat{\mathbf{c}}_{i.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{p,r}} \det(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{17}$$

Proof. First we note that the matrix $\mathbf{L}_{A_1} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_1$ easily can be obtained for all cases by Theorem 2.

(i) If $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{H}_k^{m\times n}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{H}_p^{r\times s}$ and $k < n$, $p < r$, then the determinantal representations of the Moore-Penrose inverses $\mathbf{A}_1^{\dagger}$ and $\mathbf{B}_2^{\dagger}$ can be chosen by Theorem 2 as follows

$$a_{ij}^{(1),\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{\,.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(1),*}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}} \det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{\beta}^{\beta}}, \tag{18}$$

$$b_{ij}^{(2),\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{p,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j\,.}(\mathbf{b}_{i.}^{(2),*})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{p,r}} \det(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{\alpha}^{\alpha}}. \tag{19}$$

Denote $\mathbf{L}_{A_1}\mathbf{C}_2 =: \widetilde{\mathbf{C}}_2 = (\widetilde{c}_{ij}^{(2)}) \in \mathbb{H}^{n\times s}$. By (12), the entries of $\mathbf{X}^0 = (x_{ij}^0)$ are

$$x_{ij}^0 = \sum_{l=1}^{m} a_{il}^{(1),\dagger} c_{lj}^{(1)} + \sum_{q=1}^{s} \widetilde{c}_{iq}^{(2)} b_{qj}^{(2),\dagger} \tag{20}$$

for all $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., r$. Substituting (18) and (19) in (20), we obtain

$$x_{ij}^0 = \sum_{l=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{\,.\,i}\left(\mathbf{a}_{.l}^{(1),*}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{k,\,n}} \det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{\beta}^{\beta}} \cdot c_{lj}^{1} +$$

$$+\sum_{q=1}^{s}\widetilde{c}_{iq}\cdot\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{p,r}\{j\}}\operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j\,.}(\mathbf{b}_{q.}^{(2),*})\right)\,{}_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{p,r}}\det(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)\,{}_{\alpha}^{\alpha}}.$$

Taking into account that

$$\sum_l \mathbf{a}_{.l}^{(1),*}c_{lj}^{(1)}=\begin{pmatrix}\sum\limits_l a_{1l}^{(1),*}c_{lj}^{(1)}\\ \sum\limits_l a_{2l}^{(1),*}c_{lj}^{(1)}\\ \vdots\\ \sum\limits_l a_{nl}^{(1),*}c_{lj}^{(1)}\end{pmatrix}=\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}$$

and

$$\sum_q \widetilde{c}_{iq}^{(2)}\mathbf{b}_{q.}^{(2),*}=\begin{pmatrix}\sum\limits_k \widetilde{c}_{iq}^{(2)}b_{q1}^{(2),*} & \sum\limits_k \widetilde{c}_{iq}b_{q2}^{(2),*} & \cdots & \sum\limits_k \widetilde{c}_{iq}^{(2)}b_{qn}^{(2),*}\end{pmatrix}=\hat{\mathbf{c}}_{i.}^{(2)},$$

we finally obtain (14).

(ii) In this case, for the determinantal representations of the Moore-Penrose inverses $\mathbf{A}_1^{\dagger}$ and $\mathbf{B}_2^{\dagger}$, the equations (5) and

$$b_{ij}^{(2),\dagger}=\frac{\operatorname{rdet}_j(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)_{j.}\left(\mathbf{b}_{i.}^{(2),*}\right)}{\det(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*)}. \tag{21}$$

are more applicable to use, respectively. By substituting them in (20) and proceeding further as in the previous case, we obtain (15).

In the cases (iii) and (iv) for $\mathbf{A}_1^{\dagger}$ and $\mathbf{B}_2^{\dagger}$, we use the determinantal representations (18)-(21) and (5)-(19), respectively. ■

Remark 1. In accordance with expression (13), we obtain the same representations, but with the denotations, $\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^* =: \hat{\mathbf{C}}_2=(\hat{c}_{ij}^{(2)})\in\mathbb{H}^{n\times r}$ and $\mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1\mathbf{R}_{B_2} =: \hat{\mathbf{C}}_1=(\hat{c}_{ij}^{(2)})\in\mathbb{H}^{n\times r}$.

Lemma 2 ([10])**.** *Suppose that* $\mathbf{A}_1\in\mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{C}_1\in\mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{A}_2\in\mathbb{H}^{s\times n}$, $\mathbf{C}_2\in\mathbb{H}^{s\times r}$ *are known, and* $\mathbf{X}\in\mathbb{H}^{n\times r}$ *is unknown,* $\mathbf{S}=\mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1}$, $\mathbf{G}=\mathbf{R}_S\mathbf{A}_2$. *Then the system*

$$\begin{cases}\mathbf{A}_1\mathbf{X}=\mathbf{C}_1,\\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}=\mathbf{C}_2\end{cases} \tag{22}$$

is consistent if and only if

$$\mathbf{A}_i\mathbf{A}_i^{\dagger}\mathbf{C}_i=\mathbf{C}_i,\quad i=1,2;\;\; \mathbf{G}(\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2-\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1)=\mathbf{0}.$$

Under these conditions, the general solution to (22) can be established as

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2 - \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1) + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{L}_S\mathbf{Y}, \tag{23}$$

where $\mathbf{Y}$ *is an arbitrary matrix over* $\mathbb{H}$ *with appropriate size.*

A simplification of (23) can be derived due to the quaternionic analogue of the following proposition.

Lemma 3 ([16]). *If* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ *is Hermitian, then the following equation holds for any matrix* $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{m\times n}$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{AB})^{\dagger} = (\mathbf{AB})^{\dagger}. \tag{24}$$

Since $\mathbf{L}_{A_1}$ is a projector, then by (24),

$$\mathbf{L}_{A_1}\mathbf{S}^{\dagger} = \mathbf{L}_{A_1}(\mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1})^{\dagger} = (\mathbf{A}_2\mathbf{L}_{A_1})^{\dagger} = \mathbf{S}^{\dagger}.$$

Also, $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_2^{\dagger}\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2$. So, we have the following simplification of (23),

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{C}_2 - \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{L}_S\mathbf{Y}.$$

Obviously, the minimum norm partial solution $\mathbf{X}^0$ to (22), i.e. $\|\mathbf{X}_0\| = \min\|\mathbf{X}\|$, is given by

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1 + \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{C}_2 - \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{C}_1. \tag{25}$$

In the following theorem we give the determinantal representations of (25).

Theorem 4. *Let* $\mathbf{A}_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}_{k_1}^{m\times n}$, $\mathbf{A}_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}_{k_2}^{s\times n}$, $\mathbf{C}_1 = \left(c_{ij}^{(1)}\right) \in \mathbb{H}^{m\times r}$, $\mathbf{C}_2 = \left(c_{ij}^{(2)}\right) \in \mathbb{H}^{s\times r}$, *and there exist* $\mathbf{A}_1^{\dagger} = \left(a_{ij}^{(1),\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$, $\mathbf{S}_2^{\dagger} = \left(s_{ij}^{\dagger}\right) \in \mathbb{H}^{n\times s}$. *Let* $\operatorname{rank}\mathbf{S} = \min\{\operatorname{rank}\mathbf{A}_2, \operatorname{rank}\mathbf{L}_{A_1}\} = k$. *Denote* $\mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1 =: \hat{\mathbf{C}}_1 = (\hat{c}_{ij}^{(1)}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, $\mathbf{S}^*\mathbf{C}_2 =: \hat{\mathbf{C}}_2 = (\hat{c}_{ij}^{(2)}) \in \mathbb{H}^{n\times r}$, *and* $\mathbf{S}^*\mathbf{A}_2 =: \hat{\mathbf{A}}_2 = (\hat{a}_{ij}^{(2)}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$.

(i) If $\operatorname{rank}\mathbf{A}_1 = k_1 < n$ *and* $\operatorname{rank}\mathbf{S} = k < n$, *then* $\mathbf{X}^0 = (x_{ij}^0) \in \mathbb{H}^{n\times r}$ *possess the following determinantal representation,*

$$x_{ij}^0 = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{k_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{k_1,n}} \det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{\beta}^{\beta}} +$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{k,n}} \det(\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{\beta}^{\beta}} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{k,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.i}\left(\hat{\mathbf{a}}_{.l}^{(2)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{k,n}} \det(\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{\beta}^{\beta}} \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.\,l} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}} \det\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right) {}_{\beta}^{\beta}}, \quad (26)$$

where $\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}$, $\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(2)}$, *and* $\hat{\mathbf{a}}_{.j}^{(2)}$ *are the* j*th columns of the matrices* $\hat{\mathbf{C}}_1$, $\hat{\mathbf{C}}_2$, $\hat{\mathbf{A}}_2$, *respectively.*

(ii) If $\operatorname{rank} \mathbf{A}_1 = n$ *and* $\operatorname{rank} \mathbf{S} = n$, *then*

$$x_{ij}^0 = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)}{\det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)} + \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(2)}\right)}{\det(\mathbf{S}^*\mathbf{S})} - \\ - \sum_{l=1}^{n} \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{a}}_{.l}^{(2)}\right)}{\det(\mathbf{S}^*\mathbf{S})} \cdot \frac{\operatorname{cdet}_l(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.\,l}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)}{\det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)}. \quad (27)$$

(iii) If $\operatorname{rank} \mathbf{A}_1 = k_1 < n$ *and* $\operatorname{rank} \mathbf{S} = n$, *then*

$$x_{ij}^0 = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.\,i} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}} \det\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right) {}_{\beta}^{\beta}} + \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(2)}\right)}{\det(\mathbf{S}^*\mathbf{S})} - \\ - \sum_{l=1}^{n} \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{a}}_{.l}^{(2)}\right)}{\det(\mathbf{S}^*\mathbf{S})} \cdot \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left(\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.\,l} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}} \det\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right) {}_{\beta}^{\beta}}. \quad (28)$$

(iv) If $\operatorname{rank} \mathbf{A}_1 = n$ *and* $\operatorname{rank} \mathbf{S} = k < n$, *then*

$$x_{ij}^0 = \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)}{\det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)} + \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right)_{.\,i} \left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(2)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k,\,n}} \det\left(\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right) {}_{\beta}^{\beta}} - \\ \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right)_{.\,i} \left(\hat{\mathbf{a}}_{.l}^{(2)}\right)\right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k,\,n}} \det\left(\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right) {}_{\beta}^{\beta}} \cdot \frac{\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)_{.\,i}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}\right)}{\det(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1)}. \quad (29)$$

Proof. (i) If rank $\mathbf{A}_1 = k_1 < n$ and rank $\mathbf{S} = k < n$, then determinantal representations of the Moore-Penrose inverses $\mathbf{A}_1^{\dagger}$ and $\mathbf{S}^{\dagger}$ can be chosen by (3). Due to (25), the entries of $\mathbf{X}^0 = (x_{ij}^0)$ are

$$x_{ij}^0 = \sum_{t=1}^{m} a_{it}^{(1),\dagger} c_{tj}^{(1)} + \sum_{q=1}^{s} s_{iq}^{\dagger} c_{qj}^{(2)} - \sum_{q=1}^{s} \sum_{l=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} s_{iq}^{\dagger} a_{ql}^{(2)} a_{lt}^{(1),\dagger} c_{tj}^{(1)} \tag{30}$$

for all $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., r$. Substituting $a_{it}^{(1),\dagger}$ and $s_{kq}^{\dagger}$ in (30), we obtain

$$x_{ij}^0 = \sum_{t=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.\,i} \left(\hat{\mathbf{a}}_{.t}^{(1),*} \right) \right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}} \det(\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1) {}_{\beta}^{\beta}} \cdot c_{tj}^{(1)} +$$

$$\sum_{q=1}^{s} \sum_{l=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{S}^* \mathbf{S})_{.\,i} \left(\mathbf{s}_{.q}^* \right) \right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k,\,n}} \det(\mathbf{S}^* \mathbf{S}) {}_{\beta}^{\beta}} \cdot a_{qj}^{(2)} -$$

$$\sum_{q=1}^{s} \sum_{l=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k,\,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left((\mathbf{S}^* \mathbf{S})_{.\,i} \left(\mathbf{s}_{.q}^* \right) \right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k,\,n}} \det(\mathbf{S}^* \mathbf{S}) {}_{\beta}^{\beta}} \cdot a_{ql}^{(2)} \times$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}\{l\}} \operatorname{cdet}_l \left((\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1)_{.\,l} \left(\mathbf{a}_{.t}^{(1),*} \right) \right) {}_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{k_1,\,n}} \det(\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1) {}_{\beta}^{\beta}} \cdot c_{tj}^{(1)}.$$

Taking into account that $\sum\limits_{l} \mathbf{a}_{.\,t}^{(1),*} c_{tj}^{(1)} = \hat{\mathbf{c}}_{.j}^{(1)}$, $\sum\limits_{q} \mathbf{s}_{.q}^* a_{ql}^{(2)} = \hat{\mathbf{a}}_{.l}^{(2)}$, we finally obtain (26).

(ii) In this case the determinantal representation (5) is more convenient to use for the both Moore-Penrose inverses $\mathbf{A}_1^{\dagger}$ and $\mathbf{S}^{\dagger}$. Their substitution in (30) gives (27).

In the case (iii) we use the determinantal representation (3) for the Moore-Penrose inverses $\mathbf{A}_1^{\dagger}$, and the determinantal representation (5) is more convenient to use for $\mathbf{S}^{\dagger}$.

In the case(iv), the determinantal representations (3) and (5) are used for $\mathbf{A}_1^{\dagger}$ and $\mathbf{S}^{\dagger}$, respectively. ■

Remark 2. To give analogs of Theorems 3 and 4 for the matrix systems (9) and (22), respectively, over the complex field, it is obviously needed to substitute all row-column determinants by usual determinants.

Finally, we give numerical examples to illustrate the main results.

Example 1. Let us consider the matrix equation

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2 \end{cases} \tag{31}$$

where $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & -j \\ 1 & -k & i \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -j & 0 & -i \\ k & 1 & -j \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} k & -j \\ j & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 0 \\ k & j \end{pmatrix}$. Since $\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & i & -2k \\ -i & 1 & -j \\ 2k & j & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^* = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & j \\ 0 & -j & 0 \end{pmatrix}$, and $\det\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right) = 0$, $\det\left(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^*\right) = 0$, but $\det\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = 1$, then $\operatorname{rank}\mathbf{A}_1 = \operatorname{rank}\mathbf{B}_2 = 2$. Moreover, $\mathbf{A}_1\mathbf{C}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 1 & i+k \end{pmatrix}$. So, by (10), the system (31) is consistent. We shall find the solution of (31) by it's determinantal representation (14). First, by (3), one can find,

$$\mathbf{A}_1^{\dagger} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2i-k & 1+j \\ 1+j & 2k \\ 1+2j & -i+k \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_1^{\dagger}\mathbf{A}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -i-k & k \\ i+k & 2 & 1+j \\ -k & 1-j & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{A_1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i+k & -k \\ -i-k & 2 & -1-j \\ k & -1+j & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{A}_1^*\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & i+k & -k \\ -i-k & 2 & -1-j \\ k & -1+j & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{L}_{A_1}\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2^* = \begin{pmatrix} 1 & i+k & -k \\ -i-k & 2 & -1-j \\ k & -1+j & 1 \end{pmatrix}.$$

Since

$$\left(\mathbf{A}_1^*\mathbf{A}_1\right)_{.1}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.1}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 2k & -k & i+k \\ -1 & 1 & j \\ 1+j & -j & 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(\mathbf{B}_2\mathbf{A}_2^*\right)_{1.}\left(\hat{\mathbf{c}}_{1.}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}i+\frac{1}{4}k & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}j & \frac{3}{4}-\frac{3}{4}j \\ -i & 1 & j \\ 0 & -j & 2 \end{pmatrix},$$

then

$$x_{11}^{0}=$$

$$\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{2,\,3}\{1\}}\operatorname{cdet}_1\left(\left(\mathbf{A}_1^{*}\mathbf{A}_1\right)_{.\,1}\left(\hat{\mathbf{c}}_{.1}^{(1)}\right)\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{2,\,3}}\det(\mathbf{A}_1^{*}\mathbf{A}_1)_{\beta}^{\beta}}+\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{2,3}\{1\}}\operatorname{rdet}_1\left((\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{*})_{1\,.}\left(\hat{\mathbf{c}}_{1\,.}^{(2)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{2,3}}\det(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{*})_{\alpha}^{\alpha}}=$$

$$\frac{1}{4}\left(\operatorname{cdet}_1\begin{pmatrix}2k & -k\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\operatorname{cdet}_1\begin{pmatrix}2k & 1+k\\ 1+i & 2\end{pmatrix}\right)+$$
$$\frac{1}{6}\left(\operatorname{rdet}_1\begin{pmatrix}\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}k & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}j\\ -i & 1\end{pmatrix}+\operatorname{rdet}_1\begin{pmatrix}\frac{1}{4}i+\frac{1}{4}k & \frac{3}{4}-\frac{1}{4}j\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{12}i+\frac{11}{12}k.$$

Similarly, we obtain

$$\begin{array}{llll}x_{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}j, & x_{13}=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}j, & x_{21}=-\frac{1}{6}j, & x_{22}=\frac{3}{4}k,\\ x_{23}=-\frac{1}{6}i, & x_{31}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}j, & x_{32}=-\frac{1}{6}i+\frac{1}{6}k, & x_{33}=\frac{1}{12}i+\frac{13}{12}k.\end{array}$$

Note that we used Maple with the package CLIFFORD in the calculations.

1. Kyrchei I.I. Cramer's rule for generalized inverse solutions. In: Kyrchei, I.I.(Ed.) Advances in Linear Algebra Research. Nova Sci. Publ., New York, pp. 79-132, 2015.

2. Kyrchei I. I. *Cramer's rule for quaternionic systems of linear equations.* Fundam. Prikl. Mat. 2007 **155** (6), 839–858.

3. Kyrchei I. I. The theory of the column and row determinants in a quaternion linear algebra. In: Baswell A. R. (Ed). Advances in Mathematics Research 15. Nova Sci. Publ., New York, pp. 301–359, 2012.

4. Cecioni F. *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. 1910 **11**, 141.

5. Mitra S.K. *The matrix equations $AX = C$, $XB = D$.* Linear Algebra Appl. 1984 **59**, 171–181.

6. Dehghan M., Hajarian M. *On the generalized reflexive and anti-reflexive solutions to a system of matrix equations.* Linear Algebra Appl. 2012 **437**, 2793–2812.

7. He Z.H., Wang Q.W. *The general solutions to some systems of matrix equations.* Linear Multilinear Algebra 2015 **63** (10), 2017–2032.

8. Qiu Y.Y., Wang A.D. *Least squares solutions to the equations $AX = B$; $XC = D$ with some constraints.* Appl. Math. Comput. 2008 **204**, 872–880.

9. Li Y.T., Wu W.J. *Symmetric and skew-antisymmetric solutions to systems of real quaternion matrix equations.* Comput. Math. Appl. 2008 **55**, 1142–1147.

10. Wang Q.W. *The general solution to a system of real quaternion matrix equations.* Comput. Math. Appl. 2005 **49**, 665–675.

11. Wang Q.W., Wu Z.C., Lin C.Y. *Extremal ranks of a quaternion matrix expression subject to consistent systems of quaternion matrix equations with applications.* Appl. Math. Comput. 2006 **182** (2), 1755–1764.

12. Yuan Y. *Least-squares solutions to the matrix equations $AX = B$ and $XC = D$.* Appl. Math. Comput. 2010 **216**, 3120–3125.

13. Jiang T., Chen L. *Algebraic algorithms for least squares problem in quaternionic quantum theory.* Computer Physics Communications 2007 **176**, 481-485.

14. Kyrchei I. I. *Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules.* Linear Multilinear algebra 2011 **59** (4), 413-431.

15. Buxton J.N., Churchouse R.F. Tayler A.B. Matrices methods and applications. Clarendon Press, Oxford, 1990.

16. Maciejewski A. A., Klein C. A. *Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments.* The International Journal of Robotics Research 1985 **4** (3), 109–117.

Іван Кирчей

ФОРМУЛИ ЯВНОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ КВАТЕРНІОНОВИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

В рамках теорії стовпцевих і рядкових визначників, ми отримуємо явні формули визначникового представлення (аналоги правила Крамера) розв'язків систем кватерніонових матричних рівнянь $\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1$, $\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_2$ *та* $\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{C}_1$, $\mathbf{A}_2\mathbf{X} = \mathbf{C}_2$.

UDC 517.9

Iryna Kmit[1]

SMOOTHING PROPERTY OF SOLUTIONS TO NONLOCAL HYPERBOLIC PROBLEMS

We consider nonlocal initial boundary value problems with integral boundary conditions for integro-differential first order hyperbolic systems. We prove a general regularity result stating that the L^2-generalized solutions become eventually continuous.

1. Problem setting and motivation

1.1. Statement of the problem and our result

We will consider integro-differential first order hyperbolic system of the type

$$\begin{gathered}\partial_t u_j + a_j(x,t)\partial_x u_j + \sum_{k=1}^n b_{jk}(x,t)u_k + \sum_{k=1}^n \int_0^x g_{jk}(y,t)\times \\ \times u_k(y,t)dy = f_j(x,t), \quad (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty),\ j \le n,\end{gathered} \tag{1}$$

subjected to the initial conditions

$$u_j(x,0) = \varphi_j(x), \quad x \in [0,1], \quad j \le n, \tag{2}$$

and the integral boundary conditions

$$\begin{aligned} u_j(0,t) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 r_{jk}(x,t)u_k dx, \quad t \in [0,\infty), \quad 1 \le j \le m, \\ u_j(1,t) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 r_{jk}(x,t)u_k dx,, \quad t \in [0,\infty), \quad m < j \le n, \end{aligned} \tag{3}$$

where $0 \le m \le n$ are fixed integers and $n \ge 2$. In this form, which is motivated by applications, the problem has been studied in [7,10]. First order hyperbolic systems with smoothing boundary conditions of the integral type (3) appear, in particular, in applications to population dynamics [1, 8, 11].

It is known that, whatsoever $\varphi_i \in C([0,1])$, there exists a unique piecewise continuous solution to the initial-boundary value problem (1)–(3)

[1] *Institute of Mathematics, Humboldt University of Berlin and Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, kmit@mathematik.hu-berlin.de*

with possible first order discontinuities along characteristic curves emanating from the points $(0,0)$ and $(1,0)$. The discontinuities disappear only whenever the zero order compatibility condition between (3) and (2) is fulfilled. It turns out that for some classes of boundary conditions one can speak about the disappearance of the discontinuities *after* some time even if the zero order compatibility conditions at points $(0,\tau)$ and $(1,\tau)$ are not fulfilled. Even more, as it follows from [4, 5], one can expect that for linear problems this kind of smoothing property (higher regularity of solutions after a "smoothing time") does not depend on the regularity of the initial data. Our aim is to show that generalized solutions to the problem (1)–(3) become eventually continuous, despite of the initial data are supposed to be only L^2-regular.

Set

$$\Omega = \{(x,t) \,:\, 0 < x < 1, 0 < t < \infty\}.$$

Suppose that

$$\inf_{(x,t)\in\overline{\Omega}} a_j > 0 \text{ for all } j \le m \quad \text{and} \quad \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}} a_j < 0 \text{ for all } j > m. \tag{4}$$

This entails that the system (1) is non-degenerate. Let us make a couple of regularity assumptions on the coefficients of (1), namely

$$a_j, b_{jk} \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ and } g_{jk}, r_{jk} \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) \text{ for all } j,k \le n \tag{5}$$

and

$$\begin{gathered}\text{for all } 1 \le j \ne k \le n \text{ there exists } \beta_{jk} \in C^1 \\ \text{such that } b_{jk} = \beta_{jk}(a_k - a_j).\end{gathered} \tag{6}$$

It turns out that the last property is crucial for our analysis.

By $L^2(0,1)^n$ we denote the vector space of functions $u = (u_1,\dots,u_n)$ with $u_j \in L^2(0,1)$.

Let us introduce the notion of an L^2-generalized solution to the problem (1)–(3). Fix arbitrary $\varphi_j \in L^2(0,1)$ and sequences $\varphi_j^l \in C_0^\infty([0,1])$ such that $\varphi_j^l \to \varphi_j$ in $L^2(0,1)$. Note that, due to the fact that φ_j^l are compactly supported for all $l \in \mathbb{N}$ and $j \le n$, they satisfy the zero order and the first order compatibility conditions between (2) and (3). By [2, 9], given $l \in \mathbb{N}$, the problem (1)–(3) has a unique classical solution, say u^l. Similarly to [5] one can prove that these solutions satisfy the following estimate:

$$\max_{j\le n} \|u^l(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \le Me^{\omega t} \max_{j\le n} \|\varphi_j\|_{L^2(0,1)} \quad \text{for all } t > 0, \tag{7}$$

for some constants M, ω not depending on t, φ_j, and $l \in \mathbb{N}$. Hence, there exist a unique vector-function $u \in C([0,\infty), L^2(0,1))^n$ such that

$$\|u(\cdot,\theta) - u^l(\cdot,\theta)\|_{L^2(0,1)^n} \to 0 \quad \text{as } l \to \infty,$$

uniformly in θ varying in the range $0 \le \theta \le t$, for every $t > 0$. The vector-function u is called an L^2-generalized solution to the problem (1)–(3). Furthermore, the following estimate is true:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)^n} \le Me^{\omega t} \max_{j\le n} \|\varphi_j\|_{L^2(0,1)} \quad \text{for all } t > 0, \tag{8}$$

what follows from (7).

Our main result states that all L^2-generalized solutions have a smoothing property, in the following sense.

Definition 1. *The L^2-generalized solution to the problem (1)–(3) is called eventually smoothing if there is $d > 0$ such that u is a continuous vector-function after the time $t \ge d$.*

This property means that the solutions become more regular *in a finite time* if to compare with their regularity *in the entire domain*. This contrasts to the parabolic case where, due to the infinite propagation speed, the smoothing property for solutions is encountered in the entire domain (immediately after leaving the initial axis).

Theorem 1. *Suppose that the conditions (4), (5) and (6) are fulfilled. Then the L^2-generalized solution to the problem (1)–(3) is eventually smoothing in the sense of Definition 1.*

1.2. Integral representation of the problem (1)–(3)

For given $j \le n$, $x \in [0,1]$, and $t \in \mathbb{R}$, the j-th characteristic of (1) passing through the point (x,t) is defined as the solution $\xi \in [0,1] \mapsto \omega_j(\xi,x,t) \in \mathbb{R}$ to the initial value problem

$$\partial_\xi \omega_j(\xi,x,t) = \frac{1}{a_j(\xi,\omega_j(\xi,x,t))}, \quad \omega_j(x,x,t) = t. \tag{9}$$

Due to (4), the characteristic curve $\theta = \omega_j(\xi,x,t)$ reaches the boundary of Ω in two points with distinct ordinates. Let $x_j = x_j(x,t)$ denote the abscissa of that point whose ordinate is smaller. Note that (4) entails that x_j does not depend on x, t but only on j and, therefore, is given by the formula

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad 1 \le j \le m, \\ 1 & \text{for} \quad m < j \le n. \end{cases}$$

Further we will simply write $\omega_j(\xi)$ for $\omega_j(\xi,x,t)$. Write

$$c_j(\xi,x,t) = \exp \int_x^\xi \left(\frac{b_{jj}}{a_j}\right)(\eta,\omega_j(\eta))\,d\eta, \quad d_j(\xi,x,t) = \frac{c_j(\xi,x,t)}{a_j(\xi,\omega_j(\xi))}. \tag{10}$$

Let us introduce linear bounded operators $R, B, G : C(\overline{\Omega})^n \mapsto C(\overline{\Omega})^n$ by

$$\begin{aligned}
(Ru)_j(x,t) &= c_j(x_j,x,t)\sum_{k=1}^n \int_0^1 r_{jk}(\eta,\omega_j(x_j))u_k(\eta,\omega_j(x_j))\,d\eta,\\
(Bu)_j(x,t) &= -\sum_{k\neq j}\int_{x_j}^x d_j(\xi,x,t)b_{jk}(\xi,\omega_j(\xi))u_k(\xi,\omega_j(\xi))\,d\xi,\\
(Gu)_j(x,t) &= -\sum_{k=1}^n\int_{x_j}^x\int_0^\xi d_j(\xi,x,t)g_{jk}(y,\omega_j(\xi))u_k(y,\omega_j(\xi))\,dyd\xi.
\end{aligned}$$

Straightforward calculations show that a C^1-map $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ is a solution to the PDE problem (1)–(3) if and only if it satisfies the following system of integral equations

$$u_j(x,t) = (Su)_j(x,t) - \int_{x_j}^x d_j(\xi,x,t)\sum_{k\neq j}(b_{jk}u_k)(\xi,\omega_j(\xi))\,d\xi, \quad j \le n, \tag{11}$$

where the affine bounded operator S is defined by

$$(Su)_j(x,t) = \begin{cases} (Ru)_j(x,t) & \text{if} \quad x_j = 0 \text{ or } x_j = 1\\ c_j(x_j,x,t)\varphi_j(x_j) & \text{if} \quad x_j \in (0,1) \end{cases} \tag{12}$$

on a subspace of $C(\overline{\Omega})^n$ of functions satisfying (2).

1.3. Smoothing property of the L^2-generalized solutions

Here we prove Theorem 1. To this end, we will use results about existence and uniqueness of continuous and classical solutions to the problem (1)–(3) proved in [2, 6].

The proof extends the ideas of [3, 4] where the smoothing property is proved for the initial data in the space of continuous functions satisfying the zero order compatibility conditions. In [3, 4] we show that the solutions reach the C^k-regularity in a finite time for each k. Here we follow a similar argument and extend the smoothing results to the case where the initial data are L^2-functions only.

Our starting point is that, given $\varphi \in L^2(0,1)^n$, the initial boundary value problem (1)–(3) has a unique solution $u \in C\left(\mathbb{R}, L^2(0,1)\right)^n$. Our aim is to show that $u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_d\right)^n$ for some $d > 0$, where

$$\Omega_\tau = \{(x,t) \,:\, 0 < x < 1, \tau < t < \infty\}, \quad \tau > 0.$$

Let d be chosen so that $d \ge \omega_j(1,\omega_k(1,0,0),0)$ for all $j,k \le m$ and $d \ge \omega_j(0,\omega_k(0,1,0),1)$ for all $m+1 \le j,k \le n$. Fix an arbitrary $\varphi \in L^2(0,1)^n$ and consider an arbitrary sequence $\varphi^l \in C([0,1])^n$ of functions satisfying the zero order compatibility conditions between (3) and (2) such that $\varphi^l \to \varphi$ in $L^2(0,1)^n$ (one can easily prove that the sequence φ^l exists). Denote by u^l the continuous solution to (1)–(3) with φ replaced by φ^l. Moreover, we have (see [5, Lemma 4.2])

$$u^l \to u \text{ in } C\left([\tau,\theta], L^2(0,1)\right)^n \text{ as } l \to \infty, \tag{13}$$

for any $\theta > 0$, where $u \in C\left([0,\theta], L^2(0,1)\right)^n$ is the generalized L^2-solution to the problem (1)–(3). To prove the theorem, it is sufficient to show that

$$u^l \text{ converges in } C\left(\overline{\Omega}_{4d}^{4d+\alpha}\right)^n \text{ as } l \to \infty, \tag{14}$$

for any $\alpha > 0$. Here and below, given $\beta < \gamma$, we write

$$\Omega_\beta^\gamma = \Omega_\beta \setminus \overline{\Omega}_\gamma.$$

For the solution $u^l \in C\left(\overline{\Omega}\right)^n$ restricted to $\overline{\Omega}_d$ we have the operator representation:

$$u^l|_{\overline{\Omega}_d} = Bu^l + Gu^l + Ru^l. \tag{15}$$

On the account of the choice of d, the function u^l in the right-hand side of (15) fulfills the same equation (15), what entails

$$u^l|_{\overline{\Omega}_d} = (B+R)(B+R+G)u^l + Gu^l.$$

We are done if we prove that the right-hand side of the last equality converges in $C\left(\overline{\Omega}_{2d}^{2d+\alpha}\right)^n$ for any $\alpha > 0$ as $l \to \infty$. Fix an arbitrary $\alpha > 0$. Since the operators B and R are bounded, it suffices to prove that the sequences

$$B^2u^l, RBu^l, BRu^l, R^2u^l, Gu^l \text{ converge in } C\left(\overline{\Omega}_{2d}^{2d+\alpha}\right)^n \tag{16}$$

as $l \to \infty$.

We start with $\left(B^2u^l\right)(x,t)$. Given $j \le n$, consider the following expression for $\left(B^2u^l\right)_j(x,t)$, obtained after changing the order of integration:

$$\left(B^2u^l\right)_j(x,t) = \sum_{k\ne j}\sum_{i\ne k}\int_{x_j}^{x}\int_{\eta}^{x} d_{jki}(\xi,\eta,x,t)b_{jk}(\xi,\omega_j(\xi))\times$$
$$\times u_i^l(\eta,\omega_k(\eta,\xi,\omega_j(\xi)))d\xi d\eta$$

with

$$d_{jki}(\xi,\eta,x,t) = d_j(\xi,x,t)d_k(\eta,\xi,\omega_j(\xi))b_{ki}(\eta,\omega_k(\eta,\xi,\omega_j(\xi))).$$

Fix $k \neq j$. Let us change the variables

$$\xi \in [0,1] \mapsto \theta = \omega_k(\eta, \xi, \omega_j(\xi)). \tag{17}$$

Taking into the account the formulas

$$\partial_x \omega_j(\xi, x, t) = -\frac{1}{a_j(x,t)} \exp \int_\xi^x \frac{\partial_t a_j(\eta, \omega_j(\eta))}{a_j(\eta, \omega_j(\eta))^2}\, d\eta, \tag{18}$$

$$\partial_t \omega_j(\xi, x, t) = \exp \int_\xi^x \frac{\partial_t a_j(\eta, \omega_j(\eta))}{a_j(\eta, \omega_j(\eta))^2}\, d\eta, \tag{19}$$

from (17) we get

$$\begin{aligned} d\theta &= [\partial_2 \omega_k(\eta, \xi, \omega_j(\xi)) + \partial_3 \omega_k(\eta, \xi, \omega_j(\xi)) \partial_\xi \omega_j(\xi)]\, d\xi = \\ &= \frac{a_k(\xi, \omega_j(\xi)) - a_j(\xi, \omega_j(\xi))}{a_j(\xi, \omega_j(\xi)) a_k(\xi, \omega_j(\xi))} \partial_3 \omega_k(\eta, \xi, \omega_j(\xi)) d\xi, \end{aligned} \tag{20}$$

where ∂_k denotes the partial derivative with respect to the k-th argument. It follows that (17) is non-degenerate for all $\xi \in [0,1]$ fulfilling the condition $a_k(\xi, \omega_j(\xi)) - a_j(\xi, \omega_j(\xi)) \neq 0$. The inverse of (17) for those ξ will be denoted by $\tilde{x}(\theta, \eta, x, t)$. Moreover, we have the following identity:

$$\omega_k(\tilde{x}(\theta, \eta, x, t), \eta, \theta) = \omega_j(\tilde{x}(\theta, \eta, x, t), x, t).$$

Therefore, after changing the variables (17) we come up with the following formula for the summands contributing into $\left(B^2 u^l\right)$:

$$\begin{aligned} &\int_{x_j}^x \int_\eta^x d_{jki}(\xi, \eta, x, t) b_{jk}(\xi, \omega_j(\xi)) u_i^l(\eta, \omega_k(\eta; \xi, \omega_j(\xi))) d\xi d\eta = \\ &= \int_{x_j}^x \int_{\omega_j(\eta,x,t)}^{\omega_k(\eta,x,t)} d_{jki}(\tilde{x}, \eta, x, t) \beta_{jk}(\tilde{x}, \omega_j(\tilde{x})) \frac{(a_k a_j)(\tilde{x}, \omega_j(\tilde{x}))}{\partial_3 \omega_k(\eta, \tilde{x}, \omega_j(\tilde{x}))} u_i^l(\eta, \theta) d\theta d\eta, \end{aligned} \tag{21}$$

where the functions $\beta_{jk} \in C$ are fixed to satisfy (6). Note that $\beta_{jk}(x,t)$ are not uniquely defined by (6) for (x,t) with $a_j(x,t) = a_k(x,t)$. Nevertheless, as it follows from (20), the right-hand side (and, hence, the left-hand side of (21) do not depend on the choice of β_{jk}, since $d\theta = 0$ if $a_j(\xi, \omega_j(\xi)) = a_k(\xi, \omega_k(\xi))$. Changing the order of integration in the right-hand side, we rewrite the last as follows:

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_j(x_j)}^{\omega_k(x_j)} \int_{x_j}^{\tilde{\omega}_j(\theta)} d_{jki}(\tilde{x}, \eta, x, t) \tilde{b}_{jk}(\tilde{x}, \omega_j(\tilde{x})) \frac{(a_k a_j)(\tilde{x}, \omega_j(\tilde{x}))}{\partial_3 \omega_k(\eta, \tilde{x}, \omega_j(\tilde{x}))} u_i^l(\eta, \theta) d\eta d\theta + \\ &+ \int_{\omega_k(x_j)}^t \int_{\tilde{\omega}_k(\theta)}^{\tilde{\omega}_j(\theta)} d_{jki}(\tilde{x}, \eta, x, t) \tilde{b}_{jk}(\tilde{x}, \omega_j(\tilde{x})) \frac{(a_k a_j)(\tilde{x}, \omega_j(\tilde{x}))}{\partial_3 \omega_k(\eta, \tilde{x}, \omega_j(\tilde{x}))} u_i^l(\eta, \theta) d\eta d\theta, \end{aligned} \tag{22}$$

where $\tau \in \mathbb{R} \mapsto \tilde{\omega}_s(\tau) = \tilde{\omega}_s(\tau, x, t) \in [0,1]$ denotes the inverse function to $\xi \in [0,1] \mapsto \omega_s(\xi) \in \mathbb{R}$. Note that the interval of integration in θ in both of the integrals does not exceed d. Now the $C\left(\overline{\Omega}_{2d}^{2d+\alpha}\right)^n$-norm of the function (22) can be estimated from above by

$$2d \max_{x,\xi,\eta\in[0,1]} \max_{t,\theta\in[0,2d+\alpha]} \left| d_{jki}(\xi,\eta,x,t))\tilde{b}_{jk}(\xi,\theta)\frac{(a_k a_j)(\xi,\theta)}{\partial_3\omega_k(\eta,\xi,\theta)}\right|$$
$$\max_{t\in[0,2d+\alpha]} \int_0^1 |u_i^l(\eta,t)|\,d\eta \le C \left\|u_i^l\right\|_{C([0,2d+\alpha],L^2(0,1))}, \tag{23}$$

where $C > 0$ is a constant which depends on the coefficients of (1) but not on u^l. The desired convergence of $\left[B^2u^l\right](x,t)$ is thereby proved.

Now we treat the convergence of the sequence

$$(RBu^l)_j(x,t) = -c_j(x_j,x,t)\sum_{k=1}^n\sum_{s\ne k}\int_0^1\int_{x_k}^{\eta} r_{jk}(\eta,\omega_j(x_j))d_k(\xi,\eta,\omega_j(x_j))\times$$
$$\times b_{ks}(\xi,\omega_k(\xi,\eta,\omega_j(x_j)))u_s^l(\xi,\omega_k(\xi,\eta,\omega_j(x_j)))\,d\xi d\eta$$

for an arbitrary fixed $j \le n$. After changing the order of integration we get the equality

$$(RBu)_j(x,t) = -c_j(x_j,x,t)\sum_{k=1}^n\sum_{s\ne k}\int_0^1\int_{\xi}^{1-x_k} r_{jk}(\eta,\omega_j(x_j))d_k(\xi,\eta,\omega_j(x_j))\times$$
$$\times b_{ks}(\xi,\omega_k(\xi,\eta,\omega_j(x_j)))u_s^l(\xi,\omega_k(\xi,\eta,\omega_j(x_j)))\,d\eta d\xi.$$

Then we change the variable η to $z = \omega_k(\xi,\eta,\omega_j(x_j))$. Since the inverse is given by $\eta = \tilde{\omega}_k(\omega_j(x_j),\xi,z)$, we get

$$\begin{aligned}(RBu)_j(x,t) &= -c_j(x_j,x,t)\times\\ &\times\sum_{k=1}^n\sum_{s\ne k}\int_0^1\int_{\omega_j(x_j)}^{\omega_k(\xi,1-x_k,\omega_j(x_j))} r_{jk}(\tilde{\omega}_k(\omega_j(x_j),\xi,z),\omega_j(x_j))\times\\ &\times d_k(\xi,\tilde{\omega}_k(\omega_j(x_j),\xi,z),\omega_j(x_j))b_{ks}(\xi,z)\partial_3\tilde{\omega}_k(\omega_j(x_j),\xi,z)u_s^l(\xi,z)\,dzd\xi.\end{aligned} \tag{24}$$

The functions $\omega_j(\xi,x,t)$ and the kernels of the integral operators in (24) are C^1-continuous. Due to the convergence (13), there exists a limit of the right-hand side in $C\left(\overline{\Omega}_{2d}^{2d+\alpha}\right)$, as desired.

Now we consider the operator G. Changing the variable ξ to $z=\omega_j(\xi,x,t)$ in (11), we get

$$\begin{aligned}(Gu^l)_j(x,t) &=\\ &= -\sum_{k=1}^n\int_{\omega_j(x_j)}^t\int_0^{\tilde{\omega}_j(z)} d_j(\tilde{\omega}_j(z),x,t)g_{jk}(y,z)a_j(\tilde{\omega}_j(z),z)u_k^l(y,z)dydz.\end{aligned} \tag{25}$$

Similarly to the above, the functions $\omega_j(x_j), \tilde{\omega}_j(z), d_j(\tilde{\omega}_j(z), x, t)$, and $a_j(\tilde{\omega}_j(z), z)$ are continuous in x and t. This entails the desired estimate of the type (23).

We further proceed with the operator R^2. For $j \le n$, $k \le n$, and $T > 0$, define operators $R_{jk} \in \mathcal{L}(C(\overline{\Omega}^T))$ by

$$(R_{jk}w)(x,t) = c_j(x_j,x,t) \int_0^1 r_{jk}(\eta, \omega_j(x_j))w(\eta, \omega_j(x_j))\, d\eta.$$

Fix arbitrary $j \le n$, $k \le n$, and $i \le n$. We prove the needed estimate for the operator $R_{jk}R_{ki}$; similar estimate for all other operators contributing into the R^2 will follow from the same argument. Given $T > 0$, introduce operators $P_j, Q_{jk} : C(\overline{\Omega}^T) \to C(\overline{\Omega}^T)$ by

$$\begin{aligned} (P_j w)(x,t) &= c_j(x_j,x,t) \int_0^1 w(\eta,t)\, d\eta, &(26)\\ (Q_{jk}w)(x,t) &= r_{jk}(x, \omega_j(x_j))w(x, \omega_j(x_j)). &(27)\end{aligned}$$

Then we have

$$R_{jk} = P_j Q_{jk}, \quad R_{ki} = P_k Q_{ki}$$

and, hence

$$R_{jk}R_{ki} = P_j Q_{jk} P_k Q_{ki}.$$

We aim at showing the estimate for $P_j Q_{jk} P_k$, as this and the boundedness of Q_{ki} will entail the desired estimate for $R_{jk}R_{ki}$. The operator $P_j Q_{jk} P_k$ reads

$$\begin{aligned}(P_j Q_{jk} P_k w)(x,t) = c_j(x_j,x,t) \int_0^1 r_{jk}(\xi, \omega_j(x_j,\xi,t))\times \\ \times c_k(x_k, \xi, \omega_j(x_j,\xi,t)) \int_0^1 w(\eta, \omega_k(x_k,\xi,t))\, d\eta d\xi.\end{aligned} \qquad (28)$$

Changing the variable ξ to $z = \omega_k(x_k,\xi,t)$, we get

$$\begin{aligned}&(P_j Q_{jk} P_k w)(x,t) = c_j(x_j,x,t)\times \\ &\quad\times \int_{\omega_k(x_k,0,t)}^{\omega_k(x_k,1,t)} r_{jk}(\tilde{\omega}_k(t,x_k,z),z) c_k(x_k, \tilde{\omega}_k(t,x_k,z),z)\times \\ &\times \int_0^1 \partial_3\tilde{\omega}_k(t,x_k,z) w(\eta,z)\, d\eta dz,\end{aligned} \qquad (29)$$

where

$$\partial_3\tilde{\omega}_k(\tau,x,t) = a_k(x,t) \exp \int_\tau^t \partial_1 a_k(\tilde{\omega}_k(\rho,x,t),\rho)\, d\rho. \qquad (30)$$

Similarly to the above, the needed estimate for $P_j Q_{jk} P_k$ now immediately follows from the regularity assumptions on the coefficients of the original problem. We are therefore finished with the operator R^2.

Returning back to (16), it remains to treat the operator BR. By the definitions of B and R,

$$(BRu)_j(x,t) = -\sum_{k\neq j}\sum_{l=1}^{n}\int_0^1\int_{x_j}^{x} d_j(\xi,x,t)b_{jk}(\xi,\omega_j(\xi))c_k(x_k,\xi,\omega_j(\xi))\times$$

$$\times r_{kl}(\eta,\omega_k(x_k,\xi,\omega_j(\xi)))u_l(\eta,\omega_k(x_k,\xi,\omega_j(\xi)))\,d\xi d\eta, \quad j\le n. \qquad (31)$$

The integral operators in (31) are similar to those considered for B^2 and, therefore, the proof follows along the same line as the proof for B^2. The proof of the theorem is therefore complete.

1. R. Eftimie, *Hyperbolic and kinetic models for self-organized biological aggregations and movement: a brief review*, J. Math. Biol. 2012, **65**, 35–75.

2. I. Kmit, *Classical solvability of nonlinear initial-boundary problems for first-order hyperbolic systems*, Intern. J. Dynamic Systems Different. Equat. 2008, **1**(3), 191–195.

3. I. Kmit, *Smoothing effect and Fredholm property for first order hyperbolic PDEs*, In: Pseudo-differential operators, generalized functions and asymptotics. Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser 2013 **231**, 219–238.

4. I. Kmit, *Smoothing solutions to initial-boundary problems for first-order hyperbolic systems*, Applicable Analysis 2011, **90**(11), 1609–1634.

5. I. Kmit, N. Lyulko, *Perturbations of superstable linear hyperbolic systems* 2017, submitted. *E-print:* https://arxiv.org/abs/1605.04703

6. I. Kmit, G. Hörmann, *Systems with singular non-local boundary conditions: Reflection of singularities and delta waves*, J. Anal. Appl. 2001, **20** (3), 637–659.

7. M. Krstic, A. Smyshlyaev, *Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays*, Systems and Control Letters 2008,**57**, 750–758.

8. P. Magal, S. Ruan, *Center manifolds for semilinear equations with non-dense domain and applications to Hopf bifurcation in age structured models*, Memoirs of the AMS 2009, **202**, 71 p.

9. Lacra Pavel, Classical solutions in Sobolev spaces for a class of hyperbolic Lotka–Volterra systems, SIAM J. Control Optim. 2013, **51**(3), 2132–2151.

10. H. Sano, S. Nakagiri, *Backstepping boundary control of first-order coupled hyperbolic partial integro-differential equations,* Recent Advances in Applied Mathematics 2009, 112–119.

11. G. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker, New York, 1985.

Ірина Кміть

ПІДВИЩЕННЯ ГЛАДКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Ми розглядаємо нелокальні задачі з інтегральними крайовими умовами для інтегро-диференціальних гіперболічних систем першого порядку. Доведено загальний результат регулярності про те, що узагальнені L^2-розв'язки з часом стають неперервними.

УДК 519.21

Богдан Копитко,[1] Роман Шевчук,[2] Жаннета Цаповська[3]

ПРО ДВОПАРАМЕТРИЧНУ НАПІВГРУПУ ФЕЛЛЕРА З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ

У роботі досліджено задачу спряження для одновимірного (за просторовою змінною) лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами за припущення, що на кривій розриву коефіцієнтів рівняння задано нелокальну умову спряження Феллера-Вентцеля. За допомогою розв'язку цієї задачі побудовано напівгрупу Феллера для одновимірного неоднорідного дифузійного процесу з рухомою мембраною.

1. Вступ

У статті розглядається задача побудови напівгрупи Феллера для одновимірного неоднорідного дифузійного процесу з мембраною, розташованою в точці, положення якої на числовій прямій визначається за допомогою заданої функції, що залежить від часової змінної. При цьому припускається, що у внутрішніх точках півпрямих, розділених між собою мембраною, шуканий процес має збігатися із заданими там звичайними дифузійними процесами, а його поведінка на спільній межі цих областей визначається заданою нелокальною умовою спряження типу Феллера-Вентцеля [1–3]. Дану задачу ще називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів на прямій [4].

З метою вивчення сформульованої проблеми в роботі застосовано аналітичні методи. За такого підходу (див. [4–6]) шукану напівгрупу можна визначити за допомогою розв'язку відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку (оберненого рівняння Колмогорова) з розривними коефіцієнтами. Класичну розв'язність цієї задачі доведено за припущення, що коефіцієнти рівняння задовольняють умову Гельдера з ненульовим показником, початкова функція є обмеженою і неперервною на всій числовій прямій, а параметр, який характеризує умову спряження Феллера-Вентцеля та крива, що визначає спільну межу областей, де задане рівняння, задовольняють

[1] *Львівський національний університет ім. І. Франка, bohdan.kopytko@gmail.com*

[2] *Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, r.v.shevchuk@gmail.com*

[3] *Львівський національний університет ім. І. Франка, tzhannet@yahoo.com*

умову Гельдера з показником більшим, ніж $\frac{1}{2}$. При дослідженні використовуються фундаментальні розв'язки параболічних рівнянь та породжені ними теплові потенціали (див. [4–8]). Внаслідок їх застосування поставлена задача зводиться до системи двох інтегральних сингулярних рівнянь Вольтерри другого роду, розв'язок якої отримано методом послідовних наближень.

Зауважимо, що аналогічна задача розглядалася раніше у праці [6] для випадку, коли мембрана розташована у фіксованій точці прямої. Ми відзначаємо також праці [9, 10], у яких представлено результати, що стосуються побудови дифузійних процесів зі стрибками в точках межі області за допомогою методів функціонального [9] і стохастичного [10] аналізу. Крім цього, нелокальні задачі для параболічних рівнянь у дещо інших постановках були об'єктами досліджень в роботах Богдана Йосиповича Пташника та його учнів (див., наприклад, [11]).

У п. 1 сформульовано нелокальну параболічну задачу спряження і наведено ряд допоміжних відомостей, що стосуються фундаментального розв'язку оберненого рівняння Колмогорова та породжених ним теплових потенціалів.

У п. 2 доведено теорему існування та єдиності класичного розв'язку задачі спряження, сформульованої в п. 1.

У п. 3 за допомогою побудованого в п. 2 розв'язку нелокальної параболічної задачі спряження визначено двопараметричну напівгрупу Феллера, яка й породжує потрібний нам марковський процес.

2. Постановка нелокальної параболічної задачі спряження та допоміжні відомості

Розглянемо на площині (s,x) смугу

$$S_t = \{(s,x): \quad 0 \le s < t \le T, \ -\infty < x < \infty\},$$

позначаючи через $\overline{S}_t$ замикання множини S_t. Припустимо, що всередині $\overline{S}_t$ міститься неперервна крива $x = h(s),\ 0 \le s \le T$, яка розділяє S_t на дві області:

$$S_t^{(1)} = \{(s,x): \quad 0 \le s < t \le T, \ -\infty < x < h(s)\}$$

і

$$S_t^{(2)} = \{(s,x): \quad 0 \le s < t \le T, \ h(s) < x < \infty\}.$$

Покладемо: $D_{1s} = (-\infty, h(s))$ і $D_{2s} = (h(s), \infty)$.

У смузі S_T розглядаються два рівномірно параболічні оператори з обмеженими коефіцієнтами

$$\frac{\partial}{\partial s} + L_s^{(i)} \equiv \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} b_i(s,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_i(s,x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

Поставимо задачу про знаходження розв'язку $u(s,x,t)$ рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial s} + L_s^{(i)} u = 0, \quad (s,x) \in S_t^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{2}$$

який задовольняє „початкову" умову

$$\lim_{s \uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

дві умови спряження

$$u(s,h(s)-0),t) = u(s,h(s)+0,t), \quad 0 \le s \le t \le T, \tag{4}$$

$$\int\limits_{D_{1s} \cup D_{2s}} [u(s,h(s),t) - u(s,y,t)]\mu(s,dy) = 0, \quad 0 \le s \le t \le T, \tag{5}$$

і дві умови узгодження

$$\varphi(h(t)-0) = \varphi(h(t)+0), \tag{6}$$

$$\int\limits_{D_{1t} \cup D_{2t}} [\varphi(h(t)) - \varphi(y)]\mu(t,dy) = 0. \tag{7}$$

Припускається, що початкова функція $\varphi(x)$ у (3) є обмеженою і неперервною на $\mathbb{R}$ (у цьому випадку умова (6) виконується автоматично), а невід'ємна міра Бореля $\mu(s,\cdot)$ з (5) така, що $\mu(D_{1s} \cup D_{2s}) \neq 0$, $s \in [0,T]$.

Як уже відзначалося у вступній частині статті, задача (2)–(7) виникає, зокрема, в теорії дифузійних процесів при побудові одновимірної моделі явища дифузії з мембраною, або, що те ж саме, при розв'язанні аналітичними методами так званої задачі про склеювання двох процесів дифузії на прямій. У розглядуваному випадку вважається, що мембрана є рухомою, і вона розташована в точці $x = h(s)$, яка одночасно є точкою склеювання заданих двох дифузійних процесів. Якщо припустити, що розв'язок $u(s,x,t) \equiv T_{st}\varphi(x)$ задачі (2)–(7) є двопараметричною напівгрупою Феллера деякого неоднорідного марковського процесу на прямій, то виконання для неї рівняння (2) вказує на те, що цей процес в області D_{si} збігається із заданим там дифузійним процесом, керованим оператором $L_s^{(i)}$, $i = 1,2$, а початкова умова (3) узгоджується з рівністю $T_{ss} = I$, де I — тотожний оператор. Далі, умова спряження (4) є відображенням властивості феллеровості процесу, а рівність (5) є нелокальною умовою спряження Феллера-Вентцеля, яка відповідає за стрибкоподібний характер виходу процесу з межі області. Нагадаємо, що у загальному випадку умова спряження Феллера-Вентцеля містить також невідому функцію і її похідні за обома змінними, що відповідає властивостям зникнення дифундуючої частинки, часткового відбиття від спільної межі областей та явищу „липучості".

Надалі будемо вважати виконаними такі умови:

I. Рівняння (2) параболічного типу в області $\overline{S}_T$, тобто існують додатні сталі b і B такі, що

$$0 < b \le b_i(s,x) \le B < \infty,\ i = 1,2,\ (s,x) \in \overline{S}_T.$$

II. В $\overline{S}_T$ коефіцієнти $b_i(s,x)$ та $a_i(s,x)$, $i = 1,2$, неперервні за (s,x) і належать до класу Гельдера $H^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{S}_T)$, $0 < \alpha < 1$ (означення класів Гельдера див. у [7, с. 16]).

III. Початкова функція $\varphi(x)$ належить до простору обмежених неперервних функцій, який позначатимемо через $C_b(\mathbb{R})$. Норма в цьому просторі визначається рівністю $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

IV. В умові (5) міра $\mu(s,\cdot)$ — невід'ємна, $\mu(s, D_{1s} \cup D_{2s}) = 1$, $s \in [0,T]$, і для всіх $f \in C_b(\mathbb{R})$ інтеграли

$$G_f^{(i)}(s) = \int\limits_{D_{is}} f(y)\mu(s,dy), \quad i = 1,2,$$

належать до класу Гельдера $H^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$.

V. Крива $h(s)$ неперервна і належить до класу Гельдера $H^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$.

Враховуючи припущення IV, умову спряження (5) можна подати у вигляді

$$u(s,h(s),t) = \int\limits_{D_{1s}\cup D_{2s}} u(s,y,t)\mu(s,dy). \tag{8}$$

Умови I, II забезпечують існування фундаментального розв'язку для кожного з рівнянь у (2) (див. [4, 7]), тобто функції $G_i(s,x,t,y)$, $i = 1,2$ $(0 \le s < t \le T; x,y \in \mathbb{R})$, яка при фіксованих $t \in (0,T]$, $y \in \mathbb{R}$, як функція аргументів $(s,x) \in [0,t)\times\mathbb{R}$ задовольняє рівняння (2) і допускає зображення

$$G_i(s,x,t,y) = Z_{i0}(s,x,t,y) + Z_{i1}(s,x,t,y), \quad i = 1,2, \tag{9}$$

де

$$Z_{i0}(s,x,t,y) = [2\pi b_i(t,y)(t-s)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2b_i(t,y)(t-s)}\right\}, \tag{10}$$

$$Z_{i1}(s,x,t,y) = \int\limits_s^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} Z_{i0}(s,x,\tau,z)Q_i(\tau,z,t,y)dz, \tag{11}$$

а функція $Q_i(s,x,t,y)$ є розв'язком деякого сингулярного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду.

Відзначимо оцінки

$$|D_s^r D_x^p Z_{i0}(s,x,t,y)| \le C(t-s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \exp\left\{-c\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{12}$$

$$|D_s^r D_x^p Z_{i1}(s,x,t,y)| \le C(t-s)^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \exp\left\{-c\frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}, \tag{13}$$

де $i=1,2$, $0\le s<t\le T$, $x,y\in\mathbb{R}$, C і c — додатні сталі[4]; r і p — цілі невід'ємні числа, для яких $2r+p\le 2$, D_s^r — символ похідної за s порядку r, D_x^p — символ похідної за x порядку p.

За допомогою фундаментального розв'язку $G_i(s,x,t,y)$, $i=1,2$, та функції $h(s)$ можна визначити такі інтеграли:

$$u_{i0}(s,x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_i(s,x,t,y)\varphi(y)dy, \quad i=1,2, \tag{14}$$

$$u_{i1}(s,x,t) = \int\limits_s^t G_i(s,x,\tau,h(\tau))V_i(\tau,t)d\tau, \quad i=1,2. \tag{15}$$

Тут φ, V_i, $i=1,2$, — задані функції, $0\le s<t\le T$, $x\in\mathbb{R}$. У теорії параболічних рівнянь функція $u_{i0}(s,x,t)$ називається потенціалом Пуассона, а функція $u_{i1}(s,x,t)$ — параболічним потенціалом простого шару.

Відзначимо деякі властивості функцій $u_{i0}(s,x,t), u_{i1}(s,x,t)$, $i=1,2$. Припустимо, що $\varphi\in C_b(\mathbb{R})$. Тоді з властивостей фундаментального розв'язку $G_i(s,x,t,y)$, $i=1,2$, випливає, що потенціал u_{i0} існує і як функція аргументів (s,x) при фіксованому $t\in(0,T]$ задовольняє в області $(s,x)\in[0,t)\times\mathbb{R}$ рівняння (2) з „початковою“ умовою

$$\lim_{s\uparrow t} u_{i0}(s,x,t) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad i=1,2. \tag{16}$$

Крім цього, для функції $u_{i0}(s,x,t)$, $i=1,2$, в кожній області вигляду $0\le s<t\le T$, $x\in\mathbb{R}$, справджується нерівність

$$|D_s^r D_x^p u_{i0}(s,x,t)| \le C(t-s)^{-\frac{2r+p}{2}}\|\varphi\|, \tag{17}$$

де r і p — цілі невід'ємні числа такі, що $2r+p\le 2$.

Розглянемо інтеграл (15). Якщо припустити, що щільність $V(\tau,t)$ неперервна при $\tau\in[s,t)$ і при $\tau=t$ допускає слабку особливість з

[4] Через C і c завжди будуть позначатися сталі, що залежать від даних задачі (2)–(7), без уточнення їх конкретного значення.

показником $\geq -\frac{1}{2}$, то функція $u_{i1}(s,x,t)$, $i=1,2$, є обмеженою і неперервною при $0 \leq s \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}$, вона задовольняє рівняння (2) в області $(s,x) \in [0,t) \times (\mathbb{R} \setminus h(s))$ і початкову умову

$$\lim_{s \uparrow t} u_{i1}(s,x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i=1,2. \tag{18}$$

Важлива властивість функції u_{i1} відображена у так званій теоремі про стрибок конормальної похідної від параболічного потенціалу простого шару (див., наприклад, [4, гл. II, §3], [7, гл. IV, §15]). У статті дане твердження не використовується, а тому ми його не наводимо.

3. Розв'язання нелокальної параболічної задачі спряження

Розв'язок задачі (2)–(7) будемо шукати у вигляді суми потенціалів u_{i0} та u_{i1} з невідомими щільностями $V_i(s,t)$, $i=1,2$:

$$u(s,x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_i(s,x,t,y)\varphi(y)dy +$$
$$+ \int\limits_s^t G_i(s,x,\tau,h(\tau))V_i(\tau,t)d\tau, \quad (s,x) \in \overline{S}_t^{(i)}, \ i=1,2. \tag{19}$$

За допомогою умов спряження (4), (5), враховуючи (8), отримуємо таку систему інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду для $V_i(s,t)$:

$$\int\limits_s^t G_i(s,h(s),\tau,h(\tau))V_i(\tau,t)d\tau -$$
$$- \sum_{j=1}^{2} \int\limits_s^t V_j(\tau,t)d\tau \int\limits_{D_{js}} G_j(s,y,\tau,h(\tau))\mu(s,dy) = \Phi_i(s,t), \quad i=1,2, \tag{20}$$

де

$$\Phi_i(s,t) = \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{D_{js}} u_{j0}(s,y,t)\mu(s,dy) - u_{i0}(s,h(s),t), \quad i=1,2.$$

Розглянемо функцію $\Phi_i(s,t)$ із (20). Доведемо, що

$$\lim_{s \uparrow t} \Phi_i(s,t) = 0, \quad i=1,2; \tag{21}$$

$$|\Phi_i(s,t) - \Phi_i(\widetilde{s},t)| \leq C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad \widetilde{s} < s. \tag{22}$$

Твердження (21) неважко перевірити з огляду на властивість (16) потенціалу Пуассона u_{i0} та умову узгодження (7):

$$\lim_{s\uparrow t}\Phi_i(s,t) = \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{D_{jt}}\varphi(y)\mu(t,dy) - \varphi(h(t)) =$$
$$= \int\limits_{D_{1t}\cup D_{2t}}[\varphi(y) - \varphi(h(t))]\mu(t,dy) = 0.$$

Для доведення нерівності (22) різницю $\Phi_i(s,t) - \Phi_i(\widetilde{s},t)$ подамо у вигляді суми $I_1 + I_2 + I_3$, де

$$I_1 = \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{D_{js}}[u_{j0}(s,y,t) - u_{j0}(\widetilde{s},y,t)]\mu(s,dy),$$
$$I_2 = u_{i0}(\widetilde{s},h(\widetilde{s}),t) - u_{i0}(s,h(s),t),$$
$$I_3 = \sum_{j=1}^{2}\Bigg(\int\limits_{D_{js}}u_{j0}(\widetilde{s},y,t)\mu(s,dy) - \int\limits_{D_{j\widetilde{s}}}u_{j0}(\widetilde{s},y,t)\mu(\widetilde{s},dy)\Bigg),$$

і дослідимо окремо кожен доданок цієї суми.

Оскільки при $\widetilde{s} < s$

$$|u_{j0}(s,y,t) - u_{j0}(\widetilde{s},y,t)| =$$
$$= |u_{j0}(s,y,t) - u_{j0}(\widetilde{s},y,t)|^{\frac{1+\alpha}{2}}|u_{j0}(s,y,t) - u_{j0}(\widetilde{s},y,t)|^{\frac{1-\alpha}{2}} \le$$
$$\le \left|\frac{\partial u_{j0}(\hat{s},y,t)}{\partial\hat{s}}\Bigg|_{\hat{s}=\widetilde{s}+\theta(s-\widetilde{s})}\cdot(s-\widetilde{s})\right|^{\frac{1+\alpha}{2}}(|u_{j0}(s,y,t)| + |u_{j0}(\widetilde{s},y,t)|)^{\frac{1-\alpha}{2}} \le$$
$$\le C\|\varphi\|\left[(t-\widetilde{s}-\theta(s-\widetilde{s}))^{-1}(s-\widetilde{s})\right]^{\frac{1+\alpha}{2}} \le C\|\varphi\|\big[((t-s)+$$
$$+ (s-\widetilde{s})(1-\theta))^{-1}(s-\widetilde{s})\big]^{\frac{1+\alpha}{2}} \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

$(0 < \theta < 1)$, то нерівність (22) виконується для доданка I_1. Для I_2 нерівність (22) встановлюється за подібною схемою, з урахуванням гельдеровості функції h (див. припущення V). Для I_3 справедлива оцінка

$$|I_3| \le C\|\varphi\|(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

що є очевидним наслідком припущення IV. Отже,

$$|I_1 + I_2 + I_3| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1+\alpha}{2}}(s-\widetilde{s})^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad \widetilde{s} < s,$$

що й потрібно було довести.

Для того, щоб регуляризувати систему інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду (20), застосуємо до обох частин кожного з її рівнянь інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(s,t)\Phi_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{ds}\int\limits_s^t (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\Phi_i(\rho,t)d\rho, \quad 0 \le s < t \le T,\ i=1,2. \tag{23}$$

Розглянемо спочатку дію оператора $\mathcal{E}$ на праву частину i-го рівняння системи (20), $i=1,2$. Беручи до уваги (21) і (22), для функції $\widehat{\Phi}_i(s,t) \equiv \mathcal{E}(s,t)\Phi_i$ легко знаходимо формулу

$$\widehat{\Phi}_i(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_s^t (\rho-s)^{-\frac{3}{2}}[\Phi_i(\rho,t)-\Phi_i(s,t)]d\rho - \\ - \sqrt{\frac{2}{\pi}}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\Phi_i(s,t), \quad i=1,2. \tag{24}$$

При цьому для функції $\widehat{\Phi}_i(s,t)$ в кожній області вигляду $0 \le s < t \le T$ справджується нерівність

$$|\widehat{\Phi}_i(s,t)| \le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Подіємо тепер оператором $\mathcal{E}$ на ліву частину i-го рівняння системи (20), $i=1,2$. У результаті одержимо вираз, який після зміни порядків інтегрування за ρ і τ, і використання формул (9), (10) можна подати у вигляді

$$-\frac{V_i(s,t)}{\sqrt{b_i(s,h(s))}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{ds}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_s^t N_{ij}(s,\tau)V_j(\tau,t)d\tau, \quad i=1,2, \tag{26}$$

де

$$N_{ii}(s,\tau) = \int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\Bigg[(Z_{i0}(\rho,h(\rho),\tau,h(\tau)) - Z_{i0}(\rho,0,\tau,0)) + \\ + Z_{i1}(\rho,h(\rho),\tau,h(\tau)) - \int\limits_{D_{i\rho}} G_i(\rho,y,\tau,h(\tau))\mu(\rho,dy)\Bigg]d\rho, \quad i=j,$$

$$N_{ij}(s,\tau) = -\int\limits_s^\tau (\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int\limits_{D_{j\rho}} G_j(\rho,y,\tau,h(\tau))\mu(\rho,dy), \quad i \ne j.$$

Для того, щоб спростити похідні від інтегралів, залежних від параметрів, у виразі (26), покажемо, що

$$\lim_{s\uparrow\tau} N_{ij}(s,\tau) = 0. \tag{27}$$

При доведенні цього факту певну складність становить лише дослідження функції

$$L_j(s,\tau) \equiv \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} d\rho \int\limits_{D_{j\rho}} Z_{j0}(\rho, y, \tau, h(\tau))\mu(\rho, dy),$$

яка з'являється у виразі для $N_{ij}(s,\tau)$ відразу ж після того, як G_j розписати за формулою (9). Для всіх інших складових у формулі для $N_{ij}(s,\tau)$ співвідношення (27) легко встановлюється з використанням нерівностей (12), (13).

Функцію $L_j(s,\tau)$ запишемо у вигляді

$$L_j(s,\tau) = L_{j1}(s,\tau) + L_{j2}(s,\tau), \tag{28}$$

де

$$L_{j1}(s,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_j(\tau, h(\tau))}} \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} (\tau - \rho)^{-\frac{1}{2}} d\rho \times$$

$$\times \Big[\int\limits_{D_{j\rho}} \exp\Big\{ -\frac{(y - h(\tau))^2}{2b_j(\tau, h(\tau))(\tau - \rho)} \Big\} \mu(\rho, dy) -$$

$$- \int\limits_{D_{js}} \exp\Big\{ -\frac{(y - h(\tau))^2}{2b_j(\tau, h(\tau))(\tau - \rho)} \Big\} \mu(s, dy) \Big],$$

$$L_{j2}(s,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_j(\tau, h(\tau))}} \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} (\tau - \rho)^{-\frac{1}{2}} d\rho \times$$

$$\times \int\limits_{D_{js}} \exp\Big\{ -\frac{(y - h(\tau))^2}{2b_j(\tau, h(\tau))(\tau - \rho)} \Big\} \mu(s, dy).$$

Оскільки функції $f_{\tau,\rho}(y) = \exp\Big\{\frac{(y-h(\tau))^2}{2b_j(\tau,h(\tau))(\tau-\rho)}\Big\}$ належать до класу $C_b(\mathbb{R})$ для всіх $0 \le s < \rho < \tau < t \le T$ і обмежені одиницею на цій множині, то згідно з умовою IV для L_{j1} виконується нерівність

$$|L_{j1}(s,\tau)| \le C(\tau - s)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad j = 1, 2. \tag{29}$$

Дослідимо функцію $L_{j2}(s,\tau)$. Запишемо її у вигляді

$$L_{j2}(s,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b_j(\tau, h(\tau))}} \int\limits_{D_{js}} \Big[\exp\Big\{ -\frac{(y - h(\tau))^2}{2b_j(\tau, h(\tau))(\tau - s)} \Big\} -$$

$$-\exp\left\{-\frac{(y-h(s))^2}{2b_j(\tau,h(\tau))(\tau-s)}\right\}\Bigg]R_j(s,\tau,y)\mu(s,dy)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi b_j(\tau,h(\tau))}}\int\limits_{D_{js}}\exp\left\{-\frac{(y-h(s))^2}{2b_j(\tau,h(\tau))(\tau-s)}\right\}R_j(s,\tau,y)\mu(s,dy),\quad (30)$$

де через $R_j(s,\tau,y)$ позначено інтеграл

$$R_j(s,\tau,y)=\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}(\tau-\rho)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{(y-h(\tau))^2}{2b_j(\tau,h(\tau))(\tau-s)}\cdot\frac{\rho-s}{\tau-\rho}\right\}d\rho,$$

який після заміни змінних $z=\frac{\rho-s}{\tau-\rho}$ набуває вигляду

$$R_j(s,\tau,y)=\int\limits_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\exp\left\{-\frac{(y-h(\tau))^2}{2b_j(\tau,h(\tau))(\tau-s)}\cdot z\right\}dz,$$

а, отже, задовольняє нерівність

$$|R_j(s,\tau,y)|\le C.\qquad (31)$$

Перший доданок у правій частині рівності (30) позначимо через $L_{j2}^{(1)}$, а другий — через $L_{j2}^{(2)}$. Якщо виразити з допомогою формули Лагранжа приріст експоненти у квадратних дужках виразу для $L_{j2}^{(1)}$ через значення її похідної у проміжній точці $x=y-h(s)+\theta(h(s)-h(\tau))$, а тоді знайти цю похідну, отримаємо

$$L_{j2}^{(1)}(s,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi b_j(\tau,h(\tau))}}\int\limits_{D_{js}}\frac{x}{b_j(\tau,h(\tau))(\tau-s)}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x^2}{2b_j(\tau,h(\tau))(\tau-s)}\right\}(h(\tau)-h(s))R_j(s,\tau,y)\mu(s,dy).$$

З цієї рівності, оцінки (31) і умови V випливає, що

$$|L_{j1}(s,\tau)|\le C(\tau-s)^{\frac{\alpha}{2}}.\qquad (32)$$

Із нерівності (31) випливає також оцінка для $L_{j2}^{(2)}(s,\tau)$:

$$|L_{j2}(s,\tau)|\le C\left(\mu\left(s,D_{js}^\delta\right)+\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B(\tau-s)}\right\}\right),\qquad (33)$$

де $D_{js}^\delta=\{y\in D_{js}:\ |y-h(s)|<\delta\}$, δ — будь-яке додатне число, B — стала з умови I.

Враховуючи співвідношення (28)–(30), (32), (33), робимо висновок, що

$$\lim_{s\uparrow\tau} L_j(s,\tau) = 0.$$

На цьому й завершується доведення (27).

У виразі (26), з огляду на співвідношення (27), внесемо похідну під знак інтеграла і тоді прирівняємо цей вираз до (24). Після елементарних спрощень отримаємо систему інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, еквівалентну системі: (20)

$$V_i(s,t) = \sum_{j=1}^{2} \int_s^t K_{ij}(s,\tau) V_j(\tau,t) d\tau + \Psi_i(s,t), \quad i = 1,2, \tag{34}$$

де

$$\Psi_i(s,t) = -\sqrt{b_i(s,h(s))}\widehat{\Phi}_i(s,t), \;\; K_{ij}(s,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{b_i(s,h(s))}\cdot\frac{d}{ds}N_{ij}(s,\tau).$$

Для функції Ψ_i з (34) справджується нерівність (25), а ядра $K_{ij}(s,\tau)$ не мають інтегровної особливості. Для $K_{ij}(s,\tau)$ можна отримати лише таку оцінку:

$$K_{ij}(s,\tau) \le C(\tau - s)^{-1}, \quad 0 \le s < \tau < t \le T. \tag{35}$$

Оцінка (35) спричинена інтегралом

$$\int_{D_{js}^{\delta}} \frac{\partial Z_{j0}(s,y,\tau,h(\tau))}{\partial y} \mu(s,dy) \tag{36}$$

у виразі для похідної функції L_j

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}L_j(s,\tau) = \int_s^{\tau} (\rho - s)^{-\frac{3}{2}} \Big[\int_{D_{j\rho}} Z_{j0}(\rho,y,\tau,h(\tau))\mu(\rho,dy) - \\
- \int_{D_{js}} Z_{j0}(\rho,y,\tau,h(\tau))\mu(s,dy) \Big] d\rho - \\
- \sqrt{\frac{\pi b_j(\tau,h(\tau))}{2}} \Big(\int_{D_{js}^{(\delta)}} \frac{\partial Z_{j0}(s,y,\tau,h(\tau))}{\partial y}\mu(s,dy) + \\
+ \int_{\mathbb{R}\setminus D_{js}^{(\delta)}} \frac{\partial Z_{j0}(s,y,\tau,h(\tau))}{\partial y}\mu(s,dy) \Big).
\end{aligned}$$

Всі інші складові виразу для $K_{ij}(s,\tau)$ допускають нерівності, праві частини яких мають вигляд $C(\delta)(\tau-s)^{-1+\frac{\alpha}{2}}$, де $C(\delta)$ — додатна стала, що залежить від вибору δ.

Незважаючи на те, що ядра $K_{ij}(s,\tau)$ не мають інтегровної особливості, розв'язок системи рівнянь (34) існує і його можна знайти за допомогою звичайного методу послідовних наближень:

$$V_i(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}V_i^{(n)}(s,t),\quad 0\le s<t\le T,\quad i=1,2, \tag{37}$$

де

$$V_i^{(0)}(s,t)=\Psi_i(s,t),$$
$$V_i^{(n)}(s,t)=\sum_{j=1}^{2}\int\limits_s^t K_{ij}(s,\tau)V_i^{(n-1)}(\tau,t)d\tau,\quad n=1,2,\ldots$$

Збіжність ряду (37) випливає з наступної нерівності, яка встановлюється методом математичної індукції за схемою, застосованою у [6, с. 10–11] при дослідженні системи рівнянь (34) для випадку, коли $h\equiv 0$:

$$\left|V_i^{(n)}(s,t)\right|\le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{(n-k)}(m(\delta))^k,\quad n=0,1,\ldots, \tag{38}$$

де

$$a^{(k)}=\frac{\left(2c(\delta)T^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^k\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+k\alpha}{2}\right)},\quad k=0,1,\ldots,n,$$
$$m(\delta)=\max_{s\in[0,T]}\mu(s,D_{1s}^{\delta}\cup D_{2s}^{\delta})<1 \text{ (за вибором } \delta).$$

З нерівності (38) також випливає, що функція $V_i(s,t),\ i=1,2$, допускає оцінку

$$|V_i(s,t)|\le C\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}},\quad 0\le s<t\le T. \tag{39}$$

Отже, ми побудували розв'язок $u(s,x,t)$ задачі (2)–(7) вигляду (19), (37), який, з огляду на оцінки (12), (13), (17), (39), належить до класу $C^{1,2}(S_t^{(1)}\cup S_t^{(2)})\cap C(\overline{S}_t)$ і задовольняє нерівність

$$|u(s,x,t)|\le C\|\varphi\|. \tag{40}$$

Твердження про єдиність побудованого розв'язку задачі (2)–(7) випливає з принципу максимуму [7] (див. у [6] доведення аналогічного твердження).

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай виконані умови I–V. Тоді задача (2)–(7) має єдиний розв'язок з класу* $C^{1,2}(S_t^{(1)} \cup S_t^{(2)}) \cap C(\overline{S}_t)$*. Крім того, цей розв'язок допускає зображення вигляду (19), (37) і оцінку (40).*

4. Напівгрупа Феллера

Нехай $C_0(\mathbb{R})$ — підпростір $C_b(\mathbb{R})$, що складається з усіх функцій $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, для яких виконується умова (7). Оскільки підпростір $C_0(\mathbb{R})$ є замкнутим у $C_b(\mathbb{R})$, він є банаховим простором.

Означимо двопараметричну сім'ю лінійних операторів $T_{st} : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$, $0 \le s < t \le T$, за таким правилом:

$$T_{st}\varphi(x) = u(s, x, t, \varphi), \tag{41}$$

де $u(s, x, t, \varphi)$ — розв'язок задачі (2)–(7) з функцією φ в умові (3).

Зауважимо, що оператори T_{st} в просторі $C_0(\mathbb{R})$ мають наступні властивості:

а) якщо послідовність функцій $\varphi_n \in C_0(\mathbb{R})$ така, що $\sup\limits_n \|\varphi_n\| < \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} T_{st}\varphi_n(x) = T_{st}\varphi(x)$ при всіх $0 \le s < t \le T,\ x \in \mathbb{R}$;

б) оператори T_{st} — невід'ємні ($0 \le s < t \le T$), тобто $T_{st}\varphi \ge 0$ для будь якої $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ такої, що $\varphi \ge 0$;

в) оператори T_{st} — стискуючі ($0 \le s < t \le T$), тобто, вони не збільшують норму елемента;

г) $T_{st} = T_{s\tau}T_{\tau t},\ 0 \le s < \tau < t \le T$ (напівгрупова властивість);

Властивість а), що є очевидним наслідком теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, свідчить про те, що оператори T_{st} є неперервними не тільки відносно сильної збіжності φ_n до φ, при $n \to \infty$, а й такої, про яку йдеться в умові а). Враховуючи цю властивість, не обмежуючи загальності, всі наступні міркування будемо проводити за припущення, що функція φ — фінітна.

Доведемо властивість б). Нехай $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ — фінітна і невід'ємна при всіх $x \in \mathbb{R}$. Позначимо через γ мінімум $T_{st}\varphi(x)$ в смузі $(s, x) \in \overline{S}_t$. Якщо припустити, що $\gamma < 0$, то з принципу максимуму [7] випливає, що значення γ може досягатися лише при $s \in (0, t)$ і $x = h(s)$. Зафіксуємо $s_0 \in (0, t)$ для якого $T_{s_0t}\varphi(h(s_0)) = \gamma$. Тоді

$$\int\limits_{D_{1s_0} \cup D_{2s_0}} [T_{s_0t}\varphi(h(s_0)) - T_{s_0t}\varphi(y)]\mu(s_0, dy) < 0,$$

що суперечить умові (5). Отримана суперечність вказує на те, що $\gamma \geq 0$, що й потрібно було довести.

Властивість в) випливає з б) і того факту, що $T_{st}1 = 1$ при $0 \leq s < t \leq T$.

Напівгрупова властивість операторів T_{st} є наслідком твердження про єдиність розв'язку задачі (2)–(7). Справді, для того, щоб знайти $u(s,x,t) = T_{st}\varphi(x)$, коли дано, що $\lim_{s\uparrow t} u(s,x,t) = \varphi(x)$, можна спочатку розв'язати задачу у часовому проміжку $[\tau, t]$, а потім розв'язати її у часовому проміжку $[s,\tau]$ з тією „початковою" функцією $u(\tau,x,t) = T_{\tau t}\varphi(x)$, яку було отримано; інакше кажучи, $T_{st}\varphi(x) = T_{s\tau}(T_{\tau t}\varphi)(x),\ \varphi \in C_0(\mathbb{R})$, або $T_{st} = T_{s\tau}T_{\tau t}$.

Із властивостей а)–г) операторів T_{st} випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді двопараметрична напівгрупа операторів T_{st}, $0 \leq s < t \leq T$, визначена рівністю (41), породжує такий неоднорідний процес Феллера на прямій $\mathbb{R}$, що в областях D_{s1} і D_{s2} він збігається із заданими там дифузійними процесами, керованими операторами $L_s^{(1)}$ і $L_s^{(2)}$ відповідно, а його поведінка при потраплянні на спільну межу цих областей $x = h(s)$ описується умовою спряження (5).*

1. *Feller W.* The parabolic differential equations and associated semigroups of transformations // Ann. of Math. Soc. – 1952. – **55**. – P. 468–519.

2. *Вентцель А.Д.* Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // Докл. АН СССР. – 1956. – **111**, № 2. – С. 269–272.

3. *Langer H., Schenk W.* Knotting of onedimentional Feller processes // Math. Nachr. – 1983. – **113**. — P. 151–161.

4. *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – К.: Інститут математики НАН України, 1995. – 199 с.

5. *Копитко Б.І., Цаповська Ж.Я.* Метод потенціалів в параболічній крайовій задачі з граничною умовою Вентцеля // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2000. – **56**. – С. 106–115.

6. *Shevchuk R.V.* Pasting of two one-dimensional diffusion processes // Annales Mathematicae et Informaticae. – 2012. – **39**. – P. 225–239.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. : Наука, 1967. – 736 с.

8. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1964. – **4**, № 6. – С. 1006–1024.

9. *Скубачевский А.Л.* О полугруппах Феллера для многомерных диффузионных процессов // Докл. АН. – 1995. – **341**, № 2. – С. 173–176.

10. *Пилипенко А.Ю.* Об отображении Скорохода для уравнений с отражением с возможностью скачкообразного выхода из границы // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1241–1256.

11. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

Bohdan Kopytko, Roman Shevchuk, Zhanneta Tsapovska

ON TWO-PARAMETER FELLER SEMIGROUP WITH NONLOCAL CONDITION

In this paper we study a conjugation problem for one-dimensional (with respect to spatial variable) linear parabolic equation of the second order with discontinuous coefficients assuming that the nonlocal Feller-Wentzell conjugation condition is given on the curve of discontinuity of the equation coefficients. Using the solution of this problem we construct Feller semigroup for one-dimensional inhomogeneous diffusion process with moving membrane.

УДК 517.94

Антон Кузь[1]

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В роботі досліджено задачу з інтегральною умовою за часом для мішаного параболо-гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в обмеженій області. Встановлено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку вказаної задачі у відповідних функціональних просторах. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку, використано метричний підхід.

1. Вступ

В останні роки значна увага математиків спрямована на дослідження задач з інтегральними умовами, які є узагальненням дискретних нелокальних умов. Їх вивчення зумовлене як потребою побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, так і тим, що задачі з інтегральними умовами виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів у випадках, коли неможливо виміряти певні фізичні величини, але відомі їхні середні значення.

Одним з актуальних напрямків сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є теорія нелокальних крайових задач для рівнянь мішаного (гіперболо-еліптичного і параболо-гіперболічного) типу, які мають важливе застосування в газодинаміці, магнітній гідродинаміці, теорії електричних кіл, теорії нескінченно малих згинів поверхонь, в безмоментній теорії оболонок зі змінною кривизною та ін.

Початок вивченню крайових задач для рівнянь мішаного типу було покладено у роботах Ф. Трікомі [16] та С. Геллерстедта [20], де було вперше поставлено та досліджено крайові задачі для модельних рівнянь гіперболо-еліптичного типу, тепер відомих як „задача Трікомі" і „задача Геллерстедта". Вперше на необхідність розгляду крайових задач для рівнянь параболо-гіперболічного типу, де на одній частині області задано параболічне рівняння, а на іншій – гіперболічне, було вказано в 1959 р. І. М. Гельфандом [3]. Зокрема, він навів приклад задачі про рух газу по каналу з пористим навколишнім середовищем: рух газу в каналі описувався хвильовим рівнянням, а ззовні – рівнянням дифузії. Також

[1] *ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com*

крайові задачі для таких рівнянь виникають в теорії електричних кіл та магнітній гідродинаміці. Як приклад, можна навести телеграфне рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (CR + GL)\frac{\partial U}{\partial t} + GRU,$$

де $U := U(t,x)$ – напруга в провіднику, C – ємність, R – опір, L – самоіндукція, G – коефіцієнт втрат. Легко помітити, що при $G = R = 0$, рівняння є гіперболічного типу, а при $L = 0$ – параболічного.

Задачі з локальними та нелокальними (в тому числі інтегральними) умовами для параболо-гіперболічних рівнянь другого порядку, розглядалися у роботах Г. М. Стручіної [14], Я. С. Уфлянда [17], В. Н. Врагова [2], А. М. Нахушева і Х. Г. Бжихатлова [1], Л. А. Золіної [5], Н. Ю. Капустіна [7], К. Б. Сабітова [21], Г. Р. Юнусової [19], В. О. Капустяна та І. О. Пишнограєва [6], І. Я. Савки та М. М. Симотюка [12] та ін. У багатьох випадках коректна розв'язність таких задач для обмежених областей пов'язана з так званою *проблемою малих знаменників* [11], яка розв'язувалась наведеними вище авторами тільки частково для окремих випадків задач. Тому крайові задачі для параболо-гіперболічних рівнянь залишаються мало дослідженими.

Математично ефект малих знаменників проявляється у тому, що в розв'язки рівнянь, які зображуються рядами, входить нескінченна кількість членів із коефіцієнтами, знаменники яких є як завгодно близькими до нуля, що спричиняє розбіжність цих рядів. А. М. Колмогоров [9] запропонував для розв'язання проблеми малих знаменників метричну концепцію і застосував її до задачі про рухи на торі та в теорії динамічних систем. У цих задачах малі знаменники мають вигляд лінійних форм $(\omega, k) = \omega_1 k_1 + \cdots + \omega_p k_p$, $\omega \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Ідея метричного підходу полягала в наступному: 1) враховувалось, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів ω виконуються оцінки

$$|(\omega, k)| \geqslant C\left(|k_1| + \cdots + |k_p|\right)^{-\delta}, \quad C > 0,\, \delta > p,\, k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}; \qquad (1)$$

2) аналіз збіжності рядів з малими знаменниками проводився лише для тих ω, які задовольняють оцінки (1).

На основі метричного підходу до оцінок знизу малих знаменників у школі Б. Й. Пташника ним та його учнями було встановлено умови коректної розв'язності задач з нелокальними (у тому числі періодичними, багатоточковими та інтегральними) умовами за виділеною змінною для широких класів лінійних (а також слабко нелінійних) рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними довільного порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами.

У даній роботі, яка є розвитком [10], досліджується коректна розв'язність задачі з інтегральною умовою за часом для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

2. Основні позначення

Будемо використовувати такі позначення: $\delta_{j,l}$ – символ Кронекера;

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad dx = dx_1 \cdots dx_p;$$

$$\partial_t = \partial/\partial t, \quad \partial_{x_j} = \partial/\partial x_j, \ j = 1, \ldots, p, \quad \Delta = \sum_{j=1}^{p} \partial_{x_j}^2;$$

$$s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p, \quad |s| = s_1 + \cdots + s_p, \quad \partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_1}^{s_1},$$

$$k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| = |k_1| + \cdots + |k_p|, \quad \|k\| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_p^2};$$

$$\mathcal{D}^p = \{(t, x) : t \in (-T_1, T_2), x \in G\}, \quad T_1, T_2 > 0,$$

$$\mathcal{D}_-^p = \mathcal{D}^p \cap \{t < 0\}, \quad \mathcal{D}_+^p = \mathcal{D}^p \cap \{t > 0\}; \quad t_1 \in [0, T_1], \, t_2 \in [0, T_2];$$

$G \subset \mathbb{R}^p$ — обмежена однозв'язна область з гладкою межею ∂G;

$\mathcal{C}^{q,\nu}(\overline{G})$ — клас визначених в області $\overline{G}$ функцій, q-ті похідні яких справджують в $\overline{G}$ умову Гельдера з показником ν, $0 < \nu < 1$;

$A^{q,\nu}$ — клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей належать класу $\mathcal{C}^{q,\nu}$;

$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A$ – міра Лебега вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$;

$C_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots,$ — величини, які не залежать від k.

3. Постановка задачі

В області $\mathcal{D}^p$ розглядаємо таку задачу: знайти функцію $u := u(t, x)$, яка справджує наступні умови:

$$Lu \equiv \begin{cases} \partial_t u - a(t)\mathcal{L}^n u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}_+^p, \\ \partial_t^2 u - b(t)\mathcal{L}^n u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}_-^p, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$\alpha u(-t_1, x) + \beta \int_{-t_1}^{t_2} u(t, x) dt = \varphi(x), \quad x \in G, \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \partial_t^q u(-\varepsilon, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \partial_t^q u(\varepsilon, x), \quad q = 0, 1, \quad x \in G, \tag{4}$$

$$\mathcal{L}^{j-1} u\big|_{\partial G} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

де

$$a(t) \in C[0, T_2], \quad a(t) > 0, \qquad b(t) \in C[-T_1, 0], \quad b(t) > 0;$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0, \quad \varphi \in L_2(G);$$

$\mathcal{L}$ — еліптичний в $\overline{G}$ диференціальний вираз з дійснозначними коефіцієнтами, визначений формулою

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{p} \partial_{x_i}(w_{ij}(x)\partial_{x_j}) - v(x), \tag{6}$$

причому $\mathcal{L}^0 u \equiv u$, $\mathcal{L}^n u = \mathcal{L}(\mathcal{L}^{n-1}u)$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Функціональні простори

Нехай область G належить класу $A^{n,\nu}$ і коефіцієнти диференціального виразу (6) справджують наступні умови:

$$v(x) \geqslant 0, \quad v \in C^{2n-2,\,\nu}(\overline{G}), \quad w_{ij} \in C^{2n-1,\,\nu}(\overline{G}), \quad i,j = 1,\dots,p. \tag{7}$$

Відомо [4], що за умов (7) задача на власні значення

$$\mathcal{L}X = -\lambda X, \quad X|_{\partial G} = 0,$$

має повну ортогональну (для зручності вважатимемо її надалі ортонормованою) в $L_2(G)$ систему власних функцій $\{\mathcal{X}_k(x), k \in \mathbb{N}\}$, всі власні значення цієї задачі λ_k, $k \in \mathbb{N}$, є дійсними, попарно різними та додатніми; $\mathcal{X}_k \in C^{2n}(\overline{G})$, причому

$$C_1 k^{2/p} \leqslant \lambda_k \leqslant C_2 k^{2/p}, \quad 0 < C_1 \leqslant C_2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

$$\max_{x \in \overline{G}} |\partial_x^s \mathcal{X}_k(x)| \leqslant C_3 \lambda_k^{p/4+|s|/2}, \quad C_3 := C_3(s), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Розв'язність задачі досліджуватимемо у таких фунціональних просторах:

$W_{\rho,\psi,\gamma}(G) := W_{\psi,\rho,\gamma}(\mathcal{L}; G)$, $\psi, \gamma \geqslant 0$, $G \in A^{n,\nu}$, — простір функцій $y \in L_2(G)$ таких, що

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \lambda_k^{2\rho} \exp(2\psi\lambda_k^{\gamma}) < \infty, \qquad y_k = \int_G y(x)\mathcal{X}_k(x)dx,$$

де λ_k, $\mathcal{X}_k(x)$ — власні значення та власні функції оператора (6), із нормою $\|y; W_{\rho,\psi,\gamma}(G)\| = \sqrt{Y}$;

Зауважимо, що $W_{\rho_2,\psi_2,\gamma_2}(G) \subset W_{\rho_1,\psi_1,\gamma_1}(G)$, якщо $\rho_2 > \rho_1$, $\psi_2 \geqslant \psi_1$, $\gamma_2 \geqslant \gamma_1$, причому

$$\|y; W_{\rho_1,\psi_1,\gamma_1}(G)\| < \|y; W_{\rho_2,\psi_2,\gamma_2}(G)\|. \tag{10}$$

$C^n([c,d], W_{\rho,\psi,\gamma}(G))$ — простір функцій $f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\mathcal{X}_k(x)$ визначених в $\overline{D}$ таких, що для кожного фіксованого $t \in [c,d]$ похідні

$\partial_t^q f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(q)}(t)\mathcal{X}_k(x)$, $q = 0, 1, \ldots, n$, належать простору $W_{\rho,\psi,\gamma}(G)$. Норма в цьому просторі визначається наступним чином:

$$\|f; C^n([c,d], W_{\rho,\psi,\gamma}(G))\| = \sum_{q=0}^{n} \max_{t\in[c,d]} \|\partial^q f/\partial t^q; W_{\rho,\psi,\gamma}(G)\|.$$

$C^{(l,h)}(\overline{\mathcal{D}}^p)$ — простір функцій $u(t,x)$, які є l разів неперервно диференційовними за змінною t та h разів неперервно диференційовними за x із нормою

$$\left\|u; C^{(l,h)}(\overline{\mathcal{D}}^p)\right\| = \sum_{\substack{0\leqslant|\hat{s}|\leqslant h \\ s_0\leqslant l}} \max_{t\in[0,T]} \max_{x\in G} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|,$$

де $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$.

На підставі оцінок (9), (10) легко показати, що справедливе таке вкладення:

$$\begin{aligned} &W_{\rho+n+p/4,\psi,\gamma}(G) \subset C^{2n}(G), \\ &C^n([-T_1, T_2], W_{\rho+n+p/4,\psi,\gamma}(G)) \subset C^{(n,2n)}(\overline{\mathcal{D}}^p), \qquad \rho \geqslant 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1)-(5) *із простору* $C^1([-T_1, T_2]; W_{\rho,\psi,n}(G)) \cap C^2([-T_1, 0], W_{\rho,\psi,n}(G))$ *називаємо ряд*

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(t)\mathcal{X}_k(x),$$

де кожен із коефіцієнтів $u_k(t) \in C^1[-T_1, T_2] \cap C^2[-T_1, 0]$ *задовольняє рівності*

$$\begin{cases} u_k'(t) + (-1)^{n+1} a(t)\lambda_k^n u_k(t) = 0, & 0 < t < T_2, \\ u_k''(t) + (-1)^{n+1} b(t)\lambda_k^n u_k(t) = 0, & -T_1 < t < 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\alpha u_k(-t_1) + \beta \int_{-t_1}^{t_2} u_k(t)dt = \varphi_k, \tag{13}$$

$$u_k(0-0) = u_k(0+0), u_k'(0-0) = u_k'(0+0), \tag{14}$$

де $\varphi_k = \int_G \varphi(x)\mathcal{X}_k(x)dx$.

5. Побудова розв'язку

Розв'язок задачі (1)-(5) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(t)\mathcal{X}_k(x), \tag{15}$$

де кожен із коефіцієнтів $u_k(t)$ є розв'язком відповідної задачі (12)-(14).

Позначимо:

$$f_{1k}(t) = \exp\left((-1)^n \lambda_k^n A(t)\right), \quad A(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau; \tag{16}$$

$f_{2k}(t), f_{3k}(t)$ — розв'язки такої задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$f''_{jk}(t) + (-1)^{n+1}b(t)\lambda_k^n f_{jk}(t) = 0, \quad -T_1 < t < 0, \tag{17}$$

$$f_{jk}^{(q-1)}(0) = \delta_{j-1,q}, \quad q = 1,2, \quad j = 2,3. \tag{18}$$

Зауважимо, що функції $f_{2k}(t), f_{3k}(t)$ утворюють нормальну (в точці $t = 0$) фундаментальну систему розв'язків рівняння (17).

Загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$u_k(t) = \begin{cases} C_{1k}f_{1k}(t), \quad 0 < t < T_2, \\ C_{2k}f_{2k}(t) + C_{3k}f_{3k}(t), \quad -T_1 < t < 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Підставивши формулу (19) в умови (13), (14), отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих C_{jk}, $j = 1,2,3$:

$$\begin{cases} C_{1k} - C_{2k} = 0, \\ (-1)^n\lambda_k^n a(0)C_{1k} - C_{3k} = 0, \\ C_{1k}\beta\int_0^{t_2} f_{1k}(t)dt + C_{2k}\left(\alpha f_{2k}(-t_1) + \beta\int_{-t_1}^0 f_{2k}(t)dt\right) + \\ \qquad +C_{3k}\left(\alpha f_{3k}(-t_1) + \beta\int_{-t_1}^0 f_{3k}(t)dt\right) = \varphi_k. \end{cases} \tag{20}$$

Визначник системи (20) зображується формулою

$$\Delta(k,t_1,t_2) = \alpha g_k(-t_1) + \beta\left(\int\limits_0^{t_2} f_{1k}(t)dt + \int\limits_{-t_1}^0 g_k(t)dt\right), \tag{21}$$

де

$$g_k(t) = f_{2k}(t) + (-1)^n\lambda_k^n a(0)f_{3k}(t). \tag{22}$$

Відомо, що система (20) має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли $\Delta(k,t_1,t_2)\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$. Легко показати (методом від супротивного), що задача (12)-(14) не може мати двох різних розв'язків для тих і лише для тих $k\in\mathbb{N}$, для яких $\Delta(k,t_1,t_2)\neq 0$ (див. також [15]).

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(5) *у шкалі просторів* $C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\cap C^2([-T_1,0],W_{\rho,\psi,n}(G))$ *необхідно і досить, щоб виконувалася умова*

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \Delta(k,t_1,t_2)\neq 0. \tag{23}$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо протилежне: умова (23) не виконується, тобто для деякого $\bar{k}\in\mathbb{N}$ $\Delta(\bar{k},t_1,t_2)=0$. Тоді існують нетривіальні розв'язки $u_{\bar{k}}(t)$ вигляду (19) однорідної задачі (12)-(14), де сталі $C_{q\bar{k}}$, $q=1,2,3$, визначаються з однорідної системи алгебричних рівнянь (20), визначник якої збігається з $\Delta(\bar{k},t_1,t_2)$. Тому однорідна задача (12)-(14) має нетривіальні розв'язки $u(t,x)=u_{\bar{k}}(t)\mathcal{X}_{\bar{k}}(x)$, а розв'язок задачі (1)-(5), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Нехай виконується умова (23). Припустимо, що існують два розв'язки розв'язки $u_1(t,x),u_2(t,x)$ задачі (1)-(5) з простору $C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\cap C^2([-T_1,0],W_{\rho,\psi,n}(G))$. Тоді функція $\tilde{u}(t,x)=u_2(t,x)-u_1(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі (1)-(5) з простору $C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\cap C^2([-T_1,0],W_{\rho,\psi,n}(G))$. Кожний із коефіцієнтів $\tilde{u}_k(t)$ функції $\tilde{u}(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі (12)-(14). Оскільки $\Delta(\bar{k},t_1,t_2)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{N}$, то однорідна задача (12)-(14) має лише тривіальні розв'язки для всіх $k\in\mathbb{N}$, а отже $\tilde{u}_k(t)\equiv 0$, $k\in\mathbb{N}$. Звідси отримуємо, що $\tilde{u}(t,x)\equiv 0$ у просторі $C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\cap C^2([-T_1,0],W_{\rho,\psi,n}(G))$, тобто $u_1(t,x)\equiv u_2(t,x)$. ■

За умови (23) існує єдиний розв'язок системи (20), а формальний розв'язок задачі (1)-(5) зображується формулою

$$u(t,x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varphi_k f_{1k}(t)}{\Delta(\mu_k,t_1,t_2)}\mathcal{X}_k(x), & 0\leqslant t\leqslant T_2,\\[2ex] \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varphi_k g_k(t)}{\Delta(\mu_k,t_1,t_2)}\mathcal{X}_k(x), & -T_1\leqslant t\leqslant 0.\end{cases} \tag{24}$$

6. Існування розв'язку задачі

Ряд (24), взагалі, є розбіжним у шкалі просторів $C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\cap C^2([-T_1,0],W_{\rho,\psi,n}(G))$, бо вираз $|\Delta(k,t_1,t_2)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості чисел $k\in\mathbb{N}$. Іншими словами, існування розв'язку задачі (1)-(5) у цих просторах пов'язане з проблемою малих знаменників.

Позначимо:

$$\tilde{A} = \int\limits_0^{T_2} a(t)dt, \quad \tilde{B} = \int\limits_{-T_1}^{0} b(t)dt.$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (23) *та існують додатні сталі* η, ν *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) натуральних* k *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,t_1,t_2)| > \lambda_k^{-\eta} \exp(-\nu\lambda_k^n). \tag{25}$$

Якщо $\varphi(x) \in W_{q_1,q_2,n}(G)$, *де* $q_1 > \rho+\eta+2n$, $q_2 > \psi+\nu+\max\{\tilde{A}, \tilde{B}T_1\}$, *то існує єдиний розв'язок* $u(t,x)$ *задачі* (1)–(5), *у шкалі просторів* $C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\cap C^2([-T_1,0],W_{\rho,\psi,n}(G))$. *Цей розв'язок зображується формулою* (24), *причому виконується оцінка*

$$\max\{\|u;C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\|, \|u;C^2([-T_1,0],W_{\rho,\psi,n}(G))\|\} \leqslant \\ \leqslant C_4\|\varphi;W_{q_1,q_2,n}(G)\|, \quad C_4 := C_4(n,b(0),a(T_2),\tilde{B}).$$

Доведення. Для кожної з функцій $f_{qk}(t)$, $q = 2,3$, на підставі (17), (18) і теореми 4 у [8, с. 27] отримуємо такі оцінки:

$$\left|\partial_t^{j-1} f_{qk}(t)\right| < C_5(1+2\delta_{j,3}\tilde{B}\lambda_k^n)\exp(\tilde{B}\lambda_k^n|t|), \quad j = 1,2,3. \tag{26}$$

З (22) та (26) випливає нерівність

$$\max_{t\in[-T_1,0]} |\partial^{j-1} g_k(t)| < C_6(1+2\delta_{j,3}\tilde{B}\lambda_k^n)\lambda_k^n \exp(\tilde{B}\lambda_k^n T_1), \quad j = 1,2,3, \tag{27}$$

де $C_6 = 2C_5 b(0)$. На підставі (16) отримуємо

$$\max_{t\in[0,T_2]} |\partial_t^{j-1} f_{1k}(t)| < (1+\delta_{j,2} a(T_2)\lambda_k^n)\exp(\tilde{A}\lambda_k^n), \quad j = 1,2. \tag{28}$$

За умов теореми з формул (19), (24)-(27) випливають такі оцінки:

$$\max_{t\in[-T_1,T_2]} |\partial_t^{j-1} u_k(t)| < C_7|\varphi_k|\lambda_k^{n+\eta}\times \\ \times\exp\left((\nu+\max\{\tilde{A},\tilde{B}T_1\})\lambda_k^n\right), \ j = 1,2, \tag{29}$$

$$\max_{t\in[-T_1,0]} |\partial_t^{j-1} u_k(t)| < C_8|\varphi_k|\lambda_k^{2n+\eta}\times \\ \times\exp\left((\nu+\max\{\tilde{A},\tilde{B}T_1\}\lambda_k^n)\right), \ j = 1,2,3, \tag{30}$$

де $C_7 = 2\max\{a(T_2), C_6\}$, $C_8 = 2C_6\tilde{B}$.

З (24) та (29) отримуємо, що

$$\begin{aligned}
\|u;&C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\| \\
&<2\left(\sum_{k\in N}\max_{j=1,2}\left\{\max_{t\in[-T_1,T_2]}|\partial_t^{j-1}u_k(t)|^2\right\}\lambda_k^{2\rho}\exp(2\psi\lambda_k^n)\right)^{1/2} \\
&<2C_7\left(\sum_{k\in N}|\varphi_k|^2\lambda_k^{2(\rho+\eta+n)}\exp\left(2(\nu+\max\{\tilde{A},\tilde{B}T_1\}+\psi)\lambda_k^n\right)\right)^{1/2} \\
&\quad= 2C_7\|\varphi; W^{\rho+\eta+n,\nu+\max\{\tilde{A},\,\tilde{B}T_1\}+\psi,\,n}\|.
\end{aligned} \tag{31}$$

На підставі (30) аналогічно показуємо, що

$$\begin{aligned}
\|u;&C^2([-T_1,0];W_{\rho,\psi,n}(G))\| \\
&<3C_8\left(\sum_{k\in N}|\varphi_k|^2\lambda_k^{2(\rho+\eta+2n)}\exp\left(2(\nu+\max\{\tilde{A},\tilde{B}T_1\}+\psi)\lambda_k^n\right)\right)^{1/2} \\
&\quad= 3C_8\|\varphi; W^{\rho+\eta+2n,\nu+\max\{\tilde{A},\,\tilde{B}T_1\}+\psi,\,n}\|.
\end{aligned} \tag{32}$$

З нерівностей (31), (32) отримуємо оцінку

$$\max\{\|u;C^1([-T_1,T_2];W_{\rho,\psi,n}(G))\|, \|u;C^2([-T_1,0],W_{\rho,\psi,n}(G))\|\} \leqslant$$
$$\leqslant C_9\|\varphi; W_{q_1,q_2,n}(G)\|,$$

де $C_9 = \max\{2C_7, 3C_8\}$, з якої випливає доведення теореми. ■

Зауваження 1. Якщо в умовах теореми 2 параметри $\rho \geqslant n + p/4$, $\psi, \gamma > 0$, то з вкладення (11) випливає існування класичного розв'язку задачі (1)–(5) — розв'язку з простору $C^{(1,2n)}(\overline{\mathcal{D}}^p) \cap C^{(2,2n)}(\overline{\mathcal{D}}^p_-)$.

7. Оцінки малих знаменнників

З'ясуємо, коли виконується нерівність (25). Для цього нам знадобляться деякі допоміжні твердження про оцінки зверху мір виняткових множин гладких функцій.

Лема 1 ([11]). *Нехай функція $f \in C^n[c,d]$ і нехай для всіх $t \in [c,d]$ виконується нерівність*

$$|f^{(n)}(t)| \geqslant \delta > 0.$$

Тоді

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(f,\varepsilon,[c,d]) \leqslant C_{11}\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}.$$

Можливість виконання оцінки (25) з'ясуємо відносно параметра t_2, який є верхньою межею інтегрування в умові (2).

Теорема 3. *Нехай в умовах* (2) $\beta \neq 0$ *та* $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, *у рівнянні* (1). *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_2 > 0$ *та для довільних* α, t_1 *нерівність* (25) *виконується при*

$$\eta \geqslant \frac{p}{2} + \varepsilon, \quad \nu = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$.

Якщо $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_2 \in (0, T_2]$, *та для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{N}$ *і довільних* α, t_1 *нерівність* (25) *виконується при*

$$\eta = 0, \quad \nu \geqslant \tilde{A} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Доведення. Нехай $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Позначимо:

$$E_1(k, t_2) := \left\{ t_2 \in [0, T_2] : |\Delta(k, t_1, t_2)| < \lambda_k^{-\frac{p}{2} - \varepsilon} \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Зафіксуємо число $k = \hat{k} \in \mathbb{N}$. Тоді на підставі (16), (21) та, враховуючи, що $\lambda_{\hat{k}} > 0$, $\tilde{A} > 0$, отримуємо оцінку

$$\left| \frac{\partial \Delta(\hat{k}, t_1, t_2)}{\partial t_2} \right| = \left| \beta \exp(\lambda_{\hat{k}}^n \tilde{A}) \right| > |\beta|. \tag{33}$$

Тоді з оцінок (8), (33) та леми 1 випливає, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_1(\hat{k}, t_2) < |\beta|^{-1} \lambda_{\hat{k}}^{-\frac{p}{2} - \varepsilon} \leqslant C_{17} \hat{k}^{-1 - \frac{2\varepsilon}{p}}, \tag{34}$$

де $C_{17} = C_2 / |\beta|$. З (34) випливає, що ряд $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_1(k, t_2)$ збіжний, а отже, за лемою Бореля-Кантеллі, міра тих $t_2 \in [0, T_2]$, для яких виконується нерівність $|\Delta(k, t_1, t_2)| < \lambda_k^{-\frac{p}{2} - \varepsilon}$, дорівнює нулеві. Тобто, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_2 \in [0, T_2]$ виконується нерівність

$$|\Delta(k, t_1, t_2)| > \lambda_k^{-\frac{p}{2} - \varepsilon}, \quad \nu \leqslant 0.$$

Нехай тепер $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. Позначимо:

$$E_2(k, t_2) := \left\{ t_2 \in (0, T_2] : |\Delta(k, t_1, t_2)| < \exp(-(\tilde{A} + \varepsilon)\lambda_k^n) \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Зафіксуємо число $k = \hat{k} \in \mathbb{N}$. Тоді з (16), (21) випливає, що

$$\left| \frac{\partial \Delta(\hat{k}, t_1, t_2)}{\partial t_2} \right| = \left| \beta \exp(-\lambda_{\hat{k}}^n A(t_2)) \right| > |\beta| \exp(-\lambda_{\hat{k}}^n \tilde{A}). \tag{35}$$

На підставі (8), (35) та леми 1 отримуємо таку оцінку:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_2(\hat{k}, t_2) < |\beta|^{-1} \exp(-\varepsilon \lambda_{\hat{k}}^n) \leqslant |\beta|^{-1} \exp(-\varepsilon (C_2)^n \hat{k}^{2n/p}). \qquad (36)$$

З (36) випливає, що ряд $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_2(k, t_2)$ збіжний і аналогічними до попереднього випадку міркуваннями отримуємо, що при $n = 2m+1$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_2 \in (0, T_2]$, виконується нерівність

$$|\Delta(k, t_1, t_2)| > \exp(-(\tilde{A} + \varepsilon)\lambda_k^n), \quad \eta \leqslant 0,$$

з якої і випливає доведення теореми. ■

8. Висновки

В роботі на основі метричного підходу до проблеми малих знаменників встановлено умови коректної розв'язності задачі з інтегральною умовою для параболо-гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами. Оцінки малих знаменників встановлено для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) значень верхньої межі інтегрування. Отримані результати можна поширити на випадок рівнянь вигляду

$$\begin{cases} (\partial_t - a(t)\mathcal{L}^n)u = 0, & (t,x) \in \mathcal{D}_+^p, \\ (\partial_t - b_2(t)\mathcal{L}^m)(\partial_t - b_1(t)\mathcal{L}^m)u = 0, & (t,x) \in \mathcal{D}_-^p, \end{cases} \qquad (37)$$

де $a(t) > 0$, $b_1(t), b_2(t) > 0$ — задані достатньо гладкі функції, $\mathcal{L}$ — диференціальний вираз, заданий формулою (6).

Написання цієї статті, взагалі кажучи, було б неможливим без Богдана Йосиповича. Його любов до математики, працелюбність, увага до деталей та точність викладу думок завжди будуть орієнтиром для автора у власних наукових пошуках.

1. *Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Докл. АН СССР. – 1968. – **183**, № 2. – С. 261–264.

2. *Врагов В. Н.* Смешанная задача для одного класса параболо-гиперболических уравнений второго порядка // Дифференwц. уравнения. – 1976. – **12**, № 1. – С. 24–31.

3. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – **14**, № 3. – С. 3–19.

4. *Ильин В. Л., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1960. – **24**, №6. – С. 883–896.

5. *Золина Л. А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. – 1966. – **6**, № 6. – С. 991–1001.

6. *Капустян В. О., Пишнограєв І. О.* Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами // Наукові вісті НТУ "Київський політехнічний інститут". – 2012. – № 4. – С. 72–76.

7. *Капустин Н. Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболпческого уравнения с вырождающейся частью // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 1. – С. 72–78.

8. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М. : Наука, 1980. – 288 с.

9. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763–766.

10. *Кузь А. М.* Задача з умовою, що містить інтегральний доданок, для параболо-гіперболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 635–644. (Переклад: *Kuz' A. M., Ptashnyk B. I.* A problem with condition containing an integral term for a parabolic-hyperbolic equation // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, No. 5. – P. 723–734.)

11. *Пташник Б. Й., Ільків В. С. , Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

12. *Савка І.Я., Симотюк М.М.* Задача спряження з інтегральною умовою за часовою змінною для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу // Прикарпатський вісник НТШ. Серія «Число». – 2015. – 1 (28). – С. 72–77.

13. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М. : Наука, 1977. – 143 с.

14. *Стручина Г. М.* Задача о сопряжении двух уравнений // Инженер.-физ. журн. – 1961. – **4**, № 11. – С. 99–104.

15. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308+XIV с.

16. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных смешанного типа. – М. : ИЛ, 1947. – 192 с.

17. *Уфлянд Я. С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженер.-физ. журн. – 1964. – **7**, № 1.– С. 89–92.

18. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: в 4-х т. – М. : Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.

19. *Юнусова Г. Р.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – №8(89). – С. 108–117.

20. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineare aux derivees partielles du second order de type mixte: These pour le doctorat. – Uppsala, 1935. – 92 p.

21. *Sabitov K. B.* Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain // Math. Notes. – 2011. – **89**, No. 4. – P. 562–567.

Anton Kuz'

A PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION WITH RESPECT TO TIME FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

In this paper we study a problem with nonlocal condition with respect to the time variable containing an integral term for a mixed parabolic-hyperbolic equation. For this problem, we established a criterion of uniqueness and sufficient conditions for the existence of the solution. To solve the problem of small denominators encountered in the construction of the solution we use the metric approach.

УДК 517.95

Галина Лопушанська[1], **Віталія Шумська** [2]

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЗНАХОДЖЕННЯ МОЛОДШИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ТЕЛЕГРАФНОМУ РІВНЯННІ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ ЗА ЧАСОМ

Доведено однозначну розв'язність оберненої задачі Коші для рівняння

$$u_t^{(\alpha)} - a^2\Delta u - r(t)u_t^{(\beta)} - b(t)u = F_0(x)g(t), \ \ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T]$$

з дробовими похідними, заданими узагальненими функціями F_0 та у правих частинах початкових умов. Задача полягає у знаходженні трійки функцій: узагальненого розв'язку u (неперервного за часом в узагальненому сенсі) та невідомих неперервних коефіцієнтів $b(t)$, $r(t)$, $t \in [0,T]$.

1. Вступ

Обернені крайові задачі на визначення або головного коефіцієнта, або правої частини, або порядку дробової похідної у рівнянні, або невідомої крайової умови вивчались у [1] – [8] та інших працях, розв'язність прямої й оберненої задач для одного класу рівнянь із псевдодиференціальним оператором встановлено у [9]. Обернені задачі з невідомими молодшими коефіцієнтами у рівняннях із дробовими похідними мало вивчені. У [10] знайдено достатні умови існування і єдиності розв'язку (u, r, b) оберненої задачі Коші для рівняння

$$u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = F_0(x)g(t), \ \ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T],$$

з дробовими похідними Рімана-Ліувіля $u_t^{(\alpha)}, u_t^{(\beta)}$ та $(-\Delta)^{\gamma/2}u$, визначеною з використанням перетворення Фур'є: $\mathcal{F}[(-\Delta)^{\gamma/2}u] = |\lambda|^\gamma \mathcal{F}[u]$, при $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma > \alpha$, узагальнених функціях F_0 та в початкових умовах, невідомих $b, r \in C(0,T] \cap L(0,T)$.

Тут розглядаємо таку ж задачу при $\gamma = 2$ і показуємо, що у цьому випадку, завдяки наявності експонент у оцінках компонент вектор-функції Гріна, можна визначити невідомі коефіцієнти у класі $C[0,T]$ та розв'язок u задачі, який неперервний (в узагальненому сенсі) при $t \in [0,T]$.

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, lhp@ukr.net*

[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, vrapita@gmail.com*

2. Позначення, формулювання задачі й допоміжні результати

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $Q = \mathbb{R}^n \times (0, T]$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$ – простір функцій із $C^k(\mathbb{R}^n)$ з компактними носіями, $||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)} = \max\limits_{|\kappa| \le k} \max\limits_{x \in supp\varphi} |D^\kappa \varphi(x)|$, $k \in \mathbb{Z}_+$, де $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, $\kappa_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $|\kappa| = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$, $D^\kappa \varphi(x) = \frac{\partial^{|\kappa|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\kappa_1} \dots \partial x_n^{\kappa_n}}$, $\mathcal{D}(\bar{Q})$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями і таких, що $(\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ і $\mathcal{D}'(\bar{Q})$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ і $\mathcal{D}(\bar{Q})$, $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f = 0, t < 0\}$,
$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot, t), \varphi(\cdot)) \in C[0, T] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$.

Через $f * g$ позначаємо згортку узагальних функцій f і g, використовуємо функцію

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \theta(t) t^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda), & \lambda > 0, \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(z)$ – гама-функція, $\theta(t)$ – функція Хевісайда. Зауважимо, що

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нагадаємо, що похідна Рімана-Ліувіля порядку $\beta > 0$ визначена формулою

$$v_t^{(\beta)}(x, t) = f_{-\beta}(t) * v(x, t),$$

а похідна Капуто – формулою

$$D_t^\beta v(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} v(x, \tau) d\tau$$

при $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Вивчаємо обернену задачу Коші

$$u_t^{(\alpha)} - a^2 \Delta u - r(t) u_t^{(\beta)} - b(t) u = F_0(x) g(t), \;\; (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T], \tag{1}$$

$$u(x, 0) = F_1(x), \;\; u_t(x, 0) = F_2(x), \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\big(u(\cdot, t), \varphi_1(\cdot)\big) = \Phi_1(t), \;\; \big(u(\cdot, t), \varphi_2(\cdot)\big) = \Phi_2(t), \;\; t \in (0, T] \tag{3}$$

при $\alpha \in (1, 2)$, $\beta \in (0, 1)$, де F_0, F_1, F_2 – задані узагальнені функції, $g, \Phi_1, \Phi_2, \varphi_1, \varphi_2$ – задані регулярні функції, u, r, b – невідомі функції, через (f, φ) позначено значення узагальненої функції f на основній функції φ, a^2 – додатна стала.

Позначаємо:
$C_{\alpha,2}(Q) = \{v \in C(Q) : \Delta v, D_t^\alpha v \in C(Q)\}$,

$C_{\alpha,2}(\bar{Q}) = \{v \in C_{\alpha,2}(Q) \mid v, v_t \in C(\bar{Q})\}$,

$(Lv)(x,t) = v_t^{(\alpha)}(x,t) - a^2 \Delta v(x,t)$,

$(L^{reg}v)(x,t) = D_t^{\alpha} v(x,t) - a^2 \Delta v(x,t)$,

$(\widehat{L}v)(x,t) = f_{-\alpha}(t) \hat{*} v(x,t) - a^2 \Delta v(x,t), \quad (x,t) \in Q$, де

$f_{-\alpha}(t) \hat{*} v(x,t) = \big(f_{-\alpha}(\tau), v(x,t+\tau)\big)$ при $v \in \mathcal{D}(\bar{Q})$.

Правильна формула Гріна [11]:

$$\int\limits_{Q} v(y,\tau)(\widehat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int\limits_{Q} (L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(y,0)dy \int\limits_{0}^{T} f_{2-\alpha}(\tau)\psi_\tau(y,\tau)d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^n} v_t(y,0)dy \int\limits_{0}^{T} f_{2-\alpha}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau$$

$$\forall v \in C_{\alpha,2}(\bar{Q}), \quad \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}).$$

Припущення:

(A1) $F_0, F_1, F_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in C[0,T]$,
(A2) $\Phi_j, \Phi_j^{(\beta)}, \Phi_j^{(\alpha)} \in C[0,T]$, $p(t) = \Phi_1^{(\beta)}(t)\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)$,
$\inf\limits_{t \in (0,T]} |p(t)| = p_0 > 0$, $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1,2$.

Означення 1. *Розв'язком задачі (1)-(3) називаємо трійку функцій*

$$(u,r,b) \in U(\bar{Q}) := \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C[0,T] \times C[0,T],$$

яка задовольняє тотожність

$$(u, \widehat{L}\psi) = \int\limits_{0}^{T} g(t)\big(F_0(\cdot), \psi(\cdot,t)\big)dt + \int\limits_{0}^{T} r(t)\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\big)dt +$$

$$+ \int\limits_{0}^{T} b(t)\big(u(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\big)dt + \sum_{j=1}^{2} \big(F_j(x) f_{j-\alpha}(t), \psi(x,t)\big) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$$

та умови (3).

Необхідні умови погодження даних

$$(F_1, \varphi_j) = \Phi_j(0), \quad (F_2, \varphi_j) = \Phi'_j(0), \quad j = 1,2. \tag{4}$$

Для доведення розв'язності задачі використовуємо метод функції Гріна.

Означення 2. *Вектор-функція* $\big(G_0(x,t), G_1(x,t), G_2(x,t)\big)$ *така, що при достатньо регулярних* g_0, g_1, g_2 *функція*

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau) g_0(y,\tau) dy + \\ + \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t) g_j(y) dy, \ \ (x,t) \in \bar{Q} \tag{5}$$

є класичним (із $C_{\alpha,2}(\bar{Q})$*) розв'язком задачі Коші*

$$L^{reg} u(x,t) = g_0(x,t), \ \ (x,t) \in Q,$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

називається вектор-функцією Гріна цієї задачі.

Позначаємо:

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau) \varphi(x,t) dx dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_j \varphi)(y) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t) \varphi(x,t) dx dt, \ \ j=1,2,$$

$$(\widehat{G_j} \varphi)(y,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t) \varphi(x)\, dx, \ \ j=0,1,2.$$

Згідно з [12] маємо зображення компонент вектор-функції Гріна

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{\alpha-1}}{|x|^n} H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (\alpha,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,1) \end{matrix} \right),$$

$$G_j(x,t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-1}}{|x|^n} H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (j,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,1) \end{matrix} \right), \ \ j=1,2,$$

де $H^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\gamma_1) & \dots & (a_p,\gamma_p) \\ (b_1,\alpha_1) & \dots & (b_q,\alpha_q) \end{matrix} \right)$ – H-функція Фокса [13]. За властивостями цієї функції одержуємо оцінки

$$|G_0(x,t)| \le C \frac{t^{\alpha-1}}{|x|^n} \Big(\frac{|x|^2}{t^\alpha} \Big)^{1+\frac{n-\alpha}{2(2-\alpha)}} e^{-c\big(\frac{|x|^2}{t^\alpha}\big)^{\frac{1}{2-\alpha}}},$$

$$|G_j(x,t)| \le C \frac{t^{j-1}}{|x|^n} \Big(\frac{|x|^2}{t^\alpha} \Big)^{\frac{n+2-2j}{2(2-\alpha)}} e^{-c\big(\frac{|x|^2}{t^\alpha}\big)^{\frac{1}{2-\alpha}}}, \ \ j=1,2 \,\text{при}\, |x| > t^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$|G_0(x,t)| \leq C\frac{t^{\alpha-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^2}{t^\alpha}\Big)^{\min\{1,\frac{n}{2}\}} = C\begin{cases}\frac{|x|^{2-n}}{t}, & n>2,\\ \frac{1}{t}\big(1+\big|ln\frac{|x|^2}{t^\alpha}\big|\big), & n=2,\\ t^{\frac{\alpha}{2}-1}, & n=1,\end{cases}$$

$$|G_j(x,t)| \leq C\frac{t^{j-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^2}{t^\alpha}\Big)^{\min\{1,\frac{n}{2}\}} = C\begin{cases}|x|^{2-n}t^{j-1-\alpha}, & n>2,\\ t^{j-1-\alpha}\big(1+\big|ln\frac{|x|^2}{t^\alpha}\big|\big), & n=2,\\ t^{j-1-\frac{\alpha}{2}}, & n=1,\end{cases}$$

$j=1,2$ при $|x|<t^{\frac{\alpha}{2}}$. Тут і далі через C позначаємо різні додатні сталі.

Лема 1. *Для всіх $k\in\mathbb{Z}_+$, мультиіндексів κ, $|\kappa|=k$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ правильні наступні оцінки:*

$$\big|D^\kappa_y(\widehat{G_0}\varphi)(y,t)\big| \leq Ct^{\alpha-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},$$

$$\big|D^\kappa_y(\widehat{G_0}\varphi)^{(\beta)}_t(y,t)\big| \leq Ct^{\alpha-\beta-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},$$

$$\big|D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi)(y,t)\big| \leq Ct^{j-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},$$

$$\big|D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t(y,t)\big| \leq Ct^{j-\beta-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},\ \ (y,t)\in Q, j=1,2.$$

Доведення. Лема доводиться як [10, лема 1] з використанням наведених вище оцінок компонент вектор-функції Гріна. Розглядаємо випадок $n>2$. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y_i}G_j(x-y,t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}G_j(x-y,t),\ \ i=1,\dots,n,\ \ j=0,1,2,$$

і подібно для похідних вищих порядків, то для всіх $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ та мультиіндексів κ

$$D^\kappa(\mathcal{G}_j\varphi)(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)D^\kappa\varphi(x)dx$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$v_{j,\kappa}(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t)D^\kappa\varphi(x)dx,\ j=0,1,2.$$

За цих умов із попередньої рівності одержимо, що $D^\kappa(\widehat{G}_j\varphi)\in C(Q)$, $j=0,1,2$ для довільних $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ і мультиіндексів κ.

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $v_{j,\kappa}(y,t)$ для кожного κ.

Враховуючи оцінки функції $G_0(x-y,t)$, фінітність та обмеженість функцій $D^\kappa\varphi(x)$, $(x,t)\in\bar{Q}$, у випадку $|\kappa|=k$, одержуємо

$$|v_{0,\kappa}(y,t)| \leq \Big[\int\limits_{x:|x-y|^2<t^\alpha} |G_0(x-y,t)|\cdot|D^\kappa\varphi(x)|dx+$$

$$+ \int\limits_{x:|x-y|^2>t^\alpha} |G_0(x-y,t)|\cdot|D^\kappa\varphi(x)|dx\Big] \le d_{0,\kappa,0}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^2<t^\alpha}\frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{t|x-y|^{n-2}}dx+$$

$$+\int\limits_{x:|x-y|^2>t^\alpha}\frac{t^{\alpha-1}}{|x-y|^n}\Big(\frac{|x-y|^2}{t^\alpha}\Big)^{1+\frac{n-\alpha}{2(2-\alpha)}}e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}|D^\kappa\varphi(x)|dx\Big]\le$$

$$\le d_{0,\kappa,1}\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^{t^{\alpha/2}} rdr+\int\limits_{t^{\alpha/2}}^{d_0}\frac{t^{\alpha-1}}{r}\Big(\frac{r^2}{t^\alpha}\Big)^{1+\frac{n-\alpha}{2(2-\alpha)}}e^{-c\left(\frac{r^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dr\Big]\,||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le d_{0,\kappa,2}t^{\alpha-1}\Big[1+\int\limits_1^{+\infty} z^{n+1-2\alpha}e^{-cz}dz\Big]\,||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le d_{0,\kappa,3}t^{\alpha-1}\,||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},\quad (y,t)\in Q.$$

Тут і далі $d_{j,\kappa,0}=C$, $d_0, d_{j,\kappa,k}, d_{j,\kappa,k}$ $(j=0,1,2,3,\ k\in\mathbb{Z}_+)$ – додатні сталі.

Враховуючи оцінки функцій $G_j(x-y,t)$, $j=1,2$, аналогічно одержуємо

$$|v_{j,\kappa}(y,t)|\le\Big|\int\limits_{x:|x-y|^2<t^\alpha}G_j(x-y,t)D^\kappa\varphi(x)dx+$$

$$+\int\limits_{x:|x-y|^2>t^\alpha}G_j(x-y,t)D^\kappa\varphi(x)dx\Big|\le d_{j,\kappa,0}\Big[t^{j-1-\alpha}\int\limits_{x:|x-y|^2<t^\alpha}\frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^{n-2}}dx+$$

$$+t^{j-1}\int\limits_{x:|x-y|^2>t^\alpha}\frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^n}\Big(\frac{|x-y|^2}{t^\alpha}\Big)^{\frac{n+2-2j}{2(2-\alpha)}}e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dx\Big]\le$$

$$\le d_{j,\kappa,1}\Big[t^{j-1-\alpha}\int\limits_0^{t^{\alpha/2}}rdr+t^{j-1}\int\limits_{t^{\alpha/2}}^{+\infty}r^{-1}\Big(\frac{r^2}{t^\alpha}\Big)^{\frac{n+2-2j}{2(2-\alpha)}}e^{-c\left(\frac{r^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dr\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}$$

$$\le d_{j,\kappa,2}t^{j-1}\Big[1+\int\limits_1^{+\infty}z^{n+1-2j}e^{-cz}dz\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le d_{j,\kappa,3}t^{j-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},\quad (y,t)\in Q,\quad k=|\kappa|,\quad j=1,2.$$

Враховуючи результати [10] і властивості H-функції [13], одержуємо зображення

$$(\widehat{G_0}\varphi)_t^{(\beta)}(x,t)=\frac{\pi^{-n/2}t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n}H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^\alpha}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (\alpha-\beta,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,1) & (1,1)\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{\pi^{-n/2} t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n} H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^\alpha}\middle|\begin{matrix}(\alpha-\beta,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,1)\end{matrix}\right),$$

$$(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t(x,t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-\beta-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^\alpha}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (j-\beta,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,1) & (1,1)\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{\pi^{-n/2} t^{j-\beta-1}}{|x|^n} H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^\alpha}\middle|\begin{matrix}(j-\beta,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,1)\end{matrix}\right)$$

та існування цих функцій для всіх $x \neq 0$, $t > 0$. Відомо [13], що при $a^* = \sum_{i=1}^n \gamma_i - \sum_{i=n+1}^p \gamma_i + \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{i=m+1}^q \alpha_i > 0$

$$H^{q,0}_{p,q}\left(z\middle|\begin{matrix}(a_1,\gamma_1) & \dots & (a_p,\gamma_p)\\ (b_1,\alpha_1) & \dots & (b_q,\alpha_q)\end{matrix}\right) \le C|z|^{\frac{\mu^*+1/2}{\Delta^*}} e^{-c|z|^{\frac{1}{\Delta^*}}}, \quad |z| \to +\infty,$$

де

$$\Delta^* = \textstyle\sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \gamma_i,\ \mu^* = \sum_{i=1}^q b_i - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2},\ c = (2-\beta)\beta^{\frac{\beta}{2-\beta}}.$$

Використовуючи одержані зображення функцій $(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t$, $j = 0,1,2$, маємо

$$\Delta^* = a^* = 2-\alpha > 0,\ \mu_0^* = \tfrac{n+1}{2} + \beta - \alpha, \quad \mu_j^* = \tfrac{n+1}{2} + \beta - j, \quad j = 1,2.$$

Отож, у випадку $|x| > t^{\frac{\beta}{2}}$ одержуємо

$$|(\widehat{G_0}\varphi)^{(\beta)}_t(x,t)| \le C_0 \frac{t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^2}{t^\alpha}\Big)^{\frac{n+2+2\beta-2\alpha}{2(2-\alpha)}} e^{-c\left(\frac{|x|^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}},$$

$$|(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t(x,t)| \le C_j \frac{t^{j-1-\beta}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^2}{t^\alpha}\Big)^{\frac{n+2+2\beta-2j}{2(2-\alpha)}} e^{-c\left(\frac{|x|^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}, \quad j = 1,2.$$

Згідно з [13, теорема 1.12], одержуємо наступні оцінки при $|x| < t^{\frac{\beta}{2}}$:

$$|(\widehat{G_0}\varphi)^{(\beta)}_t(x,t)| \le C_0 \frac{t^{-\beta-1}}{|x|^{n-2}}, \quad |(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t(x,t)| \le C_j \frac{t^{j-1-\beta-\alpha}}{|x|^{n-2}}, \quad j = 1,2.$$

Як вище, знаходимо

$$|D^\kappa_y(\widehat{G_0}\varphi)^{(\beta)}_t(y,t)| \le d_{0,\kappa,0}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^2<t^\alpha} \frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{t^{1+\beta}|x-y|^{n-2}}dx +$$

$$+ \int\limits_{x:|x-y|^2>t^\alpha} \frac{t^{\alpha-\beta-1}}{|x-y|^n}\Big(\frac{|x-y|^2}{t^\alpha}\Big)^{\frac{n+2+2\beta-2\alpha}{2(2-\alpha)}} e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}} |D^\kappa\varphi(x)|dx\Big] \le$$

$$\leq d_{0,\kappa,1}\Big[\int\limits_0^{t^{\alpha/2}}\frac{rdr}{t^{1+\beta}}+\int\limits_{t^{\alpha/2}}^{d_0}\frac{t^{\alpha-\beta-1}}{r}\Big(\frac{r^2}{t^\alpha}\Big)^{\frac{n+2+2\beta-2\alpha}{2(2-\alpha)}}e^{-c\left(\frac{r^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dr\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}\leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,2}t^{\alpha-\beta-1}\Big[1+\int\limits_1^\infty z^{n+1+2\beta-2\alpha}e^{-cz}dz\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}\leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,3}t^{\alpha-\beta-1}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},$$

$$|D_y^\kappa(\widehat{G}_j\varphi)_t^{(\beta)}(y,t)|\leq d_{j,\kappa,0}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^2<t^\alpha}\frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{t^{1+\beta+\alpha-j}|x-y|^{n-2}}dx+$$

$$+\int\limits_{x:|x-y|^2>t^\alpha}\frac{t^{j-1-\beta}}{|x-y|^n}\Big(\frac{|x-y|^2}{t^\alpha}\Big)^{\frac{n+2+2\beta-2j}{2(2-\alpha)}}e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}|D^\kappa\varphi(x)|dx\Big]\leq$$

$$\leq d_{j,\kappa,1}\Big[\int\limits_0^{t^{\alpha/2}}\frac{rdr}{t^{1-j+\beta+\alpha}}+$$

$$+\int\limits_{t^{\alpha/2}}^{d_0}\frac{t^{j-1-\beta}}{r}\Big(\frac{r^2}{t^\alpha}\Big)^{\frac{n+2+2\beta-2j}{2(2-\alpha)}}e^{-c\left(\frac{r^2}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}}dr\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}\leq$$

$$\leq d_{j,\kappa,2}t^{j-1-\beta}\Big[1+\int\limits_1^\infty z^{n+1+2\beta-2j}e^{-cz}dz\Big]||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)}\leq$$

$$\leq d_{j,\kappa,3}t^{j-1-\beta}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)},\ \ (y,t)\in Q,\ \ k=|\kappa|,\ \ j=1,2.$$

■

3. Теореми існування та єдиності

Як при доведенні теорем 1 і 2 із [10], використовуючи лему 1, показуємо, що за припущення (A1) при неперервних $r(t), b(t),\ t\in[0,T]$ будь-який розв'язок $u\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ рівняння

$$\begin{aligned}\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=h_\varphi(t)+\int\limits_0^t r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau+\\+\int\limits_0^t b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau\ \ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),t\in[0,T],\end{aligned}\tag{6}$$

де

$$h_\varphi(t)=\sum_{j=1}^{2}\Big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t)\Big)+$$

$$+\int_0^t g(\tau)\Big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau,\ t\in[0,T],$$

є розв'язком задачі Коші (1), (2). Як у [10] показуємо, що інтеграли в (6) і $h_\varphi(t)$ неперервні на $[0,T]$ при довільній $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

З рівняння (1) отримуємо

$$\begin{gathered}\big(u_t^{(\alpha)}(\cdot,t),\varphi_j(\cdot)\big)-a^2\big(u(\cdot,t),\Delta\varphi_j(\cdot)\big)=\\=r(t)\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\varphi_j\big)+b(t)\big(u(\cdot,t),\varphi_j\big)+g(t)\big(F_0,\varphi_j\big),\ \ j=1,2,\end{gathered}$$

а використовучи умови (3), матимемо

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(\alpha)}(t)&=a^2\big(u(\cdot,t),\Delta\varphi_1(\cdot)\big)+r(t)\Phi_1^{(\beta)}(t)+b(t)\Phi_1(t)+g(t)\big(F_0,\varphi_1\big),\\ \Phi_2^{(\alpha)}(t)&=a^2\big(u(\cdot,t),\Delta\varphi_2(\cdot)\big)+r(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)+b(t)\Phi_2(t)+g(t)\big(F_0,\varphi_2\big).\end{aligned}\tag{7}$$

Звідси, враховуючи припущення (A2), знаходимо неперервні функції

$$\begin{gathered}r(t)=\Big[\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)-a^2\big(u(\cdot,t),\Delta\varphi_1(\cdot)\big)-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2(t)-\\-\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)-a^2\big(u(\cdot,t),\Delta\varphi_2(\cdot)\big)-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1(t)\Big]/p(t),\\ b(t)=\Big[-\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)-a^2\big(u(\cdot,t),\Delta\varphi_1(\cdot)\big)-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2^{(\beta)}(t)+\\+\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)-a^2\big(u(\cdot,t),\Delta\varphi_2(\cdot)\big)-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1^{(\beta)}(t)\Big]/p(t),\\ t\in[0,T].\end{gathered}\tag{8}$$

Позначимо через $H_1(u,t)$, $H_2(u,t)$ праві частини (8), підставимо їх у (6) відповідно замість $r(t)$, $b(t)$. Отримуємо нелінійне операторне рівняння

$$\begin{gathered}\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=h_\varphi(t)+\int_0^t H_1(u,\tau)\big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau+\\+\int_0^t H_2(u,\tau)\big(u(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau\ \ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),t\in(0,T]\end{gathered}\tag{9}$$

щодо невідомої $u\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$.

Навпаки, якщо $u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ – розв'язок рівняння (9), r, b визначені формулою (8), то з наведеного вище випливає, що трійка (u, r, b) задовольняє задачу Коші (1), (2). Покажемо, що u задовольняє умови (3). Позначимо

$$\big(u(\cdot,t), \varphi_1(\cdot)\big) = \Phi_1^*(t), \ \ \big(u(\cdot,t), \varphi_2(\cdot)\big) = \Phi_2^*(t), \ \ t \in (0,T].$$

Як вище, з умов перевизначення і погодження даних, одержуємо

$$r(t)\Phi_j^{*(\beta)}(t) + b(t)\Phi_j^*(t) = \Phi_j^{*(\alpha)}(t) - a^2\big(u(\cdot,t), \Delta\varphi_j(\cdot)\big) - g(t)\big(F_0, \varphi_j\big),$$
$$\Phi_j^*(0) = \Phi_j(0), \ \ \Phi_j^{*'}(0) = \Phi_j'(0), \ \ j = 1,2.$$

Звідси та з (7) випливає, що функції $\Psi_j(t) = \Phi_j^*(t) - \Phi_j(t)$, $j = 1,2$ задовольняють рівняння

$$\Psi_j^{(\alpha)} - r(t)\Psi_j^{(\beta)} - b(t)\Psi_j = 0, \ \ t \in [0,T], \quad j = 1,2.$$

Такі рівняння еквівалентні однорідним інтегральним рівнянням другого роду з інтегровними ядрами і мають тільки нульові розв'язки. Тому $\Phi_j^*(t) = \Phi_j(t)$, $t \in [0,T]$, $j = 1,2$ та трійка (u, r, b) задовольняє задачу (1)–(3).

Теорема 1. *За припущень (A1), (A2), (4) існує $T^* \in (0,T]$ (відповідно $Q^* = \mathbb{R}^n \times (0,T^*]$) і розв'язок $(u,r,b) \in U(\bar{Q}^*)$ задачі (1)-(3): функція u – розв'язок рівняння (9), r та b визначені формулами (8).*

Доведення. Вище показано, що набір $(u,r,b) \in U(\bar{Q})$ є розв'язком оберненої задачі Коші (1)-(3) тоді й тільки тоді, коли $u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$ – розв'язок рівняння (9), r, b визначені формулою (8). Залишилось довести розв'язність операторного рівняння (9) у просторі $\mathcal{D}'_C(\bar{Q})$.

З використанням теореми Банаха та одержаних у лемі 1 оцінок за схемою доведення теореми 2 в [10] доводимо розв'язність рівняння (9) у

$$M_R(Q^*) = \Big\{ v \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}^*) : \ ||v|| = \sup_{t \in (0,T^*]} \ \sup_{\varphi \in D^K(\mathbb{R}^n)} \frac{\big|\big(v(\cdot,t), \varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{D^K(\mathbb{R}^n)}} \le R \Big\}$$

при деяких $R \ge 1$ та $K \in \mathbb{Z}_+$, що залежить від порядків сингулярностей заданих узагальнених функцій. ■

Теорема 2. *За припущення (A2) розв'язок $(u,r,b) \in U(\bar{Q})$ задачі (1)-(3) єдиний.*

Доведення. Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3 в [10] при $s = 0$, $\gamma = 2$ та з використанням одержаних у лемі 1 оцінок. ■

1. *Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition // Electronic J. of Differential Equations. – 2013. №270. – P. 1–16.

2. *Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M. and Yamazaki T.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2009. – V. 25, 115002.

3. *Hatano Y., Nakagawa J., Wang Sh. and Yamamoto M.* Determination of order in fractional diffusion equation // Journal of Math-for-Industry. – 2013. – №5A. – P. 51-57.

4. *Hussein M., Lesnic D. and Ismailov M.I.* An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2016. – V. 39, №5. – P. 963–980.

5. *Janno Ja.* Determination of the order of fractional derivative and a kernel in an inverse problem for a generalized time fractional diffusion equation // Electronic J. of Differential Equations. – 2016, №199. http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu – №199. P. 1–28.

6. *Nakagawa J., Sakamoto K. and Yamamoto M.* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration // Journal of Math-for-Industry. – 2010. – №2A. – P. 99–108.

7. *Rundell W., Xu X. and Zuo L.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation // Applicable Analysis. – 2012. – №1. – P. 1–16.

8. *Zhang Y. and Xu X.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2011. – V. 27. – P. 1–12.

9. *Дрінь Я.М.* Пряма і обернена задачі для одного класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором // Доп. НАН України. – 2011. – №5. – С. 12–17.

10. *Лопушанська Г.П., Шумська В.Р.* Знаходження двох молодших коефіцієнтів у телеграфному рівнянні з дробовими похідними // Буковинський матем. журнал. – 2016. – Т. 4, № 3-4. – С. 80–92.

11. *Лопушанський А.О.* Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 132–144.

12. *Duan Jun Sheng.* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phis. – 2005. – V. 46. – №013504.

13. *Kilbas A.A., Sajgo M.* H-Transforms: Theory and Applications. – Boca-Raton: Chapman and Hall CRC. – 2004.

Lopushanska Halyna, Shumska Vitalia

INVERSE PROBLEM OF FINDING MINOR COEFFICIENTS IN A TIME FRACTIONAL TELEGRAPH EQUATION

We establish the unique solvability of an inverse Cauchy problem for the equation

$$u_t^{(\alpha)} - a^2\Delta u - r(t)u_t^{(\beta)} - b(t)u = F_0(x)g(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T]$$

with fractional derivatives, given distributions F_0 and in right-hand sides of the initial conditions. The problem is to find the generalized solution u (continuous in time in generalized sense) and unknown continuous coefficients $b(t)$, $r(t)$, $t \in [0,T]$.

УДК 514.752.22/.23::517.972.7

Роман Мацюк[1]

ПРО ВАРІЯЦІЙНІСТЬ ГЕОДЕЗІЙНИХ КІЛ В ЕВКЛІДІВСЬКИХ ПРОСТОРАХ $\mathbb{E}^2$ ТА $\mathbb{E}^3$

Викладено основні відомості про інваріянтне варіяційне рівняння третього порядку на евклідівській площині та в евклідівському просторі.

1. Попередні домовленості

В цьому дописі вивчається можливість надати варіяційної природи лініям постійної першої кривини Френе. Задля технічних цілей розрізнятимемо параметризовані та непараметризовані криві. Всі відображення вважатимуться настільки гладкими, наскільки це потрібно для виконання відповідної кількості упохіднень, закладених у формулах, що використовуються. Словом „евклідівський“ означимо, як дійсно евклідівський простір $\mathbb{E}^n$, так і простір зі сиґнатурою $(1, -1, \ldots, -1)$. Подібним чином вживатимемо назву „ріманівський“. Отримані висліди, з відповідною зміною термінології, по суті є справедливими при довільній сиґнатурі, але вибрана тут сиґнатура відповідає застосуванню у релятивіській аналітичній механіці. В просторі $\mathbb{E}^n$ запровадимо координати $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$; сукупність (x^α), де $\alpha = (0, \ldots, n-1)$ позначатимемо грубою писаною літерою $\boldsymbol{x}$, а сукупність (x^i), де $i = (1, \ldots, n-1)$ позначатимемо грубою літерою $\mathbf{x}$. Замість літери x^0 часто вживатимемо літеру t. Відображення $\zeta : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ задає параметризовану параметром (або *міркою*) ζ *стежину* в просторі $\mathbb{E}^n$. Образ стежини є непараметризованою кривою в цьому просторі, яку назвемо *ниттю*. Нить можна задати функціями $x^i(x^0) \equiv x^i(t)$. Упохіднення за міркою ζ позначатимемо крапкою згори: $\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x}^\alpha)$, $\dot{\boldsymbol{u}} = (\ddot{x}^\alpha)$. Упохіднення за змінною $t \equiv x^0$ позначатимемо клинчиком: $\mathbf{v} = \mathbf{x}' = (\mathsf{x}'^i)$, $\mathbf{v}' = (\mathsf{x}''^i)$. Проєкція

$$\wp : \left(x^\alpha, u^\alpha, \dot{u}^\alpha\right) \to \left(t; \mathsf{x}^i, \mathsf{v}^i, \mathsf{v}'^i\right)$$

подається формулами

$$\begin{aligned} \dot{t}\,\mathsf{v}^i &= u^i, \\ (\dot{t})^3 \mathsf{v}'^i &= \dot{t}\dot{u}^i - \ddot{t} u^i, \end{aligned}$$

[1] *ІППММ НАН України, romko.b.m@gmail.com*

$$(\dot t)^5 \mathsf{v}''^i = (\dot t)^2 \ddot u^i - 3\,\dot t\,\ddot t\,\dot u^i + \left[3(\ddot t)^2 - \dot t\,\dddot t\,\right] u^i.$$

Припустімо, що в змінних $\left(t; \mathsf{x}^i, \mathsf{v}^i, \mathsf{v}'^i, \mathsf{v}''^i\right)$ розглядається неавтономне (щодо змінної t) варіяційне завдання, пов'язане з інтеґралом

$$\int L\left(t; \mathsf{x}^i, \mathsf{v}^i, \mathsf{v}'^i\right) dt\,. \tag{1}$$

Нехай відповідною системою варіяційних рівнянь (що звуться рівняннями Ойлера–Пуассона) є

$$\mathsf{E}_i = 0. \tag{2}$$

Вирази у лівій частині цієї системи рівнянь звуться виразами Ойлера–Пуассона. Неавтономному варіяційному завданню з інтеґралом (1) поставимо у відповідність автономне (щодо змінної ζ) варіяційне завдання, записане в змінних $x^\alpha, u^\alpha, \dot u^\alpha$, пов'язане з інтеґралом

$$\int \mathcal{L}\left(x^\alpha, u^\alpha, \dot u^\alpha\right) d\zeta\,, \tag{3}$$

з функцією Ляґранжа

$$\mathcal{L} = \left(L \circ \wp\right) \dot t\,. \tag{4}$$

Варіяційні завдання (1) і (3) є рівнозначними в тому розумінні, що множини їх розв'язків однакові. Розв'язками є *неві́дміні ниті* (непараметризовані щодо змінної ζ криві) в просторі $\mathbb{E}^n$.

Лема 1. *Нехай вирази Ойлера–Пуассона з рівнянь (2) відповідають варіяційному завданню* (1)*. Тоді вирази*

$$\mathcal{E}_\alpha = \left\{-u^i \mathsf{E}_i \circ \wp, \dot t\, \mathsf{E}_i \circ \wp\right\} \tag{5}$$

є виразами Ойлера–Пуассона для функції Ляґранжа (4).

Зауваження 1. Варіяційне рівняння (5) має таку ж структуру у змінних $x^\alpha(\zeta)$, яку має й рівняння (29) нижче у змінних $\mathsf{x}^i(t)$:

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{N}_{\alpha\beta}\left(x^\gamma, u^\gamma\right) \ddot u^\beta + \dot u^\beta \dot u^\gamma \frac{\partial}{\partial u^\gamma}\, \mathcal{N}_{\alpha\beta} + \mathcal{Q}_{\alpha\beta}\left(x^\gamma, u^\gamma\right) \dot u^\beta + h_\alpha\left(x^\gamma, u^\gamma\right) = 0, \tag{6}$$

зі скісною[2] матрицею

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha \partial \dot u^\beta}. \tag{7}$$

[2]матриця $A_{\alpha\beta}$ зветься *скісною,* коли $A_{[\alpha\beta]} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}\right) = A_{\alpha\beta}$.

Нагадаємо формулу для першої кривини Френе кривої у просторі $\mathbb{E}^n$

$$k = \frac{\|\dot{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|^3} = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\,(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}) - (\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u})^2}}{\|\boldsymbol{u}\|^3}\,. \tag{8}$$

У ріманівському просторі похідні від векторного поля дотичної швидкості $\boldsymbol{u}$ уздовж стежини $x^\alpha(\zeta)$ замінюються на коваріянтні похідні, які позначатимемо через $\boldsymbol{u'}$, $\boldsymbol{u''}$. У двовимірному ріманівському просторі можна добути квадратний корінь у взорі (8):

$$\pm k = \sqrt{|g|}\,\frac{\epsilon_{\alpha\beta} u^\alpha u'^\beta}{\|\boldsymbol{u}\|^3}\,, \tag{9}$$

де права частина має назву *ознакованої кривини.* Літерою g, як звичайно, позначаємо $\det(g_{\alpha\beta})$.

2. Варіяційність доріжок постійної кривини Френе на евклідівській або лже-евклідівській площині

У цьому розділі розповімо про існування варіяційного принципу в параметричній формі, екстремалі якого задають дуги кіл на евклідівській площині, або, відповідно, дуги гіпербол на лже-евклідівській площині з метричним тензором $\operatorname{diag}(1,-1)$. Координати позначатимемо через $\boldsymbol{x} = (x^0, x^1)$.

Теорема 1. *Нехай автономна система рівнянь третього порядку* $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{0}$ *у двовимірному просторі задовольняє такі умови:*

1. *вона є системою рівнянь Ойлера–Пуассона;*
2. *вона наділена евклідівською симетрією;*
3. *система* $\{\mathcal{E}_\alpha = 0\}$ *має першим інтеґралом кривину Френе* k*, і вміщає, як розв'язки, усі криві сталої кривини;*
4. *містить рівняння простих ліній в природньому відмірі,*

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{0}\,.$$

Тоді

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}\ddot{u}^\beta}{\|\boldsymbol{u}\|^3} - 3\,\frac{(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\,\epsilon_{\alpha\beta}\dot{u}^\beta + m\,\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2\dot{u}_\alpha - (\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u})\,u_\alpha}{\|\boldsymbol{u}\|^3}\,.$$

Функцію Ляґранжа можемо піднайти:

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_{\alpha\beta} u^\alpha \dot{u}^\beta}{\|\boldsymbol{u}\|^3} - m\|\boldsymbol{u}\| \,. \tag{10}$$

Доведення цієї теореми можна знайти в [1].

Узагальнення зображення (10) на ріманівський простір подається функцією Ляґранжа

$$\mathcal{L}^R = k - m\|\boldsymbol{u}\| \,. \tag{11}$$

Рівняння Ойлера–Пуассона для (11) виражаються взором, який покриває випадки різної сиґнатури метричного тензора $g_{\alpha\beta}$ з допомогою оператора Ходжа $*$:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^R = -\frac{*\,\boldsymbol{u''}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} + 3\,\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u'})}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\;*\boldsymbol{u'} + \\ + m\,\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u'} - (\boldsymbol{u'}\cdot\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} - \boldsymbol{\mathcal{R}} = \boldsymbol{0}\,, \tag{12}$$

де

$$\mathcal{R}_\alpha = \frac{\sqrt{|g|}}{\|\boldsymbol{u}\|^3}\,\epsilon_{\beta\gamma} R_{\alpha\rho,\lambda}{}^{\gamma} u^\beta u^\lambda u^\rho \,, \tag{13}$$

з очевидною властивістю

$$\mathcal{R}_\alpha u^\alpha = 0 \,. \tag{14}$$

Докладне виведення взору (12) можна знайти у праці [2]. Нагадаємо, як діє оператор Ходжа на довільний вектор $\boldsymbol{a}$ і на довільний дво-вектор $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ у двовимірному просторі:

$$(*\boldsymbol{a})_\alpha = \sqrt{|g|}\;\epsilon_{\beta\alpha} a^\beta, \quad *^2\boldsymbol{a} = -\mathrm{sgn}(g)\boldsymbol{a}\,, \tag{15}$$

$$*(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) = \frac{\sqrt{|g|}}{2}\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})^{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Зауваження 2. З огляду на взір (9), функція Ляґранжа (11) стає афінною за старшою похідною, тому рівняння Ойлера–Пуассона є третього порядку.

Зауваження 3. „Силу“ $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, яка виникає в правій частині рівняння (12) можна виразити в термінах формально запровадженого тензора „спіну“

$$S^{\gamma\lambda} = \frac{(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u'})^{\gamma\lambda}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u'}\|}\,,$$

$$\mathcal{R}_\alpha = \frac{1}{2}\,R_{\alpha\beta,\gamma\lambda} u^\beta S^{\gamma\lambda}\,. \tag{17}$$

Щоб переконатися у правильності цього твердження, потрібно зауважити, що у двовимірному просторі тензор $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u'})^{\gamma\lambda}$ має всього лиш одну суттєву компоненту, яка при підстановці у вираз (17) скорочується зі знаменником у членах, що містять u'_α.

Твердження 1. *Рівняння (12) має кривину Френе k першим інтеґралом.*

Доведення. У двовимірному просторі величину $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ із взору (13) можна зобразити в термінах *кривини многовиду* $K = R_{12}{}^{12}$ таким чином:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} = \frac{K}{\|\boldsymbol{u}\|} * \boldsymbol{u}\,.$$

Тепер подіймо оператором Ходжа на рівняння (12). Отримаємо:

$$\begin{multline}\frac{\boldsymbol{u''}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} = 3\,\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u'})}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\boldsymbol{u'} - \\ - m\cdot\operatorname{sgn}(g)\,\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) * \boldsymbol{u'} - (\boldsymbol{u'}\cdot\boldsymbol{u}) * \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} - \frac{K}{\|\boldsymbol{u}\|}\,\boldsymbol{u}\,. \quad (18)\end{multline}$$

Упохіднім вираз (8):

$$\frac{dk}{d\zeta} = \frac{(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u'})\cdot(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u''})}{\|\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u'}\|\|\boldsymbol{u}\|^3} - 3\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u'})\|\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u'}\|}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\,. \quad (19)$$

Підставмо вираз для $\dfrac{\boldsymbol{u''}}{\|\boldsymbol{u}\|^3}$ з рівняння (18) у формулу (19). Далі скористаймо із властивості

$$(\boldsymbol{a}\wedge *\boldsymbol{b})_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{|g|}}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\epsilon_{\alpha\beta} \quad (20)$$

для довільних векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$. Отримаємо, що $\frac{dk}{d\zeta} = 0$. ∎

2.1. Про повноту варіяційного опису геодезійних кіл

У цьому розділі доведемо, що кожне геодезійне коло у двовимірному просторі можна наділити узгодженою міркою ζ так, щоб доріжка $x^\alpha(\zeta)$ була екстремальною кривою для варіяційного завдання (3) з функцією Ляґранжа (11).

3. Визначальне рівняння для геодезійних кіл.

З метою вивести динамічне рівняння, яке б керувало рухом уздовж геодезійної ниті, прирівняймо до нуля упохіднений вираз для кривини Френе k (8) в природній мірці („натуральній параметризації“)

$$\boldsymbol{u}_s{\cdot}\boldsymbol{u}_s = 1\,, \tag{21}$$

що задається елементом довжини $ds = \sqrt{u_i u^i}\,d\varsigma$:

$$\frac{dk}{ds} = \boldsymbol{u'}_s{\cdot}\boldsymbol{u''}_s = 0. \tag{22}$$

Долучімо сюди ще й очевидну в'язь

$$\boldsymbol{u'}_s{\cdot}\boldsymbol{u'}_s + \boldsymbol{u}_s{\cdot}\boldsymbol{u''}_s = 0, \tag{23}$$

яка є диференційним наслідком укладу

$$\boldsymbol{u}_s{\cdot}\boldsymbol{u'}_s = 0. \tag{24}$$

Далі розв'язуємо систему рівнянь (22) та (23) стосовно $\boldsymbol{u''}_s$ і отримуємо

$$(u''_s)_\alpha = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}(u'_s)^\beta}{\epsilon_{\beta\gamma}(u'_s)^\beta(u_s)^\gamma}\,\boldsymbol{u'}_s{\cdot}\boldsymbol{u'}_s\,. \tag{25}$$

Читач перевірить за допомогою співвідношень (24) та (21), що у двовимірному просторі виконується співвідношення

$$\epsilon_{\beta\alpha}(u'_s)^\beta = (u_s)_\alpha\epsilon_{\beta\gamma}(u'_s)^\beta(u_s)^\gamma\,,$$

що зводить рівняння (25) до добре відомого рівняння геодезійних кіл

$$\boldsymbol{u''}_s + (\boldsymbol{u'}_s{\cdot}\boldsymbol{u'}_s)\,\boldsymbol{u} = 0. \tag{26}$$

Аби позбавитися в'язі $\boldsymbol{u}_s{\cdot}\boldsymbol{u}_s = 1$, перерахуймо похідні в (26) шляхом переходу від мірки s до довільної мірки ζ уздовж геодезійної доріжки, а вкінці переконаємося, що геодезійні кола можна охарактеризувати як інтеґральні доріжки ось якого безві́дмірного (тобто незалежного від вибору параметра вздовж інтеґральної кривої) диференційного рівняння

$$\frac{\boldsymbol{u''}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} = \frac{\boldsymbol{u}{\cdot}\boldsymbol{u''}}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\,\boldsymbol{u} + 3\,\frac{\boldsymbol{u}{\cdot}\boldsymbol{u'}}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\,\boldsymbol{u'} - 3\,\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u'})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^7}\,\boldsymbol{u}\,. \tag{27}$$

Твердження 2. *Множина геодезійних кіл у двовимірному ріманівському просторі вичерпується екстремальними кривими варіяційного завдання (3) з підінтеґральною функцією (11).*

Доведення. Доповнімо рівняння (27) ще таким додатковим, яке не суперечить рівнянню (12) (бо самé є його наслідком від зовнішнього доможування $\wedge$ зліва на вектор $\boldsymbol{u}$), і яке зафіксує вибір ві́дміру ζ уздовж екстремальних доріжок:

$$\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'')}{\|\boldsymbol{u}\|^3}-3\,\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}')^2}{\|\boldsymbol{u}\|^5}=*\left(\frac{m}{\|\boldsymbol{u}\|}\,\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{\mathcal{R}}\right). \tag{28}$$

Для більшої зручності подальшого обчислення здійснімо згортку виразів Ойлера–Пуассона (12) з довільним пробним вектором $\boldsymbol{a}$. Взявши до уваги властивості (15) і (20), отримаємо:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{E}}^R.\,\boldsymbol{a}=\frac{*\,(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{u}'')}{\|\boldsymbol{u}\|^3}-3\,\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\;*\,\big(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{u}'\big)+&\\ +\frac{m}{\|\boldsymbol{u}\|^3}\,\big(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'\big)\cdot(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a})-\boldsymbol{\mathcal{R}}\,.\,\boldsymbol{a}\,.&\end{aligned}$$

Коли тепер замінити в цьому рівнянні вектор $\boldsymbol{u}''$ його виразом з укладу (27), одночасно беручи під увагу додаткове рівняння (28) і означення (16), отримаємо:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{E}}^R.\,\boldsymbol{a}=-\frac{*\,(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{u})\;*\;(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}+\frac{m}{\|\boldsymbol{u}\|^3}\;*\;(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{u})\;*\;\big(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'\big)+&\\ +\frac{m}{\|\boldsymbol{u}\|^3}\,\big(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}'\big)\cdot(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a})-\boldsymbol{\mathcal{R}}\,.\,\boldsymbol{a}=&\\ =-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}-\boldsymbol{\mathcal{R}}\,.\,\boldsymbol{a}\equiv 0\,,&\end{aligned}$$

з огляду на властивість (14). ∎

4. Варіяційність гвинтових ліній у тривимірному просторі

У тривимірному просторі шукаємо безві́дмірні доріжки (*себто ниті*), що підкоряються (векторному) варіяційному рівнянню Ойлера–Пуассона з третіми похідними. Такі ниті описуються системою двох рівнянь третього порядку щодо вектор-функції $\mathbf{x}(t)$, де $\mathbf{x}(t)=\Big(\mathsf{x}^1(t),\mathsf{x}^2(t)\Big)$, а незалежна змінна t ототожнюється з координатою x^0 тривимірного простору $\mathbb{E}$. Критерій варіяційности є таким [3]:

Лема 2. *Система рівнянь третього порядку*

$$\mathsf{E}_i\left(t,\mathsf{x}^j,\mathsf{v}^j,\mathsf{v}'^j,\mathsf{v}''^j\right)=0$$

є системою рівнянь Ойлера–Пуассона, якщо і тільки якщо вона прибирає вигляду

$$\mathbf{E}=\mathbf{A}\,.\,\mathbf{v}''+\big(\mathbf{v}'\,.\,\partial_{\mathbf{v}}\big)\mathbf{A}\,.\,\mathbf{v}'+\mathbf{B}\,.\,\mathbf{v}'+\mathbf{c}, \tag{29}$$

де скісна матриця A, *матриця* B *і рядочок* c *залежать од змінних* t, x^j, v^j *і задовольняють систему рівнянь із частинними похідними:*

$$\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{A}_{jl]} = 0, \tag{30i$'$}$$

$$2\,\mathsf{B}_{[ij]} - 3\,D_{\mathsf{x}}\mathsf{A}_{ij} = 0, \tag{30ii$'$}$$

$$2\,\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{B}_{j]l} - 4\,\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{A}_{j]l} + \partial_{\mathsf{x}^l}\,\mathsf{A}_{ij} + 2\,D_{\mathsf{x}}\partial_{\mathsf{v}^l}\,\mathsf{A}_{ij} = 0, \tag{30iv$'$}$$

$$\partial_{\mathsf{v}(i}\mathsf{c}_{j)} - D_{\mathsf{x}}\mathsf{B}_{(ij)} = 0, \tag{30v$'$}$$

$$2\,\partial_{\mathsf{v}^l}\,\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{c}_{j]} - 4\,\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{B}_{j]l} + {D_{\mathsf{x}}}^2\,\partial_{\mathsf{v}^l}\,\mathsf{A}_{ij} + 6\,D_{\mathsf{x}}\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{A}_{jl]} = 0, \tag{30vi$'$}$$

$$4\,\partial_{\mathsf{x}[i}\mathsf{c}_{j]} - 2\,D_{\mathsf{x}}\partial_{\mathsf{v}[i}\mathsf{c}_{j]} - {D_{\mathsf{x}}}^3\,\mathsf{A}_{ij} = 0. \tag{30vii}$$

Наступну теорему формулюємо одразу в рівноправних змінних

$$\boldsymbol{x}(\zeta) = \Big(x^\alpha(\zeta)\Big) = \Big(x^0(\zeta), x^1(\zeta), x^2(\zeta)\Big).$$

Зрозуміло, що від́мірна байдужість щодо мірки ζ уздовж розв'язок системи мається на увазі.

Теорема 2. *У тривимірному евклідівському просторі інваріянтне від́мірно-байдуже рівняння Ойлера–Пуассона третього порядку може бути тільки таким:*

$$-\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} + 3\,\frac{\dot{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^5}\,(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}) - \frac{\mu}{\|\boldsymbol{u}\|^3}\Big[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\,\dot{\boldsymbol{u}} - (\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}\Big] = \boldsymbol{0}, \tag{31}$$

Кривина Френе k є інтеґралом рівняння, скрут $\varkappa = -\mu$. Відповідна сім'я функцій Ляґранжа може бути, зокрема, такою:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(0)} &= \frac{u^0\big(\dot{u}^2u^1 - \dot{u}^1u^2\big)}{\|\boldsymbol{u}\|\big(u_1u^1 + u_2u^2\big)} + \mu\|\boldsymbol{u}\|\,,\\
\mathcal{L}_{(1)} &= \frac{u^1\big(\dot{u}^0u^2 - \dot{u}^2u^0\big)}{\|\boldsymbol{u}\|\big(u^0u^0 + u_2u^2\big)} + \mu\|\boldsymbol{u}\|\,,\\
\mathcal{L}_{(2)} &= \frac{u^2\big(\dot{u}^1u^0 - \dot{u}^0u^1\big)}{\|\boldsymbol{u}\|\big(u_0u^0 + u_1u^1\big)} + \mu\|\boldsymbol{u}\|\,.
\end{aligned}$$

Зауваження 4. Узагальнена величина кількости руху не залежить од вибору функції Ляґранжа із вказаної сім'ї і є добре означена:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{u}} - \frac{d}{d\zeta}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{u}}} = \frac{\dot{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^3} + \mu\,\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\,.$$

Начерк доведення Теореми 2. Систему рівнянь Ойлера-Пуассона (29) можна розглядати як векторну диференційну форму Пфаффа

$$\mathsf{e} = \mathsf{E}_i dt \otimes d\mathsf{x}^i. \tag{32}$$

Запровадимо иньшу форму Пфаффа:

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon} &= \mathsf{A}_{ij} d\mathsf{v}'^j \otimes d\mathsf{x}^i + \mathsf{k}_i dt \otimes d\mathsf{x}^i, \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{v}'\!.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}})\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{v}' + \mathbf{B} \,.\, \mathbf{v}' + \mathbf{c}\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Зовнішні диференційні системи, які ріжняться щонайбільше формами, кратними до форм торкання

$$\theta^i = d\mathsf{x}^i - \mathsf{v}^i dt, \quad \theta'^i = d\mathsf{v}^i - \mathsf{v}'^i dt, \quad \theta''^i = d\mathsf{v}'^i - \mathsf{v}''^i dt,$$

вважаються рівнозначними. Форми (33) і (32) є рівнозначними:

$$\underline{\epsilon} - \mathsf{e} = \mathsf{A}_{ij} \theta''^j \otimes d\mathsf{x}^i.$$

Кажемо, що зовнішня диференційна система, породжена формою $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$, має симетрією з твірником X, коли існують матриці $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Xi}$ і $\boldsymbol{\Pi}$, залежні од $\mathbf{v}$ та $\mathbf{v}'$, і такі, що

$$X(\underline{\boldsymbol{\epsilon}}) = \boldsymbol{\Phi} \,.\, \underline{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\Xi} \,.\, (d\mathbf{x} - \mathbf{v}\, dt) + \boldsymbol{\Pi} \,.\, (d\mathbf{v} - \mathbf{v}' dt). \tag{34}$$

Зосередьмося на симетріях, які задаються у тривимірному лже-евклідівському просторі модельної теорії відносности твірниками групи лже-евклідівських рухів. В цьому випадку закладаємо, що $\mathbf{A}$ і $\mathbf{k}$ в (33) не залежать від t і $\mathbf{x}$. Тоді твірники лже-евклідівських обертань параметризуються скісною матрицею $\boldsymbol{\Omega}$ і вектором $\boldsymbol{\pi}$:

$$\begin{aligned} X = &- (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{x})\, \partial_t + g_{00}\, t\, \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}}) + \\ &+ g_{00}\, \boldsymbol{\pi} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}}) + \\ &+ 2\, (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v}'\!.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'} + (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}')\, \mathbf{v} \,.\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{v}' \wedge \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{v}'})\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Тут центральною крапкою позначено внутрішній добуток векторів або тензорів, опущеною крапкою позначено згортку вектор-рядочка з вектор-стовпчиком.

Випадок власне евклідівського простору виглядає подібним чином.

Тепер потрібно знайти розв'язок системи диференційних рівнянь із частинними похідними (30) вкупі зі системою диференційних рівнянь із частинними похідними на коефіцієнти $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ і $\mathbf{c}$ рівняння (29), яка виникає з умови симетрії (34) з твірником, записаним у вигляді (35).

У висліді отримуємо

$$\mathsf{A}_{12} = \frac{\text{const}}{(1 - \mathsf{v}_1{}^2 - \mathsf{v}_2{}^2)^{3/2}} \equiv \frac{\text{const}}{(1 + \mathsf{v}_1 \mathsf{v}^1 + \mathsf{v}_2 \mathsf{v}^2)^{3/2}},$$

що дає перший доданок у (29),

$$\mathsf{B}_{ij} = \text{const} \cdot (1 + \mathbf{v}{\cdot}\mathbf{v}))^{-3/2} \big(v_i v_j - (1 + \mathbf{v}{\cdot}\mathbf{v})\, g_{ij} \big), \quad \mathbf{c} = \mathbf{0}\,.$$

Взір (31) отримуємо згідно з рецептом (5) Леми 1. ■

Докладне доведення можна відшукати в праці [4].

У теоремі 2 вирази для можливих функцій Ляґранжа не записані в термінах диференціальних незмінників і, відповідно, не є інваріантами та не виражаються в спосіб, не залежний від системи координат. Наступний факт вияснює ситуацію.

Твердження 3. *У (лже-)евклідівському просторі* $\mathbb{E}^n$*,* $n > 2$*, зі сиґнатурою метрики не рівною* 2*, не існує інваріянтної функції Ляґранжа, рівняння Ойлера–Пуассона для якої є третього порядку.*

Доведення. Щоб у рівняннях Ойлера–Пуассона не з'являлися похідні четвертого порядку, функція Ляґранжа повинна нести афінну залежність від других похідних:

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{\lambda}(u^\alpha).\dot{\boldsymbol{u}} + \ell(u^\alpha).$$

Умова незмінності $X^{(2)}\mathcal{L}$ з двічі продовженим твірником евклідівських обертань

$$X^{(2)} = \boldsymbol{M}.(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\partial_u}) + \boldsymbol{M}.(\dot{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{\partial_{\dot{u}}}) \tag{36}$$

в членах, лінійних за змінною $\dot{\boldsymbol{u}}$, дає умову

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\partial_u}(\boldsymbol{\lambda}.\dot{\boldsymbol{u}}) + \dot{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}\,. \tag{37}$$

Оскільки вектор-функція $\boldsymbol{\lambda}$ не залежить від змінної $\dot{\boldsymbol{u}}$, рівняння (37) повинно виконуватись тотожньо за $\dot{\boldsymbol{u}}$, иньшими словами, змінну $\dot{\boldsymbol{u}}$ можна замінити на довільний вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\partial_u}(\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}\,. \tag{38}$$

Розгляньмо вираз $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\partial_u}(\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{u})$. Він є тотожнім до лівої частини рівняння (38) при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}$. Тому умову (37) можна записати ось яким чином:

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\partial_u}(\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\,. \tag{39}$$

Рівняння (39) має загальний розв'язок

$$\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{u} = f\Big(\|\boldsymbol{u}\|^2\Big). \tag{40}$$

Згорнімо рівняння (38) з вектор-стовпчиком $\boldsymbol{u}$:

$$\|\boldsymbol{u}\|^2\boldsymbol{\partial_u}(\boldsymbol{\lambda}\,.\,\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u}\,.\,\boldsymbol{\partial_u})\,(\boldsymbol{\lambda}\,.\,\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\lambda} - (\boldsymbol{\lambda}\,.\,\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}. \tag{41}$$

Домножімо рівняння (41) зліва зовнішнім чином на вектор $\boldsymbol{u}$:

$$\|\boldsymbol{u}\|^2\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\partial_u}\,(\boldsymbol{\lambda}\,.\,\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\lambda} - (\boldsymbol{\lambda}\,.\,\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}. \tag{42}$$

Домножімо рівняння (38) на $\|\boldsymbol{u}\|^2$ і від одержаного віднімімо рівняння (42):

$$\|\boldsymbol{u}\|^2\, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{\lambda} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{\lambda} \,.\, \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\,. \tag{43}$$

При $n \leq 2$ це рівняння перетворюється в тривіальну тотожність. Коли $n > 2$, випишімо коефіцієнт при змінній $\boldsymbol{a}$ в рівнянні (43) в термінах матриці $\boldsymbol{G} = (g_{\alpha\beta})$,

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 \big(\boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{G}\big) - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\lambda} \,.\, \boldsymbol{u})\, \big(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{\lambda}\big) = \boldsymbol{0}\,,$$

і візьмімо слід за першими двома індексами зліва:

$$\Big(\operatorname{tr}(\boldsymbol{G}) - 2\Big)\Big(\|\boldsymbol{u}\|^2 \boldsymbol{\lambda} - (\boldsymbol{\lambda} \,.\, \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u}\Big) = \boldsymbol{0}\,.$$

При $\operatorname{tr}(\boldsymbol{G}) \neq 2$, з врахуванням (40), маємо розв'язок $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0\big(\|\boldsymbol{u}\|^2\big)\, \boldsymbol{u}$, і тому

$$\mathcal{L} = \lambda_0\big(\|\boldsymbol{u}\|^2\big)\, (\boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) + \ell(u^\alpha). \tag{44}$$

Звернувшись тепер до взорів (6), (7), бачимо, що функція Ляґранжа (44) не витворює членів з третіми похідними у відповідному рівнянні Ойлера–Пуассона. ∎

1. *Мацюк Р.Я.* Вариационный принцип для равноускоренного движения // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – №16. – С. 84–88.

2. *Мацюк Р.* Варіяційність з похідними другого порядку, релятивіське приспішення та взаємодія „дзиґи“ з тензором кривини у дво-вимірному просторі-часі // Фізичний збірник НТШ. – 2008. – Т. 7 – С. 542–556.

3. *Мацюк Р.Я.* О существовании лагранжиана для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – № 20. – С. 16–19.

4. *Matsyuk R.Ya.* Inverse variational problem and symmetry in action: the relativistic third order dynamics // The Inverse Problem of the Calculus of Variations. Atlantis Studies in Variational Geometry. V. 2. – Ed.: Dmitry V. Zenkov. – Springer, 2015. – P. 75–102.

Roman Matsyuk

ABOUT THE VARIATIONALITY OF THE GEODESIC CIRCLES IN THE EUCLIDEAN SPACES $\mathbb{E}^2$ AND $\mathbb{E}^3$

Main results concerning the invariant variational equations of the third order in the Euclidean plain and in the Euclidean space are presented.

UDC 517.524+517.588

Oksana Medvid, Mykhaylo Symotyuk [1]

CONVERGENCE OF EULER CONTINUED FRACTION FOR THE RATIO OF HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS IN $\mathbb{Q}_p$

The conditions of convergence of Euler continued fraction to the ratio of hypergeometric functions in the field of p-adic numbers are established.

1. Introduction

The following fraction is called Euler continued fraction [1]

$$b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z}{b_n(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

where

$$\begin{gathered} a_n = -(c-a+n)(b+n), \quad n \geq 1, \\ b_n(z) = c + n + (b-a+n+1)z, \quad n \geq 0, \end{gathered} \tag{2}$$

and a, b, c are complex numbers, such that $c \notin \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. Let us notice that if at least one of the numbers a, b belongs to the set $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, then the fraction (1) reduces to a ratio of polynomials. The fraction (1) arises from the expansion of the ratio of Gauss hypergeometric functions

$$c\frac{F(a,b,c;z)}{F(a,b+1,c+1;z)} \tag{3}$$

into continued fraction [1]. Let us recall [2] that Gauss function $F(a,b,c;z)$ is given inside the disk $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ by the sum of Gauss hypergeometric series

$$F(a,b,c;z) = {}_2F_1(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{4}$$

where $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, and $(\cdot)_n$ are Pochhammer symbols:

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

The Gauss function $F(a,b,c;z)$ is the analytic solution of the following differential equation

$$z(1-z)y'' + (c-(a+b+1)z)\,y' - aby = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1, \tag{5}$$

[1] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, medoks@ukr.net, quaternion@ukr.net*

and satisfy the following differentiation formulas:

$$\frac{d^n F(a,b,c;z)}{dz^n} = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} F(a+n,b+n,c+n;z), \quad n \in \mathbb{N}, \quad c \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}. \tag{6}$$

From equalities (5), (6) we obtain the following relation

$$\begin{aligned} c\frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1,b+1,c+1;z)} &= c-(a+b+1)- \\ &- \cfrac{(a+1)(b+1)z(1-z)}{(c+1)\cfrac{F(a+1,b+1,c+1;z)}{F(a+2,b+2,c+2;z)}}. \end{aligned} \tag{7}$$

If we apply Pfaff's transformation [1]

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-b} F(c-a,b,c;z/(z-1))$$

to formula (7) and use the substitutions $z \to z/(z-1)$, we get the following recurrent relations

$$w_n(z) = b_n(z) + \frac{a_{n+1}z}{w_{n+1}(z)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{8}$$

where

$$w_n(z) = (c+n)\frac{F(a+n,b+n,c+n;z)}{F(a+n,b+n+1,c+n+1;z)}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{9}$$

and a_n, $b_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, are defined by equalities (2). Then from equalities (8), (9) we obtain

$$c\frac{F(a,b,c;z)}{F(a,b+1,c+1;z)} = b_0(z) + \cfrac{a_1 z}{b_1(z) + \cfrac{a_2 z}{\ddots + \cfrac{\ddots}{b_{n-1}(z) + \cfrac{a_n z}{w_n(z)}}}}, \quad n \geq 2.$$

So we get a continued fraction expansion of the ratio (3) (see [1])

$$c\frac{F(a,b,c;z)}{F(a,b+1,c+1;z)} \sim b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z}{b_n(z)}. \tag{10}$$

The sequence of functions

$$f_0(z) = b_0(z), \quad f_n(z) \equiv b_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_k z}{b_k(z)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

is called the sequence of approximants of fraction (1).

Definition 1. *The Euler fraction* (1) *is said to converge (uniformly) to the function $G(z)$ in the set M, if the sequence of its approximants $f_n(z)$ converges (uniformly) in M to $G(z)$ as $n \to \infty$.*

In the work [1] it was established that for $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, Euler continued fraction (1) converges to the ratio (3) if $|z| < 1$, or if $z = -1$ with $\mathrm{Im}(c - a + b) < \mathrm{Re}(c + a - b - 1)$. In present work the results of the work [1] are transferred to the case when the parameters a, b, c of the Euler continued fraction (1) are p-adic numbers and the convergence of sequence of approximants (11) is considered in the p-adic norm. The main result of this work consists in the following propositions:

Theorem 1. *Let $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ be such that*

$$|a|_p \neq |b|_p, \quad \min\{|a|_p, |b|_p\} > 1, \quad |c|_p > \max\{|a|_p, |b|_p\}. \tag{12}$$

Then fraction (1) *uniformly converges in the p-adic disk $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p < 1\}$.*

Theorem 2. *Let $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ be such that $|c|_p > |ab|_p$ and inequalities* (12) *hold. Then Euler fraction* (1) *uniformly converges in the p-adic circle $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p < p^{1/(1-p)}\}$ to ratio* (3).

2. Basic concepts of the p-adic numbers

In order to prove Theorems 1, 2 let us recall some concepts of the theory of p-adic numbers [3]. The p-adic norm is defined in the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ by the rule

$$|0|_p = 0, \quad |x|_p = \frac{1}{p^{\mathrm{ord}_p x}}, \quad x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\},$$

where p is a prime number, and the p-adic ordinal $\mathrm{ord}_p x$ of the rational number x is defined by means by the equality

$$\mathrm{ord}_p x = \begin{cases} \max\{m \in \mathbb{Z}_+ : x \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p^m)\}, & \text{if } x \in \mathbb{Z}, \quad x \neq 0, \\ \mathrm{ord}_p a - \mathrm{ord}_p b, & \text{if } x = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \end{cases}$$

The field of p-adic numbers, denoted by the symbol $\mathbb{Q}_p$, is defined as the completion of the field $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm introduced above. For the p-adic norm the strengthened triangle inequality holds, namely

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

This inequality implies the principle of isosceles triangle [4] for the field $\mathbb{Q}_p$, which consists in that for any $x, y \in \mathbb{Q}_p$ the alternative holds: either $|x|_p = |y|_p$, or $|x \pm y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$, if $|x|_p \neq |y|_p$.

3. Properties of the partial numerators and denominators

Now we shall obtain properties of a_n, $b_n(z)$, $n \geq 1$, defined by the equalities (2). Let us denote: $D(r) = \{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p < r\}$, $r > 0$.

Lemma 1. *Let $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ be such that inequalities* (12) *hold, then for all $z \in D(1)$:*

$$|a_n|_p = |bc|_p, \quad n \geq 0, \quad |b_n(z)|_p = |c|_p, \quad n \geq 1.$$

Proof. As $|n|_p \leq 1$ for any $n \in \mathbb{Z}$, then from the conditions of Lemma 1 together with the principle of the isosceles triangle [3] it follows that for $z \in D(1)$

$$\begin{gathered} |a+n|_p = |a|_p, \quad |b+n|_p = |b|_p, \quad |c+n|_p = |c|_p, \quad n \in \mathbb{N}, \\ |c-a+n|_p = |c|_p, \quad |c+n+(b-a+n+1)z| = |c|_p, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{13}$$

From the relations (2), (13) we obtain that the following relations hold

$$|a_n|_p = |bc|_p, \quad n \geq 0, \quad |b_n(z)|_p = |c|_p, \quad n \geq 1.$$

■

4. Properties of the canonical numerators and denominators

Let us define p-adic norms of the canonical numerators and denominators of the Euler fraction. Let us remark that the recurrence sequences of functions $\{A_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{B_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ which are defined by the equalities

$$\begin{cases} A_0(z) = b_0(z), & A_1(z) = a_1 z + b_0(z) b_1(z), \\ B_0(z) = 1, & B_1(z) = b_1(z), \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n(z) = b_n(z) A_{n-1}(z) + a_n z A_{n-2}(z), & n \geq 2, \\ B_n(z) = b_n(z) B_{n-1}(z) + a_n z B_{n-2}(z), & n \geq 2, \end{cases} \tag{14}$$

are the sequences of canonical numerators and denominators of the approximants of the Euler fraction, so that

$$f_n(z) = A_n(z)/B_n(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 2. *Let $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ be such that inequalities* (12) *hold. If $z \in D(1)$, then*

$$|A_n(z)|_p = |c|_p^{n+1}, \quad |B_n(z)|_p = |c|_p^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{15}$$

Proof. We shall apply the method of mathematical induction on n.

It is obvious that

$$|A_0(z)|_p = |b_0(z)|_p = |c|_p, \quad |B_0(z)|_p = 1, \quad |B_1(z)|_p = |b_1(z)|_p = |c|_p.$$

Therefore from Lemma 1 and the principle of isosceles triangle for all $z \in D(1)$ we obtain $|A_1(z)|_p = |b_0(z)|_p|b_1(z)|_p = |c|_p^2$. Thus the equalities (15) are true for $n = 0, 1$ and the base of induction is established.

We assume that equalities (15) are true for all $n < k$, where $k \geq 3$. Then from Lemma 1 and from the inductive hypothesis it follows that for all $z \in D(1)$

$$|b_k(z)A_{k-1}(z)|_p = |c|_p^{k+1}, \quad |a_k z A_{k-2}(z)|_p = |b|_p|c|_p^k|z|_p < |c|_p^{k+1},$$

$$|b_k(z)B_{k-1}(z)|_p = |c|_p^k, \ |a_k z B_{k-2}(z)|_p = |a_k z|_p|c|_p^{k-2} = |b|_p|c|_p^{k-1}|z|_p < |c|_p^k.$$

From these relations together with the recurrent relations (14) and the principle of isosceles triangle we obtain

$$|A_k(z)|_p = \max\{|b_k(z)A_{k-1}(z)|_p, |a_k z A_{k-2}(z)|_p\} = |c|_p^{k+1},$$

$$|B_k(z)|_p = \max\{|b_k(z)B_{k-1}(z)|_p, |a_k z B_{k-2}(z)|_p\} = |c|_p^k,$$

what means that the equalities (15) hold for $n = k$. Therefore, the step of induction is obtained. ■

5. The convergence of the sequence of approximants

Let us establish the conditions of convergence of the sequence $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ defined by formula (11).

Lemma 3. *Let $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ be such that inequalities* (12) *hold. If $z \in D(1)$, then for all $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n(z) - f_{n-1}(z)|_p = \frac{|a_1|_p \cdot \ldots \cdot |a_n|_p}{|c|_p^{2n-1}}|z|_p^n. \tag{16}$$

Proof. We shall use the method of mathematical induction on $n \in \mathbb{N}$. For $n = 1$ we have

$$|f_1(z) - f_0(z)|_p = \left|\frac{A_1(z)}{B_1(z)} - \frac{A_0(z)}{B_0(z)}\right|_p = \left|\frac{A_1(z)B_0(z) - A_0(z)B_1(z)}{B_0(z)B_1(z)}\right|_p =$$

$$= \frac{|a_1 z + b_0(z)b_1(z) - b_0(z)b_1(z)|_p}{|B_0(z)|_p|B_1(z)|_p} = \frac{|a_1|_p|z|_p}{|c|_p}.$$

Let us assume that formula (16) is true for $n = k$, $k \geq 1$. Now we shall prove that it is true for $n = k+1$. In fact, on the basis of Lemma 2, $|B_n(z)|_p = |c|_p^n$ for all $n \in \mathbb{N}$, so that

$$|f_{k+1}(z) - f_k(z)|_p = \left| \frac{A_{k+1}(z)}{B_{k+1}(z)} - \frac{A_k(z)}{B_k(z)} \right|_p =$$

$$= \frac{|A_{k+1}(z)B_k(z) - A_k(z)B_{k+1}(z)|_p}{|c|_p^{2k+1}}, \quad z \in D(1).$$

By applying the recurrent relations (14) to the functions $A_{k+1}(z)$, $B_{k+1}(z)$ in complience with the induction assumptions and according to Lemmas 1, 2, we obtain that

$$|f_{k+1}(z) - f_k(z)|_p = \left| \frac{b_{k+1}(z)A_k(z)B_k(z) + a_{k+1}zA_{k-1}(z)B_k(z)}{B_k(z)B_{k+1}(z)} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_{k+1}(z)A_k(z)B_k(z) + a_{k+1}zA_k(z)B_{k-1}(z)|_p}{B_k(z)B_{k+1}(z)} \right|_p =$$

$$= \frac{|a_{k+1}z(A_{k-1}(z)B_k(z) - A_k(z)B_{k-1}(z))|_p}{|c|^2|B_{k-1}(z)|_p|B_k(z)|_p} =$$

$$= |a_{k+1}z|_p|c|_p^{-2}|f_k(z) - f_{k-1}(z)|_p = \frac{|a_1|_p \cdot \ldots \cdot |a_{k+1}||z|_p^{k+1}}{|c|_p^{2k+1}}.$$

■

Proof of the Theorem 1. Based on the assumptions of the Theorem 1 and of Lemmas 1, 3, it follows that for any $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, and $z \in D(1)$ the following estimates are true:

$$|f_n(z) - f_m(z)|_p \leq \max_{n+1 \leq j \leq m} |f_j(z) - f_{j-1}(z)|_p <$$

$$< |b|_p \left(\frac{|b|_p}{|c|_p} |z|_p \right)^n < |b|_p \left(\frac{|b|_p}{|c|_p} \right)^n.$$

From the inequality $|b|_p < |c|_p$ the fundamentality of sequence (11) in $\mathbb{Q}_p$ follows and so its convergence in $\mathbb{Q}_p$ follows too.

6. Convergence of the sequence of approximants to the ratio of hypergeometric functions

The Theorem 1 brings us to the fact that in the circle $D(1)$ there exists a function $f : D(1) \to \mathbb{Q}_p$, which is the pointwise limit of the sequence $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z), \quad z \in D(1).$$

From Lemma 2 it follows that the image of the map f in fact is a subset of the unit circle $\{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p = |c|_p\}$. Let us establish the requirements on the parameters $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ for which the function $f(z)$ to be equal to the ratio (3).

Lemma 4 ([4]). *Let $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ and $\min\{|a|_p, |b|_p\} > 1$, $|c|_p > |ab|_p$. If $z \in D(p^{1/(1-p)})$, then*

$$|F(a, b, c; z)|_p = 1.$$

Lemma 5. *Let $a, b, c \in \mathbb{Q}_p$ be such that $|c|_p > |ab|_p$ and inequalities (12) hold. If $z \in D(p^{1/(1-p)})$, then for all $n \in \mathbb{N}$*

$$\left| f_n(z) - c\frac{F(a, b; c; z)}{F(a, b+1; c+1; z)} \right|_p = \frac{|a_1|_p \cdot \ldots \cdot |a_{n+1}|_p}{|c|_p^{2n+1}} |z|_p^{n+1}. \qquad (17)$$

Proof. Let us prove that for all $n \in \mathbb{N}$ the following formula is true

$$c\frac{F(a, b; c; z)}{F(a, b+1; c+1; z)} = \frac{a_{n+1} z A_{n-1}(z) + w_{n+1}(z) A_n(z)}{a_{n+1} z B_{n-1}(z) + w_{n+1}(z) B_n(z)}, \qquad (18)$$

where $w_n(z), n \in \mathbb{N}$, are defined by the equation (9). Let us use the method of mathematical induction on $n \in \mathbb{N}$. For $n = 1$ we have

$$c\frac{F(a, b; c; z)}{F(a, b+1; c+1; z)} = b_0 + \frac{a_1 z}{w_1(z)}.$$

Let us assume that the formula (18) it true for $n = k$. Now we shall prove that it holds for $n = k+1$. From the induction assumptions we obtain

$$c\frac{F(a, b; c; z)}{F(a, b+1; c+1; z)} = \frac{a_k z A_{k-2}(z) + w_k(z) A_{k-1}(z)}{a_k z B_{k-2}(z) + w_k(z) B_{k-1}(z)}.$$

Since $w_k(z) = b_k(z) + \dfrac{a_{k+1} z}{w_{k+1}(z)}$ (see formula (7)), then

$$c\frac{F(a, b; c; z)}{F(a, b+1; c+1; z)} = \frac{a_k z A_{k-2}(z) + \left(b_k(z) + \frac{a_{k+1} z}{w_{k+1}(z)} \right) A_{k-1}(z)}{a_k z B_{k-2}(z) + \left(b_k(z) + \frac{a_{k+1} z}{w_{k+1}(z)} \right) B_{k-1}(z)} =$$

$$= \frac{a_{k+1} z A_{k-1}(z) + w_{k+1}(z) A_k(z)}{a_{k+1} z B_{k-1}(z) + w_{k+1}(z) B_k(z)}.$$

Therefore from the formula (18) and from Lemma 2 it follows that

$$\left| f_n(z) - c\frac{F(a, b; c; z)}{F(a, b+1; c+1; z)} \right|_p =$$

$$= \left| \frac{b_n(z)A_{n-1}(z) + a_n z A_{n-2}(z)}{b_n(z)B_{n-1}(z) + a_n z B_{n-2}(z)} - \frac{a_n z A_{n-2}(z) + w_n(z)A_{n-1}(z)}{a_n z B_{n-2}(z) + w_n(z)B_{n-1}(z)} \right|_p =$$

$$= \frac{|f_{n-1}(z) - f_{n-2}(z)|_p |a_n z|_p |b_n(z) - w_n(z)|_p}{|c|_p^3}.$$

Since from Lemma 4 and formula (9) it follows that for all $n \in \mathbb{N}$, $|w_n(z)|_p = |c|_p$, then from Lemma 3 and formula (8) we obtain (17). ■

Proof of the Theorem 2. Since from the assumptions of Theorem 2 and from Lemmas 1, 5 it follows that for any $n \in \mathbb{N}$ and for $z \in D(p^{1/(1-p)})$ it is holds

$$\left| f_n(z) - c\frac{F(a,b,c;z)}{F(a,b+1,c+1;z)} \right|_p = |c|_p \left(\frac{|b|_p}{|c|_p} |z|_p \right)^{n+1} < |c|_p \left(\frac{|b|_p}{|c|_p} \right)^{n+1}.$$

From this inequality and from inequality $|b|_p < |c|_p$ it follows that the sequence of functions (11) converges to the ratio (3).

1. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications. Studies in Computational Mathematics, **3**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.

2. Jones W.B., Thron W.J. Continued Fractions. Analytic Theory and Applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **11**, Addison-Wesley Publishing Co., Reading Mass., 1980.

3. Koblitz N. p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, No. 58, New York, 1977.; Second edition, 1984.

4. Михайло Симотюк, Оксана Медвідь. *Збіжність неперервного дробу Нерлунда до відношення гіпергеометричних функцій в полі p-адичних чисел* // Матем. вісник НТШ. – 2015. – Т. 12. – С. 52–60.

Оксана Медвідь, Михайло Симотюк

ЗБІЖНІСТЬ НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ ОЙЛЕРА ДО ВІДНОШЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ В $\mathbb{Q}_p$

Досліджено збіжність неперервного дробу Ойлера до відношення гіпергеометричних функцій Гауса в полі p-адичних чисел.

УДК 524.1

Олег Петрук[1]

НЕЛІНІЙНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕСТАЦІОНАРНОГО КІНЕТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Отримано наближений розв'язок нестаціонарного кінетичного рівняння, яке описує дифузійне прискорення заряджених частинок на сильній ударній хвилі у випадках, коли зворотній вплив частинок на структуру течії є суттєвим, а прискорення нелінійним. Цього результату було досягнуто завдяки участі у роботі наукового семінару, який очолював Богдан Пташник.

1. Вступ

Диференціальне рівняння, яке описує залежну від часу t функцію розподілу $f(t,x,p)$ за координатою x та імпульсом p релятивістських частинок, які прискорюються на сильній нерелятивістській ударній хвилі, має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\frac{1}{3}\frac{du}{dx}p\frac{\partial f}{\partial p}+Q, \tag{1}$$

де D – коефіцієнт дифузії. Система координат обрана таким чином, що ударна хвиля знаходиться в точці $x=0$, а потік рухається зі швидкістю u в додатньому напрямку. Крайній праворуч член у рівнянні (1) описує інжекцію частинок в процес прискорення:

$$Q=Q_{\rm t}(t)Q_{\rm p}(p)Q_{\rm x}(x). \tag{2}$$

Типово розглядається моноенергетична інжекція частинок з моментом $p_{\rm i}$ на фронті ударної хвилі:

$$Q_{\rm p}(p)=\frac{\eta n_1 u_1}{4\pi p_{\rm i}^2}\delta(p-p_{\rm i}),\quad Q_{\rm x}=\delta(x), \tag{3}$$

де індекс '1' позначає величини безпосередньо перед фронтом (в точці $x=0^-$), η – ефективність інжекції. Вона визначає частку усіх частинок, які починають прискорюватися в режимі стаціонарної інжекції, тобто коли $Q_{\rm t}(t)=1$.

Прискорені частинки можуть отримати помітну частину кінетичної енергії ударної хвилі. Тоді вони створюють перед її фронтом тиск, співмірний з гідродинамічним. Він у свою чергу сповільнює потік плазми,

[1] *ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України, petruk@astro.franko.lviv.ua*

яка налітає на ударну хвилю. У цьому полягає нелінійність (далі скорочено 'НЛ') задачі: функція $u(x)$ залежить від $f(t,x,p)$. Якщо ж енергія, яку отримали частинки, є знехтувано малою, то маємо прискорення, яке відбувається в режимі 'тестової частинки' (далі 'ТЧ'). Тоді структура течії не модифікується частинками, й вона має різні швидкості: u_1 перед (для $x<0$) і u_2 за фронтом (для $x>0$), які не залежать від x у своїх областях.

Розв'язок рівняння (1) в границі ТЧ та зі стаціонарною інжекцією, $Q_{\mathrm{t}}=1$, отримано в роботах [3, 4], де виведено також необхідний для практичних застосувань вираз для середнього часу прискорення $\langle t(p)\rangle$. ТЧ-розв'язок для нестаціонарної інжекції, $Q_{\mathrm{t}}=Q_{\mathrm{t}}(t)$, одержано в нашій роботі [5]. Стаціонарна (тобто $\partial f/\partial t=0$) НЛ-задача була розв'язана в [1]. Деякі аспекти нестаціонарної НЛ-проблеми було досліджено в [2]. Там розглядалася стаціонарна інжекція та було отримано наближений вираз для середнього часу прискорення. В наступному розділі нами отримано наближений НЛ розв'язок нестаціонарного рівняння (1) з нестаціонарною інжекцією.

2. Розв'язок

Застосувавши перетворення Лапласа за змінною t до рівняння (1), отримаємо рівняння для Лаплас-образу функції розподілу $\overline{f}$:

$$s\overline{f}+u\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right]+\frac{1}{3}\frac{du}{dx}p\frac{\partial\overline{f}}{\partial p}+\overline{Q_{\mathrm{t}}}(s)Q_{\mathrm{p}}(p)\delta(x). \tag{4}$$

Перетворення рівняння (1) для f до рівняння для $\overline{f}$ у формі (4) можливе лише тоді, коли $u(x)$ і $D(x)$ не залежать від часу.

Інтегруючи рівняння (4) за змінною x від $x=0^-$ до $x=0^+$ та від $x=-\infty$ до $x=0^-$ та припускаючи, що u і D є постійними за фронтом (тобто для $x>0$), отримуємо [2]:

$$\left[D\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right]_2-\left[D\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right]_1+\frac{u_2-u_1}{3}p\frac{\partial\overline{f_{\mathrm{o}}}}{\partial p}+Q_{\mathrm{p}}\overline{Q_{\mathrm{t}}}(s)=0, \tag{5}$$

$$\left[D\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right]_1=\overline{f_{\mathrm{o}}}u_{\mathrm{p}}\frac{F_{\mathrm{p}}}{2}+\overline{f_{\mathrm{o}}}u_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}-\frac{u_1-u_{\mathrm{p}}}{3}p\frac{\partial\overline{f_{\mathrm{o}}}}{\partial p}, \tag{6}$$

$$\left[D\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right]_2=-\overline{f_{\mathrm{o}}}u_2\frac{F_2}{2}, \tag{7}$$

де

$$F_2(s,p)=\left(1+\frac{4sD_2}{u_2^2}\right)^{1/2}-1, \tag{8}$$

$$F_{\mathrm{p}} = \frac{2s\Lambda}{u_{\mathrm{p}}}, \tag{9}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\overline{f_{\mathrm{o}}}(s,p)} \int_{-\infty}^{0} \overline{f}(s,x,p)dx, \tag{10}$$

$$u_{\mathrm{p}} = u_1 - \frac{1}{\overline{f_{\mathrm{o}}}(s,p)} \int_{-\infty}^{0} \overline{f}(s,x,p)\frac{du}{dx}dx, \tag{11}$$

$$I_{\mathrm{p}} = 1 + \frac{1}{3}\frac{d\ln u_{\mathrm{p}}}{d\ln p}. \tag{12}$$

Індекс 'o' позначає величини на фронті (в точці $x = 0$), а '2' покликається на розташування одразу за фронтом ударної хвилі (в точці $x = 0^{+}$). В ТЧ-режимі, $u_{\mathrm{p}} = u_1$ і $I_{\mathrm{p}} = 1$. Вираз (7) має такий самий вигляд у границі ТЧ, а (6) є НЛ-узагальненням ТЧ-виразу (21) з роботи [5].

2.1. Функція $f_{\mathrm{o}}(p)$

Підстановка (6) і (7) у (5) дає рівняння для Лаплас-образу функції розподілу на фронті $\overline{f_{\mathrm{o}}}$:

$$\frac{\partial \overline{f_{\mathrm{o}}}}{\partial p} + \frac{\varsigma}{p}\overline{f_{\mathrm{o}}} = q(p)\delta(p - p_{\mathrm{i}})\overline{Q_{\mathrm{t}}}, \tag{13}$$

де

$$q = \frac{\eta n_1 u_1}{4\pi p_{\mathrm{i}}^2 p}\frac{3}{u_{\mathrm{p}} - u_2}, \tag{14}$$

а

$$\varsigma = s_{\mathrm{f}} + \frac{3}{2}\frac{u_{\mathrm{p}}F_{\mathrm{p}} + u_2 F_2}{u_{\mathrm{p}} - u_2} \tag{15}$$

є спектральним індексом функції $\overline{f_{\mathrm{o}}}$, тобто $\overline{f_{\mathrm{o}}} \propto p^{-\varsigma(p)}$. Член

$$s_{\mathrm{f}} = \frac{3u_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}}{u_{\mathrm{p}} - u_2} \tag{16}$$

є спектральним індексом стаціонарної НЛ функції $\mathrm{f_o}(p) \equiv f_{\mathrm{o}}(t = \infty, p)$, яку знайдено в [1].

Розв'язком рівняння (13) є функція

$$\overline{f_{\mathrm{o}}}(s,p) = q(p_{\mathrm{i}})\overline{Q_{\mathrm{t}}} \exp\left[-\int_{p_{\mathrm{i}}}^{p} \varsigma(s,p')\frac{dp'}{p'}\right]. \tag{17}$$

Вона може бути записана як добуток

$$\overline{f_{\mathrm{o}}}(s,p) = \mathrm{f_o}(p)\overline{Q_{\mathrm{t}}}(s)\overline{\varphi_{\mathrm{o}}}(s,p), \tag{18}$$

де стаціонарний розподіл $\mathrm{f_o}(p)$ дається виразом [1]

$$\mathrm{f_o}(p) = \frac{\eta n_1}{4\pi p_{\mathrm{i}}^3} \frac{3\sigma_{\mathrm{s}}}{\sigma_{\mathrm{p}} - 1} \exp\left[- \int_{p_{\mathrm{i}}}^{p} \frac{3\sigma_{\mathrm{p'}}}{\sigma_{\mathrm{p'}} - 1} \frac{dp'}{p'} \right] \tag{19}$$

зі $\sigma_{\mathrm{s}} = u_1/u_2$ та $\sigma_{\mathrm{p}} = u_{\mathrm{p}}/u_2$. Стаціонарний розв'язок в границі ТЧ отримується з виразу(19) підстановкою постійної $\sigma_{\mathrm{p}}(p) = \sigma_{\mathrm{s}}$.

Третій множник у (18) є таким:

$$\overline{\varphi_{\mathrm{o}}}(s,p) = \exp\left(-h_{\mathrm{o}}(s,p)\right), \tag{20}$$

де

$$h_{\mathrm{o}}(s,p) = \frac{3}{2} \int_{p_{\mathrm{i}}}^{p} \frac{u_{\mathrm{p}} F_{\mathrm{p}}(s,p') + u_2 F_2(s,p')}{u_{\mathrm{p}} - u_2} \frac{dp'}{p'}. \tag{21}$$

Записаний у такому вигляді, h_{o} у НЛ режимі має вигляд, подібний до аналогічної функції в ТЧ-границі (див. наприклад вираз (3.28) в [3]): відмінність полягає лише в тому, що маємо тут F_{p} і u_{p} замість величин безпосередньо перед фронтом ударної хвилі F_1 і u_1.

Функція розподілу $f_{\mathrm{o}}(t,p)$ задається оберненим перетворенням Лапласа виразу (18):

$$f_{\mathrm{o}}(t,p) = \mathrm{f_o}(p) \int_0^t Q_{\mathrm{t}}(t-t') \varphi_{\mathrm{o}}(t',p) dt', \tag{22}$$

де $\varphi_{\mathrm{o}}(t)$ – зворотнє перетворення Лапласа від $\exp[-h_{\mathrm{o}}(s)]$, а $Q_{\mathrm{t}}(t)$ задає зміну ефективності інжекції в часі.

2.2. Імовірність $\varphi_{\mathrm{o}}(t)$

Формула перетворення Лапласа

$$\int_0^\infty \varphi_{\mathrm{o}}(t) e^{-st} dt = \exp\left(-h_{\mathrm{o}}(s,p)\right), \tag{23}$$

записана для $s = 0$, доводить, що функція $\varphi_{\mathrm{o}}(t)$ є нормованою на одиницю [3]

$$\int_0^\infty \varphi_{\mathrm{o}}(t) = 1. \tag{24}$$

Тому ми можемо розглядати $\varphi_{\mathrm{o}}(t,p;p_{\mathrm{i}})$ як імовірність того, що частинки, інжектовані з імпульсом p_{i}, можуть бути прискореними до імпульса p впродовж часу t.

Відтак, диференціювання рівності (23) за s з наступною підстановкою $s = 0$ дає середній час прискорення [3]

$$\langle t(p) \rangle \equiv \int_0^\infty t \varphi_{\mathrm{o}}(t) dt = \left. \frac{\partial h_{\mathrm{o}}(s)}{\partial s} \right|_{s=0}. \tag{25}$$

Як зазначалося, профіль $u(x)$ вважається незмінним в часі. Ми будемо використовувати ще одне наближення. Навіть за припущення про стаціонарність $u(x)$ функція $u_\mathrm{p}(p)$ повинна змінюватися з t. А тому, як це видно з (11), й відношення

$$\overline{f}(s,x,p)/\overline{f_\mathrm{o}}(s,p) \equiv \mathcal{F}(s,x,p) \tag{26}$$

повинно залежати від s, як це є в режимі ТЧ [4, 5]. Якщо так, то похідна (25) є досить складною: F_p, F_2 і u_p в (21) залежать від s. Однак, якщо розглянути розвинення $\mathcal{F}(s,x,p)$ в ряд Маклорена за малим s та обмежитися лише домінуючим першим членом ряду, тоді матимемо, що відношення $\overline{f}(s,x,p)/\overline{f_\mathrm{o}}(s,p)$ не залежить від часу. За такого наближення задача значно спрощується. Зокрема, функція $u_\mathrm{p}(p)$ є стаціонарною.

За такого наближення й Λ, означена виразом (10), не залежить від часу:

$$\Lambda(p) = \int_{-\infty}^{0} \mathcal{F}(x,p)dx. \tag{27}$$

Тоді з (25) одержуємо вираз для середнього часу прискорення в НЛ-режимі, яке отримано в [2] (формула (25) у цьому покликанні):

$$\langle t(p)\rangle = \int_{p_\mathrm{i}}^{p} \frac{3}{u_\mathrm{p}-u_2}\left(\Lambda + \frac{D_2}{u_2}\right)\frac{dp'}{p'}. \tag{28}$$

Записаний таким чином, вираз є дуже подібним до відомої формули з [3] для границі ТЧ:

$$\langle t(p)\rangle = \int_{p_\mathrm{i}}^{p} \frac{3}{u_1-u_2}\left(\frac{D_1}{u_1} + \frac{D_2}{u_2}\right)\frac{dp'}{p'}. \tag{29}$$

Важливо, що в наближенні стаціонарності u_p можна також знайти НЛ розв'язок рівняння (1).

Запишемо $\overline{\varphi_\mathrm{o}}$ як добуток:

$$\overline{\varphi_\mathrm{o}} = \overline{\varphi_\mathrm{op}} \cdot \overline{\varphi_\mathrm{o2}}, \tag{30}$$

де

$$\overline{\varphi_\mathrm{op}}(s,p) = \exp\left(-\frac{3}{2}\int_{p_\mathrm{i}}^{p} \frac{u_\mathrm{p}F_\mathrm{p}(s,p')}{u_\mathrm{p}-u_2}\frac{dp'}{p'}\right) \tag{31}$$

і

$$\overline{\varphi_\mathrm{o2}}(s,p) = \exp\left(-\frac{3}{2}\int_{p_\mathrm{i}}^{p} \frac{u_2F_2(s,p')}{u_\mathrm{p}-u_2}\frac{dp'}{p'}\right). \tag{32}$$

У формулі (32) лише F_2 залежить від s. Це F_2 є дуже подібним до F_2 в границі ТЧ, за винятком того, що $\overline{\varphi_\mathrm{o2}}$ містить u_p замість u_1 в знаменнику (див. розділ 3.3 в [5]). Підстановка

$$\frac{u_2}{u_\mathrm{p}-u_2} = \frac{u_2}{u_1-u_2} - \frac{u_2}{u_1-u_2}\frac{u_\mathrm{p}-u_1}{u_\mathrm{p}-u_2} \tag{33}$$

в (32) перетворює цей вираз у добуток

$$\overline{\varphi_{o2}}(s,p) = \overline{\varphi_{o2}^{TP}}(s,p) \cdot \exp\big(s\ \Delta T_2(p)\big), \tag{34}$$

де

$$\overline{\varphi_{o2}^{TP}}(s,p) = \exp\left(-\frac{3}{2}\int_{p_i}^{p} \frac{u_2 F_2(s,p')}{u_1-u_2}\frac{dp'}{p'}\right) \tag{35}$$

є точно таким же ж, як $\overline{\varphi_{o2}}$ в ТЧ-границі, а

$$\Delta T_2(p) = \int_{p_i}^{p} \frac{3(D_2/u_2)}{u_1-u_2}\frac{u_p-u_1}{u_p-u_2}\frac{dp'}{p'}. \tag{36}$$

Під час перетворень в (34) було залишено лише перший член у розвиненні F_2 в ряд за малим параметром $4sD_2/u_2^2$, що виправдане для малих значень s; тобто бралося, що $F_2 \approx 2sD_2/u_2^2$.

Обернене перетворення Лапласа першого множника в (34) отримано в [4, 5]:

$$\varphi_{o2}^{TP}(t) = \frac{e^{2A_2}}{2^{2A_2+1}t_2\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\xi(\tau)^2}}{\tau^{A_2/2+1}}\Big(\mathrm{H}_{A_2+1}(\xi) - 2\tau^{1/2}\mathrm{H}_{A_2}(\xi)\Big), \tag{37}$$

де $\mathrm{H}_m(x)$ – „фізичний“ поліном Ерміта (член $\mathrm{H}_1(x) = 2x$), $\xi(\tau) = \tau^{1/2} + A_2/(2\tau^{1/2})$, $\tau = t/t_2$, $t_2 = 4D_2u_2^{-2}$, $A_2 = 3(\sigma_s - 1)^{-1}\alpha^{-1}$, α – степінь в залежності коефіцієнта дифузії від імпульсу частинки $D(p) \propto p^{\alpha}$ (значення α повинно бути таким, щоб A_2 було цілим). Обернене перетворення Лапласа другого множника в (34) є дельта-функцією $\delta(t + \Delta T_2)$. Отже, зворотнє перетворення (34) є таким

$$\varphi_{o2}(t) = \int \varphi_{o2}^{TP}(t-t')\delta(t'+\Delta T_2)dt' = \varphi_{o2}^{TP}(t+\Delta T_2). \tag{38}$$

Вираз (31), завдяки (9), можна переписати як $\overline{\varphi_{op}} = \exp(-sT_1)$, де

$$T_1(p) = \int_{p_i}^{p} \frac{3\Lambda(p')}{u_p-u_2}\frac{dp'}{p'}. \tag{39}$$

Тепер, згідно правила оберненого перетворення Лапласа добутку вигляду $\overline{\varphi_o} = e^{-sT} \cdot \overline{\varphi_{o2}}(s)$, маємо, що

$$\varphi_o(t) = \varphi_{o2}(t-T_1)\mathcal{H}(t-T_1). \tag{40}$$

З (38) та (40) остаточно отримуємо, що

$$\varphi_o(t) = \varphi_{o2}^{TP}(t - T_1 + \Delta T_2)\mathcal{H}(t-T_1). \tag{41}$$

Використання цього виразу в формулі (22) дає розв'язок поставленої проблеми, а саме, задає *нестаціонарну функцію розподілу $f_o(t,p)$ для частинок зі залежною від часу інжекцією та нелінійним режимом прискорення.* Нелінійні ефекти враховано тут у наближенні малого s, що відповідає (наближеному) припущенню про стаціонарність функцій $u(x)$ та $u_p(p)$.

2.3. Функція $f(t,x,p)$

З незалежним від часу $\mathcal{F}$ легко знайти також розподіл частинок довкола ударної хвилі. Справді, обернене перетворення Лапласа виразу $\overline{f}(s,x,p) = \overline{f_{\mathrm{o}}}(s,p)\mathcal{F}(x,p)$ одразу дає $f(t,x,p) = f_{\mathrm{o}}(t,p)\mathcal{F}(x,p)$ перед фронтом ударної хвилі ($x < 0$). Вирази для розподілу за фронтом ($x > 0$) подано в розділі 3.4 роботи [5].

Для практичних застосувань можна використовувати наближення функції $\mathcal{F}(x,p)$, запропоноване в [2]:

$$\mathcal{F}(x,p) \approx \exp\left[\frac{s_{\mathrm{f}}(p)}{3}\left(1-\frac{u_2}{u_1}\right)\int_0^x \frac{u(x')}{D(x',p)}dx'\right], \qquad (42)$$

яке є першим членом розкладу $\mathcal{F}(s)$ за малим s.

1. *Blasi P.* A semi-analytical approach to non-linear shock acceleration // Astroparticle Physics. – 2002. – v. 16. – p. 429–439.

2. *Blasi P., Amato E., Caprioli D.* The maximum momentum of particles accelerated at cosmic ray modified shocks // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2007. – v. 375. – p. 1471–1478.

3. *Drury L.* An introduction to the theory of diffusive shock acceleration of energetic particles in tenuous plasmas // Reports on Progress in Physics. – 1983. – v. 46. – p. 973–1027.

4. *Forman M., Drury L.* Time-dependent shock acceleration: approximations and exact solutions // Proceedings of 18th ICRC. – 1983. – v. 2. – p. 267–270.

5. *Petruk O., Kopytko B.* Time-dependent shock acceleration of particles. Effect of the time-dependent injection, with application to supernova remnants // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2016. – v. 462. – p. 3104–3114.

Oleh Petruk

NON-LINEAR SOLUTION OF THE TIME-DEPENDENT KINETIC EQUATION

The approximate solution of the non-stationary kinetic equation which describes the diffusive shock acceleration of particles is derived for the regime when the back-reaction of particles on the flow is essential and acceleration is therefore non-linear.

УДК 517.95

Наталія Процах[1]

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Світлій пам'яті Б.Й. Пташника присвячується

У статті розглянуто мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння з інтегральним доданком спеціального вигляду. Встановлено достатні умови існування та єдиності розв'язку з просторів Соболева цієї задачі, а також умови, за яких норма розв'язку задачі в просторі Лебега прямує до нуля при зростанні часової змінної.

1. Вступ

Наукові праці Богдана Йосиповича Пташника присвячені теорії умовно коректних задач для диференціальних рівнянь. Разом із учнями він розробив оригінальні методи дослідження розв'язності багатьох некласичних задач для лінійних і слабконелінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними скінченного й безмежного порядків, а також для диференціально-операторних рівнянь, слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь [4], нелінійних рівнянь з доданком типу оператора пам'яті [3].

У статті розглянуто нелінійне ультрапараболічне рівняння з інтегральним доданком. Встановлено умови однозначної розв'язності в просторах Соболєва мішаної задачі для цього рівняння та показано, що за певних умов на коефіцієнти рівняння норма розв'язку цієї задачі в просторі Лебега $L^2(G)$, де G – обмежена область, якій належать просторові змінні, прямує до нуля при зростанні часової змінної. Зауважимо, що знаходженню умов однозначної розв'язності мішаних задач та задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь без інтегральних доданків присвячено, зокрема, праці [1], [2], [5], а для нелінійних ультрапараболічних рівнянь з інтегральним доданком типу оператора пам'яті – працю [3].

[1] *Національний лісотехнічний університет України, protsakh@ukr.net*

2. Основні позначення та функціональні простори

Нехай Ω і D обмежені області відповідно в $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^l$, з межами $\partial\Omega \in C^1$ і $\partial D \in C^1$; $l,\ n \in \mathbb{N}$, причому $l \leqslant n$; $x \in \Omega,\ y \in D,\ t \in (0,T)$, де $T \in (0,\infty)$, $Q_\tau = \Omega \times D \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, $G = \Omega \times D$.

Позначимо: $\Sigma_T := \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T := \Omega \times \partial D \times (0,T)$, ν – одинична зовнішня нормаль до S_T, $S_T^1 := \{(x,y,t) \in S_T : \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \cos(\nu, y_i) < 0\}$, $S_T^2 := \{(x,y,t) \in S_T : \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \cos(\nu, y_i) \geqslant 0\}$.

Введемо простори:

$L^\infty(Q_T) := \{w :\ w$ – вимірна та існує така стала C, що $|w(x,y,t)| \leqslant C$ м. в. на $Q_T\}$, $\|w; L^\infty(Q_T)\| = \inf\{C : |w(x,y,t)| \leqslant C$ м. в. на $Q_T\}$;

$L^2(G) := \{w :\ w$ – вимірна, $\int\limits_G |w(x,y)|^2\, dxdy < \infty\}$,

$\|w; L^2(G)\| = \big(\int\limits_G |w(x,y)|^2\, dxdy\big)^{\frac{1}{2}}$;

$L^2(0,T) := \{w :\ w$ – вимірна, $\int\limits_0^T |w(t)|^2\, dt < \infty\}$,

$\|w; L^2(0,T)\| = \big(\int\limits_0^T |w(t)|^2\, dt\big)^{\frac{1}{2}}$;

$L^2(Q_T) := \{w :\ w$ – вимірна, $\int\limits_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\, dxdydt < \infty\}$,

$\|w; L^2(Q_T)\| = \big(\int\limits_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\, dxdydt\big)^{\frac{1}{2}}$;

$W^{1,2}(Q_T)$ – множина всіх розподілів w, які разом зі своїми похідними першого порядку за всіма змінними належать до простору $L^2(Q_T)$,

$\|w; W^{1,2}(Q_T)\| = \big(\int\limits_{Q_T} [|w(x,y,t)|^2 + |w_t(x,y,t)|^2 +$

$+ \sum\limits_{i=1}^{l} |w_{y_i}(x,y,t)|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} |w_{x_i}(x,y,t)|^2]\, dt\big)^{\frac{1}{2}}$;

$C^k(O)$ – простір k–раз неперервно диференційовних функцій на O;

$C([0,T]; L^2(G))$ — простір неперервних функцій $([0,T] \to L^2(G))$;

$C^1(D; C^2(\overline{\Omega}))$ — простір неперервно-диференційовних функцій $(D \to C^2(\overline{\Omega}))$.

3. Формулювання задачі

Розглянемо функції, для яких виконуються умови

(A): $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2$

д. м. в. $(x,y,t) \in Q_T$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, a_0 – додатна стала;

(C): $c \in C(Q_T),\ c(x,y,t) \geqslant c_0$ д. м. в. $(x,y,t) \in Q_T,\ c_0 \in \mathbb{R}$;

(E): $E \in L^2(0,T)$;

(F): $F \in C([0,T];L^2(G))$;

(G): $g \in C([0,T])$;

(S): існує така поверхня з додатною мірою Лебега $\Gamma_1 \subset \partial D \subset \mathbb{R}^{l-1}$, що $S_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$;

(K): $k \in C^1(D;C^2(\overline{\Omega})),\ k\big|_{\partial\Omega\times D} = 0,\ \ k|_{\Omega\times\Gamma_2} = 0,$ де $\Gamma_2 = \partial D \backslash \Gamma_1$;

(U): $u_0,\, u_{0,y_j} \in L^2(G),\ j = 1,\ldots,l,\ u_0|_{\partial\Omega\times D} = 0,\ u_0|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0.$

Позначимо:

$$d(x,y,t) := \sum_{i=1}^{l} x_i k_{y_i}(x,y) + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)k_{x_j}(x,y))_{x_i} - k(x,y)c(x,y,t),$$

$$K_1(t) := \int\limits_G k(x,y)F(x,y,t)\,dx\,dy,$$

$$b(x,y,t) := F(x,y,t)(K_1(t))^{-1},$$

$$f(x,y,t) := b(x,y,t)E(t).$$

В області Q_T розглянемо мішану задачу для ультрапараболічного рівняння спеціального вигляду

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} x_i u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + \sqrt{u^2 + (g(t))^2} +$$

$$+b(x,y,t)\int\limits_G \Big(d(x,y,t)u - k(x,y)\sqrt{u^2+(g(t))^2}\Big)\,dx\,dy = f(x,y,t), \quad (1)$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \quad (2)$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \qquad u|_{S_T^1} = 0. \quad (3)$$

Введемо простори:

$V_1(Q_T) := \{w :\ w,\ w_{x_i} \in L^2(Q_T),\ i = 1,\ldots,n,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$;

$V_2(Q_T) := \{w : w \in W^{1,2}(Q_T),\ w|_{S_T^1} = 0,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$.

Означення 1. *Функцію $u(x,y,t)$ назвемо розв'язком задачі (1) – (3), якщо $u \in V_2(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, справджується умова (2) та для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$ виконується рівність*

$$\int\limits_{Q_T} \Big[u_t v + \sum_{i=1}^{l} x_i u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_i} + c(x,y,t)uv +$$

$$+b(x,y,t)v\int\limits_G \Big(d(x,y,t)u - k(x,y)\sqrt{u^2+(g(t))^2}\Big)\,dx\,dy+$$
$$+v\sqrt{u^2+(g(t))^2}\big]\,dx\,dy\,dt = \int\limits_{Q_T} f(x,y,t)v\,dx\,dy\,dt. \tag{4}$$

4. Існування та єдиність розв'язку задачі (1) – (3)

Нехай $K_1(t)\neq 0$ для всіх $t\in[0,T]$. Розглянемо *допоміжну задачу*:

знайти пару функцій $(u(x,y,t),q(t))$, для яких виконується умова (2), таких, що $u\in V_2(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, $q\in L^2(0,T)$ задовольняють рівність

$$\int\limits_{Q_T}\Big[u_tv+\sum_{i=1}^{l}x_iu_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_i}+c(x,y,t)uv+$$
$$+v\sqrt{u^2+(g(t))^2}\Big]\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_T}F(x,y,t)q(t)v\,dx\,dy\,dt \tag{5}$$

для всіх $v\in V_1(Q_T)$, та

$$q(t)=\big(K_1(t)\big)^{-1}\left(E(t)-\int\limits_G\big(d(x,y,t)u-k(x,y)\sqrt{u^2+(g(t))^2}\big)\,dx\,dy\right) \tag{6}$$

для всіх $t\in[0,T]$.

Умови розв'язності задачі (2), (5), (6) наведено в наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай $K_1(t)\neq 0$ для всіх $t\in[0,T]$ та виконуються умови (A), (C), (E), (F), (G), (K), (S), (U), та $a_{ijy_k},a_{ijx_i},c_{y_k}\in L^\infty(Q_T)$, $F_{y_k}\in L^2(Q_T)$, $i,j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,l$, $F|_{S_T^1}=0$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2), (5), (6).

Доведення. Проводиться за схемою доведення теорем 3 і 4 із [2]. ■

Очевидно, що якщо (u,q) є розв'язком задачі (2), (5), (6), то функція u є розв'язком задачі (1) – (3). Отже, в теоремі 1 записано умови існування розв'язку задачі (1) – (3). Легко встановити, використовуючи схему доведення теореми 2 з [1], що цей розв'язок єдиний.

5. Асимптотична поведінка розв'язку

Введемо такі позначення:

$$f_1=\max_{[0,T]}\left(\int\limits_G (F(x,y,t))^2\,dxdy\right)^{\frac12},$$

$$c^0 = \sup_{[0,T]} \big(\sup_G |c(x,y,t)|^2 \big)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_1 = \max_{ij} \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} (\operatorname*{ess\,sup}_G |a_{ij}(x,y,t)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_2 = \max_{ij} \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} (\operatorname*{ess\,sup}_G |a_{ijx_i}(x,y,t)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$K_1 \in \mathbb{R}$ така стала, що

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_G (k_{x_i}(x,y))^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_G (k_{x_i x_j}(x,y))^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \left(\int_G (k_{y_i}(x,y))^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_G (k(x,y))^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_1,$$

$$\beta = \frac{a_0}{\varkappa} + 2c_0 - 3 - \frac{2f_1 K_1 (na_1 + a_2 + 1 + \operatorname{mes} G + c^0)}{k_0},$$

$$\delta(t) = \frac{2f_1^2 \big((\operatorname{mes} G)^2 K_1^2 (g(t))^2 + (E(t))^2 \big)}{k_0^2}.$$

Теорема 2. *Нехай u є розв'язком задачі* (1) – (3)*; функція $K_1(t)$ така, що $|K_1(t)| \geqslant k_0 > 0$ для всіх $t > 0$ і $\beta > 0$; виконуються умови (A), (C), (E), (F), (G), (K), (S), (U) та $a_{ijx_i} \in L^\infty(Q_T)$. Якщо $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_k^{k+1} |E(\tau)|^2 \, d\tau = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_k^{k+1} |g(t)|^2 \, dt = 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \|u(\cdot,\cdot,t); L^2(G)\| =$* 0.

Доведення. Домножимо рівняння (1) на u та проінтегруємо по G:

$$\int_G \Bigg[u_t u + \sum_{i=1}^{l} x_i u_{y_i} u + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} u_{x_j} +$$

$$+ c(x,y,t)(u)^2 + u\sqrt{u^2 + (g(t))^2} \Bigg] \, dx \, dy +$$

$$+ \int_G b(x,y,t) u \, dx \, dy \int_G \Big(d(x,y,t)u - k(x,y)\sqrt{u^2 + (g(t))^2} \Big) \, dx \, dy =$$

$$= \int_G f(x,y,t) u \, dx \, dy, \quad t > 0. \tag{7}$$

Оцінимо окремо доданки у лівій частині рівності (7), використавши умови (A)–(U).

$$\mathcal{I}_1 := \int\limits_G \Big[u_t u + \sum_{i=1}^{l} x_i u_{y_i} u + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} u_{x_j} + c(x,y,t)(u)^2 +$$

$$+ u\sqrt{u^2 + (g(t))^2}\Big]\, dx\, dy \geqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_G (u)^2\, dx\, dy\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \int\limits_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} x_i (u)^2 \cos(\nu, y_i)\, d\sigma\, dx + a_0 \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i})^2\, dx\, dy +$$

$$+(c_0 - 1)\int\limits_G (u)^2\, dx\, dy - \frac{(g(t))^2 \mathrm{mes}\, G}{2};$$

$$\mathcal{I}_2 := \int\limits_G b(x,y,t) u\, dx\, dy \int\limits_G \Big(d(x,y,t)u - k(x,y)\sqrt{u^2 + (g(t))^2}\Big)\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{f_1 K_1 \big(\mathrm{mes}\, \Omega + n a_1 + a_2 + c^0 + 1\big)}{k_0} \int\limits_G (u)^2\, dx\, dy +$$

$$+\frac{f_1 K_1 |g(t)| \mathrm{mes}\, G}{k_0} \left(\int\limits_G (u)^2\, dx\, dy\right)^{1/2};$$

$$\mathcal{I}_3 := \int\limits_G f(x,y,t) u\, dx\, dy \leqslant \frac{|E(t)|}{k_0} f_1 \Big(\int\limits_G (u)^2\, dx\, dy\Big)^{1/2}.$$

Враховуючи оцінки доданків $\mathcal{I}_1$ – $\mathcal{I}_3$, з (7) для $t > 0$ отримуємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_G (u)^2\, dx\, dy\right) + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \int\limits_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} x_i (u)^2 \cos(y_i, \nu_i)\, d\sigma\, dx +$$

$$+\int\limits_G \Big(a_0 \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i})^2 + (c_0 - 1)(u)^2\Big)\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|E(t)| f_1 + f_1 K_1 |g(t)| \mathrm{mes}\, G}{k_0} \Big(\int\limits_G (u)^2\, dx\, dy\Big)^{1/2} +$$

$$+\frac{f_1 K_1 \big(\mathrm{mes}\, \Omega + n a_1 + a_2 + c^0 + 1\big)}{k_0} \int\limits_G (u)^2\, dx\, dy + \frac{(g(t))^2 \mathrm{mes}\, G}{2}. \qquad (8)$$

Використавши в (8) нерівність $2|vw| \leqslant |v|^2 + |w|^2, \ \ v, w \in \mathbb{R},$ отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_G (u)^2\,dx\,dy\right) + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega\int\limits_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^{l} x_i(u)^2\cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx +$$

$$\int\limits_G \left[a_0\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i})^2 + \left(c_0 - \frac{3}{2} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{f_1K_1\big(\operatorname{mes}\Omega + na_1 + a_2 + c^0 + 1\big)}{k_0}\right)(u)^2\right]dx\,dy \leqslant \frac{\delta(t)}{2}, \quad t > 0. \qquad (9)$$

Застосовуючи в (9) нерівність Фрідріхса $\int\limits_\Omega (v(x))^2\,dx \leq \varkappa \int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^{n}(v_{x_i}(x))^2\,dx$, яка виконується для довільної функції $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_0(\Omega)$, а стала $\varkappa$ залежить від Ω, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_G (u)^2\,dx\,dy\right) + \beta\int\limits_G (u)^2\,dx\,dy \leqslant \delta(t), \quad t > 0. \qquad (10)$$

Проінтегрувавши нерівність (10), знайдемо

$$\int\limits_G (u)^2\,dx\,dy \leqslant e^{-\beta t}\int\limits_G (u_0(x,y))^2\,dx\,dy + \int\limits_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau, \quad t > 0. \quad (11)$$

Із (11) отримуємо нерівність

$$\int\limits_G (u)^2\,dx\,dy \leqslant e^{-\beta t}\int\limits_G (u_0(x,y))^2\,dx\,dy + \sum_{0\leqslant k\leqslant [t]} e^{-\beta(t-k-1)}\int\limits_k^{k+1}\delta(\tau)\,d\tau. \quad (12)$$

З умов теореми випливає, що $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant[t]} e^{-\beta(t-k)}\int\limits_k^{k+1}\delta(\tau)\,d\tau \to 0$ при $t \to +\infty$. Тоді з (12) знайдемо, що $\int\limits_G (u(x,y,t))^2\,dx\,dy \to 0$ при $t \to \infty$.

$\blacksquare$

1. *Лавренюк С.П., Процах Н.П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1192–1210.

2. *Процах Н.П.* Обернена задача для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомою правою частиною // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 333–348.

3. *Процах Н.П., Пташник Б.И.* Смешанная задача для нелинейного ультрапараболического уравнения с интегральным слагаемым // Математический журнал. – 2012. – **12**, № 4. – С. 95–114.

4. *Пташник Б.Й., Ільків В.С. , Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

5. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Birkhäuser Verlag, 2004. – 390 p.

Nataliya Protsakh

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR SPECIAL TYPE ULTRAPARABOLIC EQUATION

The initial-boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation with the integral term of a special type is considered in this paper. Some sufficient conditions of the existence and uniqueness of solution from Sobolev spaces and conditions when the norm of the solution in Lebesque spases tends to zero as the time variable grows are obtained for this problem.

UDC 517.95

Mariya Ptashnyk[1]

HOMOGENIZATION OF DEGENERATE PSEUDOPARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES

Multiscale analysis of a degenerate pseudoparabolic variational inequality, modelling two-phase flow with dynamical capillary pressure in a perforated domain, is the main topic of this work. Regularization and penalty operator methods are applied to show the existence of a solution of the microscopic variational inequality. A priori estimates and the method of two-scale convergence are used to derive the corresponding macroscopic obstacle problem.

1. Introduction

Pseudoparabolic equations are used to model fluid filtration in fissured porous media [3], heat transfer in a heterogeneous medium [29], two-phase flow in porous media with dynamical capillary pressure [9], or to regularise ill-posed transport problems [4, 22]. Pseudoparabolic variational inequalities can be used to describe obstacle [31] and free boundary problems [10]. The well-posedness for pseudoparabolic equations and variational inequalities was considered by many authors [5, 6, 10, 15, 19, 25, 26, 31, 32]. Multiscale analysis for non-degenerate pseudoparabolic equations was considered in [24] and the method of two-scale convergence was applied to derive the corresponding macroscopic equations. Along with multiscale analysis results for elliptic [7, 11, 14, 28, 30] and parabolic [13, 18] variational inequalities, to the best of our knowledge, there are no results on homogenization of pseudoparabolic variational inequalities.

In this paper we consider multiscale analysis of degenerate pseudoparabolic variational inequalities modelling an obstacle problem for unsaturated flow in porous media with dynamic capillary pressure. Global existence results for the corresponding degenerale pseudoparabolic equations are obtained in [6, 19]. Models for two-phase flow with dynamical capillary pressure, originally proposed by [12, 23], consider a flux for moisture content u defined by a Darcy's law

$$J = -A\, k(u) \nabla (p + x_n),$$

[1] *Mathematics, University of Dundee, DD1 4HN Dundee, Scotland, UK, mptashnyk@maths.dundee.ac.uk*

with some constant A and permeability function $k(u)$, and the pressure in the wetting phase p is assumed to be a function of moisture content u and its time derivative $\partial_t u$, e.g.,

$$p = -\tilde{P}_c(u) + \tau \partial_t u,$$

in a simplified form. Then for u we obtain a pseudoparabolic equation of the from

$$\partial_t u = \nabla \cdot \big(A\, k(u)[P_c(u)\nabla u + \tau \nabla \partial_t u + \mathbf{e_n}]\big), \tag{1}$$

where $P_c(u) = -\tilde{P}_c'(u)$, A and τ are positive constants, and vector $\mathbf{e_n} = (0, \dots, 0, 1)$ determines the direction of flow due to gravity.

In this work we consider a two-phase flow problem in a perforated domain with Signorini's type conditions on the surfaces of perforations:

$$\begin{aligned} &u \geq 0, \quad A\, k(u)(P_c(u)\nabla u + \tau \nabla \partial_t u + \mathbf{e_n}) \cdot \nu \geq -f(t,x,u), \\ &u[A\, k(u)(P_c(u)\nabla u + \tau \nabla \partial_t u + \mathbf{e_n}) \cdot \nu + f(t,x,u)] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Then a weak formulation of equation (1) together with conditions (2) results in a pseudoparabolic variational inequality of the form (5). In our analysis of the thin obstacle problem (1), (2), defined in a heterogeneous perforated domain G^ε, where ε denotes a characteristic size of perforations, we shall consider a function $A(x)$ describing the heterogeneity of the medium, instead of a constant A, and a more general convection term, describing flow transport by a given velocity field.

The paper is organised as follows. In Section 2 we formulate the microscopic thin obstacle problem defined in a perforated domain G^ε. In Section 3 we derive a priori estimates and show the existence of a solution of pseudoparabolic variational inequality (5). In Section 4 we prove convergence results as $\varepsilon \to 0$ and derive macroscopic problem defined in a homogeneous domain G with the constraint $u(t,x) \geq 0$ in $(0,T) \times G$. In Appendix we summarize main compactness results for the two-scale convergence.

2. Formulation of mathematical problem

In this work we consider an obstacle problem formulated as a variational inequality of the form

$$\begin{aligned} &u \in \mathcal{K}(t), \\ &\langle \partial_t b(u), v - u\rangle + \langle \mathcal{A}(x, \nabla u, \partial_t \nabla u), \nabla(v-u)\rangle \geq \langle R(t,x,u), v-u\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

for $v \in L^2(0,T;\mathcal{K}(t))$, where $\mathcal{K}(t)$ is a closed convex set in $H^1(G)$. We shall consider the variational inequality (3) defined in a perforated domain with a periodic microscopic structure.

To define the microscopic perforated domain G^ε, where ε denotes the characteristic size of perforations, we consider a bounded domain $G \subset \mathbb{R}^n$, for $n \leq 3$, with a Lipschitz boundary ∂G, a unit cell Y, a subset Y^0, with $\overline{Y^0} \subset Y$ and Lipschitz boundary $\Gamma = \partial Y^0$, and denote $Y^* = Y \setminus Y^0$. Then

$$G_0^\varepsilon = \bigcup_{\xi \in \Xi^\varepsilon} \varepsilon(Y^0 + \xi),$$

where $\Xi^\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{Z}^n \ : \ \varepsilon(Y^0 + \xi) \subset G\}$ and the microscopic domain G^ε is given by $G^\varepsilon = G \setminus \overline{G}_0^\varepsilon$. The boundaries of perforations are defined as

$$\Gamma^\varepsilon = \bigcup_{\xi \in \Xi^\varepsilon} \varepsilon(\Gamma + \xi).$$

In the variational inequality in (3) we consider

$$\mathcal{A}^\varepsilon(x, \nabla u^\varepsilon, \partial_t \nabla u^\varepsilon) = A^\varepsilon(x) k(u^\varepsilon)(P_c(u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon + \nabla \partial_t u^\varepsilon) - F^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon),$$

and $R(t, x, u) = 0$, where the functions b, A^ε, k, P_c, and F^ε are specified below. On the microscopic boundaries Γ^ε we specify following conditions

$$\begin{aligned}
&u^\varepsilon \geq 0, \\
&\big(A^\varepsilon(x) k(u^\varepsilon)[P_c(u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon + \partial_t \nabla u^\varepsilon] - F^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon)\big) \cdot \nu \geq -\varepsilon f^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon), \\
&u^\varepsilon \left[\big(A^\varepsilon(x) k(u^\varepsilon)[P_c(u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon + \partial_t \nabla u^\varepsilon] - F^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon)\big) \cdot \nu + \varepsilon f^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Then the closed convex set $\mathcal{K}^\varepsilon$ is defined as

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \{v \in H^1(G^\varepsilon) : v = \kappa_D \ \text{ on } \partial G, \ v \geq 0 \text{ on } \Gamma^\varepsilon\}, \tag{4}$$

with some constant $0 < \kappa_D \leq 1$, and the corresponding variational inequality reads

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_t b(u^\varepsilon), v - u^\varepsilon \rangle_{G_T^\varepsilon} \\
&\qquad + \langle A^\varepsilon(x) k(u^\varepsilon)[P_c(u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon + \partial_t \nabla u^\varepsilon], \nabla(v - u^\varepsilon) \rangle_{G_T^\varepsilon} \\
&\qquad - \langle F^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon), \nabla(v - u^\varepsilon) \rangle_{G_T^\varepsilon} + \langle \varepsilon f^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon), v - u^\varepsilon \rangle_{\Gamma_T^\varepsilon} \geq 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

for $v - \kappa_D \in L^2(0, T; V)$ and $v(t) \in \mathcal{K}^\varepsilon$, where

$$V = \{v \in H^1(G^\varepsilon) : \ v = 0 \ \text{ on } \partial G\}.$$

We use notation $G_T = (0, T) \times G$, $G_T^\varepsilon = (0, T) \times G^\varepsilon$, $\Gamma_T = (0, T) \times \Gamma$, and $\Gamma_T^\varepsilon = (0, T) \times \Gamma^\varepsilon$, and

$$\langle \phi, \psi \rangle_{G_T^\varepsilon} = \int_0^T \int_{G^\varepsilon} \phi \psi dx dt, \ \text{ for } \phi \in L^p(0, T; L^q(G^\varepsilon)), \psi \in L^{p'}(0, T; L^{q'}(G^\varepsilon)),$$

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\Gamma_T^\varepsilon} = \int_0^T \int_{\Gamma^\varepsilon} \phi \psi d\gamma dt, \ \text{ for } \phi \in L^p(0, T; L^q(\Gamma^\varepsilon)), \psi \in L^{p'}(0, T; L^{q'}(\Gamma^\varepsilon)).$$

Assumption 1.

1) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is Lipschitz continuous, with $k(z) > 0$ for $z > 0$ and $k(0) = 0$, e.g. $k(z) = \frac{\vartheta_k z^\beta}{1+\gamma_k z^\beta}$ for some $\vartheta_k, \gamma_k > 0$ and $\beta \geq 1$,
$P_c(z) = \frac{\vartheta_p z^{-\lambda}}{1+\gamma_p z^\lambda}$ for $\vartheta_p, \gamma_p, \lambda > 0$ and $|k(z)P_c(z)| \leq C < \infty$ for $z \geq 0$.

2) $A \in L^\infty(Y)$ is extended Y-periodically to $\mathbb{R}^n$, and $A(y) \geq a_0 > 0$ for $y \in Y$, and $A^\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon)$.

3) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, nondescreasing, and continuously differentiable for $z > 0$, $b(z) \geq 0$ for $z \geq 0$, $b(0) = 0$, and $|b'(z)| \leq \gamma_b(1 + z^2)$ for $z \geq 1$ and $\gamma_b > 0$, e.g. $b(z) = \vartheta_b z^\alpha$, with $0 < \alpha \leq 3$ and $\vartheta_b > 0$.

4) $F^\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is Lipschitz continuous, and $F^\varepsilon(t, x, z) = Q^\varepsilon(t, x)H(z) + k(z)g$, where $|H'(z)(b'(z))^{-\frac{1}{2}}| \leq C$ for $z \geq 0$, $g \in \mathbb{R}^n$, $\nabla_x \cdot Q^\varepsilon(t, x) = 0$ for $(t, x) \in G^\varepsilon_T$, $Q^\varepsilon(t, x) \cdot \nu = 0$ on Γ^ε_T, and $Q^\varepsilon(t, x) \to Q(t, x, y)$ strongly two-scale, $Q \in L^2(G_T, H_{\mathrm{div}}(Y^*)) \cap L^\infty(G_T \times Y^*)$, where $H_{\mathrm{div}}(Y^*) = \{v \in L^2(Y^*)^n, \nabla_y \cdot v = 0,\ v \text{ is } Y\text{-periodic}\}$.

5) $f^\varepsilon(t, x, \xi) = f_0(t, x/\varepsilon)f_1(\xi)$, where $f_1 \in C^1_0(\mathbb{R})$, with $\xi f_1(\xi) \geq 0$, $f_1(0) = 0$, and $\left| f_1(\xi) \int_\xi^{\kappa_D} 1/k(\eta)\, d\eta \right| \leq C$ for $0 \leq \xi \leq \kappa_D$, and
$f_0 \in C^1([0, T]; C^1_{\mathrm{per}}(\Gamma))$ with $f_0(t, y) \geq 0$ for $(t, y) \in \Gamma_T$.

6) Initial condition $u_0 \in \mathcal{K}$ and $\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta(0)} b'(\xi) \int_{\kappa_D}^{\xi} \frac{dz}{k(z)}\, d\xi \in L^1(G)$, where

$$\mathcal{K} = \{v \in H^1(G) : v = \kappa_D \text{ on } \partial G,\ v \geq 0 \text{ in } G\}. \tag{6}$$

Definition 1. *A solution of* (5) *is a function $u^\varepsilon - \kappa_D \in L^2(0, T; V)$, such that $\partial_t b(u^\varepsilon) \in L^2(0, T; L^r(G^\varepsilon))$, with $r \geq 6/5$, $\sqrt{k(u^\varepsilon)}\nabla\partial_t u^\varepsilon \in L^2(G^\varepsilon_T)$, and $u^\varepsilon(t) \in \mathcal{K}^\varepsilon$, and u^ε satisfies variational inequality* (5) *for $v \in L^2(0, T; \mathcal{K}^\varepsilon)$, and initial condition $u^\varepsilon(t) \to u_0$ in $L^2(G^\varepsilon)$ as $t \to 0$.*

3. A priori estimates and existence result

Similar to [19], in order to prove the existence result for variational inequality (5), we first consider a regularisation of functions b, k, and P_c, given by $b_\delta(v) = b(v^+ + \delta)$ and $b_\delta(v) = b(v)$ if $b(v) = \vartheta_b v$ for $\vartheta_b > 0$, $k_\delta(v) = k(v^+ + \delta)$, and $P_{c,\delta}(v) = P_c(v^+ + \delta)$, where $\delta > 0$ and $v^+ = \sup\{v, 0\}$.

Then the corresponding regularised problem reads

$$\begin{aligned}\langle \partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta), v - u^\varepsilon_\delta\rangle_{G^\varepsilon_T} + \langle A^\varepsilon(x)k_\delta(u^\varepsilon_\delta)[P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)\nabla u^\varepsilon_\delta + \partial_t \nabla u^\varepsilon_\delta], \nabla(v - u^\varepsilon_\delta)\rangle_{G^\varepsilon_T} \\ -\langle F^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon_\delta), \nabla(v - u^\varepsilon_\delta)\rangle_{G^\varepsilon_T} + \langle \varepsilon f^\varepsilon(t, x, u^\varepsilon_\delta), v - u^\varepsilon_\delta\rangle_{\Gamma^\varepsilon_T} \geq 0,\end{aligned} \tag{7}$$

and $u^\varepsilon_\delta(t) \in \mathcal{K}^\varepsilon$, for $v \in L^2(0,T;\mathcal{K}^\varepsilon)$.

To show the existence of a solution of problem (7) we apply the penalty method and consider

$$\begin{aligned}
&\partial_t b_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu}) - \nabla\cdot\big(A^\varepsilon(x)k_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})[P_{c,\delta}(u^\varepsilon_{\delta,\mu})\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu} + \partial_t\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}]\big)\\
&\qquad\qquad +\nabla\cdot F^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}) + \frac{1}{\mu}\mathcal{B}(u^\varepsilon_{\delta,\mu}-\kappa_D) = 0 \quad \text{in } G^\varepsilon_T,\\
&\big(A^\varepsilon(x)k(u^\varepsilon_{\delta,\mu})[P_{c,\delta}(u^\varepsilon_{\delta,\mu})\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu} + \partial_t\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}] - F^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu})\big)\cdot\nu\\
&\qquad\qquad = -\varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}) \quad \text{on } \Gamma^\varepsilon_T,
\end{aligned} \tag{8}$$

where $\mu > 0$ and a penalty operator $\mathcal{B} : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V')$ is monotone, bounded, hemicontinuous, and $\mathcal{B}(v-\kappa_D) = 0$ for $v(t) \in \mathcal{K}^\varepsilon$. Then performing calculations in the same way as in [6,19,25], by using the Galerkin method and a priori estimates similar to those in (9), we obtain the existence of a unique weak solution $u^\varepsilon_\delta - \kappa_D \in H^1(0,T;V)$, with $u^\varepsilon_\delta(t) \in \mathcal{K}^\varepsilon$, of regularised problem (7), for every fixed $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$. Notice that in (7) we have $0 < \vartheta_k\delta^\beta \le k_\delta(\xi) \le k_1 < \infty$, $0 \le P_{c,\delta}(\xi) \le p_c(\delta) < \infty$, and $b'_\delta(\xi) \ge \vartheta_b\delta^{\alpha-1} > 0$. In the derivation of a priori estimates for (8) we use that $\mathcal{B}(u_0 - \kappa_D) = 0$ and

$$\int_0^T \langle \mathcal{B}(u^\varepsilon_{\delta,\mu} - \kappa_D), \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{V',V}dt \ge 0,$$

where $\langle\phi,\psi\rangle_{V',V}$ denotes the dual product between $\phi \in V'$ and $\psi \in V$. Assumptions on b and estimates for $u^\varepsilon_{\delta,\mu}$ in $H^1(0,T;H^1(G^\varepsilon))$ ensure the boundedness of $\partial_t b_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})$ in $L^2(G^\varepsilon_T)$.

Lemma 1. *Under Assumption 1 and if $\beta \ge \lambda > 4+\alpha$ for $n = 3$ and $\beta \ge \lambda > 3+\alpha$ for $n = 1,2$, solutions of variational inequality (7) are non-negative and satisfy the following a priori estimates*

$$\begin{aligned}
&\|(u^\varepsilon_\delta + \delta)^{1+\alpha-\beta}\|_{L^\infty(0,T;L^1(G^\varepsilon))} + \|\sqrt{P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)}\nabla u^\varepsilon_\delta\|_{L^2((0,T)\times G^\varepsilon)} \le C,\\
&\|\nabla u^\varepsilon_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(G^\varepsilon))} + \|b_\delta(u^\varepsilon_\delta)\|_{L^\infty(0,T;L^2(G^\varepsilon))} \le C,\\
&\|\sqrt{k_\delta(u^\varepsilon_\delta)}\partial_t\nabla u^\varepsilon_\delta\|_{L^2((0,T)\times G^\varepsilon)} + \|\sqrt{b'_\delta(u^\varepsilon_\delta)}\partial_t u^\varepsilon_\delta\|_{L^2((0,T)\times G^\varepsilon)} \le C,\\
&\|\partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta)\|_{L^2(0,T;L^r(G^\varepsilon))} + \|\nabla\partial_t u^\varepsilon_\delta\|_{L^p((0,T)\times G^\varepsilon)} \le C,
\end{aligned} \tag{9}$$

for $1 < p < 2$ defined in (18), $r = 6/5$ for $n = 3$ and $1 < r < 4/3$ for $n = 1,2$, and the constant $C > 0$ is independent of ε and δ.

Proof. To show that solutions of (7) are non-negative we consider $v^\varepsilon_\delta = u^\varepsilon_\delta - \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)$ as a test function in (7), where $u^- = \min\{u, 0\}$ and

$$\widetilde{h}(w) = \int_0^w \frac{1}{k_\delta(\xi)}d\xi.$$

Notice that $v^\varepsilon_\delta(t,x) = \kappa_D \geq 0$ on ∂G and $v^\varepsilon_\delta(t,x) \geq 0$ on Γ^ε for $t \in (0,T)$. The definition of $\widetilde{h}$ implies that $\widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-) = 0$ if $u^\varepsilon_\delta \geq 0$ and $\widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-) < 0$ for $u^\varepsilon_\delta < 0$, we have that $\widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-) = k_\delta(\delta)^{-1}(u^\varepsilon_\delta)^-$. Then we obtain

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta), \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)\rangle_{G^\varepsilon_T} + \langle A^\varepsilon(x)(P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)\nabla u^\varepsilon_\delta + \partial_t \nabla u^\varepsilon_\delta), \nabla (u^\varepsilon_\delta)^-\rangle_{G^\varepsilon_T} \\ &\quad -\langle F^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), \nabla \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)\rangle_{G^\varepsilon_T} + \varepsilon\langle f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)\rangle_{\Gamma^\varepsilon_T} \leq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Using the definition of $\widetilde{h}$ and properties of f^ε, for the boundary term we have

$$\langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)\rangle_{\Gamma^\varepsilon_T} = \langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)\chi_{u^\varepsilon_\delta \leq 0}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_T} \geq 0.$$

Assumptions on F^ε and the boundary conditions on ∂G^ε imply

$$\begin{aligned} \langle F^\varepsilon(u^\varepsilon_\delta, t, x), \nabla \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)\rangle_{G^\varepsilon_T} &= \langle g, \nabla (u^\varepsilon_\delta)^-\rangle_{G^\varepsilon_T} \\ &+ \int_0^T \int_{G^\varepsilon} \nabla\cdot\ \widetilde{H}^\varepsilon_\delta(t,x,(u^\varepsilon_\delta)^-) dx dt = 0, \end{aligned}$$

where $\widetilde{H}^\varepsilon_\delta(t,x,v) = Q^\varepsilon(t,x)\int_0^v H(\xi)/k_\delta(\xi)\, d\xi$. Assumptions on b, the definition of $\widetilde{h}$, and the non-negativity of initial data ensure

$$\begin{aligned} \langle \partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta), \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)\rangle_{G^\varepsilon_T} &= \langle \partial_t b_\delta((u^\varepsilon_\delta)^-), \widetilde{h}((u^\varepsilon_\delta)^-)\rangle_{G^\varepsilon_T} \\ &= \int_{G^\varepsilon}\int_0^{(u^\varepsilon_\delta(T))^-} b'_\delta(\xi)\int_0^\xi \frac{d\eta}{k_\delta(\eta)} d\xi dx \geq 0. \end{aligned}$$

Then the non-negativity of initial conditions, i.e. $u_0(x) \geq 0$ in G, and assumptions on A yield

$$\sup_{(0,T)} \|\nabla (u^\varepsilon_\delta)^-\|_{L^2(G^\varepsilon)} = 0,$$

and using the non-negativity of u^ε_δ on $(0,T)\times\partial G^\varepsilon$ we conclude $u^\varepsilon_\delta(t,x) \geq 0$ a.e. in $(0,T)\times G^\varepsilon$.

To derive a priori estimates in (9), we first consider $v^\varepsilon_\delta = u^\varepsilon_\delta - h_\delta(u^\varepsilon_\delta)$ as a test function in (7), where

$$h_\delta(v) = \theta\int_{\kappa_D}^v \frac{1}{k_\delta(\xi)} d\xi \quad \text{and} \quad \theta = \min_{z\geq\kappa_D} k(z) > 0,$$

and obtain

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta), h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\rangle_{G^\varepsilon_s} + \theta\langle A^\varepsilon(x)(P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)\nabla u^\varepsilon_\delta + \partial_t\nabla u^\varepsilon_\delta), \nabla u^\varepsilon_\delta\rangle_{G^\varepsilon_s} \\ &\quad -\langle F^\varepsilon_\delta(t,x,u^\varepsilon_\delta), \nabla h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\rangle_{G^\varepsilon_s} + \langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\rangle_{\Gamma^\varepsilon_s} \leq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

for $s \in (0,T]$. Notice that $h_\delta(v) < 0$ for $v < \kappa_D$, $h_\delta(\kappa_D) = 0$, and $0 < h_\delta(v) \leq v$ for $v > \kappa_D$. Using those results we obtain that $v^\varepsilon_\delta(t) \in \mathcal{K}^\varepsilon$ for

$u^\varepsilon_\delta(t) \in \mathcal{K}^\varepsilon$, since $v^\varepsilon_\delta(t) \geq 0$ on Γ^ε if $u^\varepsilon_\delta(t) \geq 0$ on Γ^ε and $v^\varepsilon_\delta(t) = \kappa_D$ on ∂G if $u^\varepsilon_\delta(t) = \kappa_D$ on ∂G.

We shall estimate each term in (11) separately. The boundary integral can be written as

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\rangle_{\Gamma^\varepsilon_s} &= \langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\chi_{u^\varepsilon_\delta<\kappa_D}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_s} \\ &+\langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\chi_{u^\varepsilon_\delta\geq\kappa_D}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_s}.\end{aligned}$$

Then assumptions on f^ε imply

$$\begin{aligned}&\langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\chi_{u^\varepsilon_\delta\geq\kappa_D}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_s} \geq 0, \\ &\big|\langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\chi_{u^\varepsilon_\delta<\kappa_D}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_s}\big| \leq C,\end{aligned}$$

where the constant C is independent of δ and ε. To estimates the third term in (11) we consider the properties of Q^ε and H and obtain

$$\langle F^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_\delta), \nabla h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\rangle_{G^\varepsilon_s} = \langle g, \nabla u^\varepsilon_\delta\rangle_{G^\varepsilon_s} + \int_0^s\int_{G^\varepsilon} \nabla\cdot \mathcal{H}^\varepsilon_\delta(t,x,u^\varepsilon_\delta)dxdt,$$

where $\mathcal{H}^\varepsilon_\delta(t,x,v) = \theta\, Q^\varepsilon(t,x)\int_{\kappa_D}^v H(\xi)/k_\delta(\xi)\, d\xi$. Using $Q^\varepsilon(t,x)\cdot\nu = 0$ on Γ^ε and $\mathcal{H}^\varepsilon_\delta(t,x,\kappa_D) = 0$ yields

$$\int_0^s\int_{G^\varepsilon} \nabla\cdot \mathcal{H}^\varepsilon_\delta(t,x,u^\varepsilon_\delta)dxdt = \int_0^s\int_{\partial G^\varepsilon} \mathcal{H}^\varepsilon_\delta(t,x,u^\varepsilon_\delta)\cdot\nu\, d\gamma_x dt = 0.$$

The first term in (11) can be write as

$$\begin{aligned}&\langle \partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta), h_\delta(u^\varepsilon_\delta)\rangle_{G^\varepsilon_s} = \int_{G^\varepsilon_s}\partial_t\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta} b'_\delta(\xi)h_\delta(\xi)\, d\xi dxdt \\ &= \int_{G^\varepsilon}\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta(s)} b'_\delta(\xi)h_\delta(\xi)\, d\xi dx - \int_{G^\varepsilon}\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta(0)} b'_\delta(\xi)h_\delta(\xi)\, d\xi dx.\end{aligned}$$

The definition of h_δ and properties of function b ensure that for $u^\varepsilon_\delta \leq \kappa_D$

$$\begin{aligned}\int_{G^\varepsilon}\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta(s)} b'_\delta(\xi)h_\delta(\xi)\, d\xi dx &= \int_{G^\varepsilon}\int_{u^\varepsilon_\delta(s)}^{\kappa_D} b'_\delta(\xi)\int_\xi^{\kappa_D}\frac{d\eta}{k_\delta(\eta)}\, d\xi dx \\ &\geq C_1\int_{G^\varepsilon}|u^\varepsilon_\delta+\delta|^{(1+\alpha-\beta)}dx - C_2\end{aligned}$$

for $s\in(0,T]$, where the constants C_1 and C_2 are independent of δ and ε. For $u^\varepsilon_\delta > \kappa_D$, the monotonicity of b ensures

$$\int_{G^\varepsilon}\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta(s)} b'_\delta(\xi)h_\delta(\xi)\, d\xi dx = \theta\int_{G^\varepsilon}\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta(s)} b'_\delta(\xi)\int_{\kappa_D}^{\xi}\frac{1}{k_\delta(\eta)}d\eta\, d\xi\, dx \geq 0$$

for $s \in (0,T]$. Then integrating by parts and using assumptions on the initial condition yield

$$\int_{G^\varepsilon}\left[\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta(s)} b'_\delta(\xi)h_\delta(\xi)d\xi\,\chi_{u^\varepsilon_\delta\leq\kappa_D} + b_\delta(u^\varepsilon_\delta(s))h_\delta(u^\varepsilon_\delta(s))\chi_{u^\varepsilon_\delta\geq\kappa_D}\right]dx$$
$$+\int_{G^\varepsilon}|\nabla u^\varepsilon_\delta(s)|^2dx + \int_{G^\varepsilon_s} P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)|\nabla u^\varepsilon_\delta|^2dxdt \qquad (12)$$
$$\leq C_1 + C_2\int_{G^\varepsilon}\int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_\delta(0)} b'_\delta(\xi)h_\delta(\xi)\,d\xi dx + C_3\int_{G^\varepsilon}|\nabla u^\varepsilon_\delta(0)|^2dx$$

for $s \in (0,T]$, where the constants C_j, with $j = 1,2,3$, are independent of ε and δ. Hence, using assumptions on u_0, we obtain

$$\sup_{(0,T)}\int_{G^\varepsilon}|u^\varepsilon_\delta+\delta|^{1+\alpha-\beta}\chi_{u^\varepsilon_\delta\leq\kappa_D}dx + \sup_{(0,T)}\int_{G^\varepsilon}|\nabla u^\varepsilon_\delta|^2dx$$
$$+\int_0^T\int_{G^\varepsilon}P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)|\nabla u^\varepsilon_\delta|^2dxdt \leq C, \qquad (13)$$

with a constant positive C independent of ε and δ.

To derive an estimate for $\sqrt{k_\delta(u^\varepsilon_\delta)}\partial_t\nabla u^\varepsilon_\delta$ we need to use the equation with the penalty operator (8). Testing (8) by $v^\varepsilon = \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}$ yields

$$\langle A^\varepsilon(x)k_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})[P_{c,\delta}(u^\varepsilon_{\delta,\mu})\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu} + \partial_t\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}], \partial_t\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{G^\varepsilon_\tau}$$
$$+\langle\partial_t b_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{G^\varepsilon_\tau} - \langle F^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \nabla\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{G^\varepsilon_\tau} \qquad (14)$$
$$+\langle\varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_\tau} + \frac{1}{\mu}\langle\mathcal{B}(u^\varepsilon_{\delta,\mu}-\kappa_D), \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{V',V_\tau} = 0,$$

for $\tau \in (0,T]$, where the penalty operator is given by $\mathcal{B} = J(I - P_{\mathcal{K}^\varepsilon})$, with $P_{\mathcal{K}^\varepsilon} : V \to \mathcal{K}^\varepsilon - \kappa_D$ being the projection operator on $\mathcal{K}^\varepsilon - \kappa_D$ and $J : V \to V'$ a dual mapping, which can be chosen as

$$\langle J(u), v\rangle_{V',V} = \int_{G^\varepsilon}\big(u\,v + \nabla u\nabla v\big)dx.$$

Using the following property of the projection operator

$$\langle J(u - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}u), P_{\mathcal{K}^\varepsilon}u - v\rangle_{V',V} \geq 0 \text{ for } v \in \mathcal{K}^\varepsilon - \kappa_D,$$

for the difference quotient of $P_{\mathcal{K}^\varepsilon}u$ with respect to the time variable we obtain

$$0 \leq \frac{1}{h}\langle J(u - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}u), P_{\mathcal{K}}u - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}u(\cdot - h)\rangle_{V',V}.$$

Then, the last inequality, together with the regularity $\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu} \in L^2(0,T;V)$ and the fact that $u_0, \kappa_D \in \mathcal{K}^\varepsilon$, yields

$$\int_0^\tau \langle \mathcal{B}(\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu}), \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{V',V} dt = \lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^N \big\langle \mathcal{B}(\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu}(t_j)), u^\varepsilon_{\delta,\mu}(t_j) - u^\varepsilon_{\delta,\mu}(t_{j-1})\big\rangle_{V',V}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^N \Big[\Big\langle J(\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu} - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu})(t_j), (\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu} - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu})\Big|_{t_{j-1}}^{t_i}\Big\rangle_{V',V}$$

$$+ \big\langle J(\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu} - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu})(t_j), P_{\mathcal{K}^\varepsilon}\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu}(t_j) - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu}(t_{j-1})\big\rangle_{V',V}\Big] dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_{G^\varepsilon} \Big[|(\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu} - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu})(\tau)|^2 + |\nabla(\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu} - P_{\mathcal{K}^\varepsilon}\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu})(\tau)|^2\Big] dx \geq 0,$$

where $\widetilde{u}^\varepsilon_{\delta,\mu} = u^\varepsilon_{\delta,\mu} - \kappa_D$ and $t_j = jh$ for $j = 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$, with $t_N = Nh = \tau$. Using assumptions on k and P_c and applying Hölder's inequality yield

$$\langle A^\varepsilon(x) k_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu}) P_{c,\delta}(u^\varepsilon_{\delta,\mu}) \nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}, \partial_t \nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{G^\varepsilon_\tau} \leq \sigma \|\sqrt{k_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})}\partial_t \nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}\|_{L^2(G^\varepsilon_\tau)}$$
$$+ C_\sigma \|k_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu}) P_{c,\delta}(u^\varepsilon_{\delta,\mu})\|_{L^\infty(G^\varepsilon_\tau)} \|\sqrt{P_{c,\delta}(u^\varepsilon_{\delta,\mu})}\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}\|_{L^2(G^\varepsilon_\tau)}$$

for some $0 < \sigma \leq a_0/8$. The boundary term can be written as

$$\langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_\tau} = \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon_\tau} \partial_t \int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_{\delta,\mu}} f^\varepsilon(t,x,\xi)\, d\xi d\gamma dt$$
$$-\varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon_\tau} \int_{\kappa_D}^{u^\varepsilon_{\delta,\mu}} \partial_t f^\varepsilon(t,x,\xi)\, d\xi d\gamma dt.$$

Then assumptions on f^ε imply

$$\big|\langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_\tau}\big| \leq \sigma\varepsilon\Big[\int_{\Gamma^\varepsilon} |u^\varepsilon_{\delta,\mu}(\tau)|^2 d\gamma + \int_{\Gamma^\varepsilon_\tau} |u^\varepsilon_{\delta,\mu}|^2 d\gamma dt\Big] + C_\sigma,$$

with some C independent of μ, ε and δ. Then the trace estimate

$$\varepsilon\|v\|^2_{L^2(\Gamma^\varepsilon)} \leq C\big[\|v\|^2_{L^2(G^\varepsilon)} + \varepsilon^2\|\nabla v\|^2_{L^2(G^\varepsilon)}\big],$$

which follows from the definition of G^ε and Γ^ε, the standard trace estimate for $v \in H^1(Y^*)$, and a scaling argument, combined with the properties of an extension of $u^\varepsilon_{\delta,\mu}$ from G^ε into G, see Lemma 2, and the Dirichlet boundary condition on ∂G, ensures

$$\big|\langle \varepsilon f^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{\Gamma^\varepsilon_\tau}\big| \leq \sigma_1\big[\|\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}(\tau)\|^2_{L^2(G^\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}\|^2_{L^2(G^\varepsilon_\tau)}\big] + C,$$

with $0 < \sigma_1 \le a_0/8$. The assumptions on F^ε and k and the fact that $\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}(t,x) = 0$ on $(0,T)\times\partial G$ yield

$$\langle F^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \nabla\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{G^\varepsilon_\tau} = \langle g\, k_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \nabla\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{G^\varepsilon_\tau}$$
$$- \langle Q^\varepsilon(t,x)H'(u^\varepsilon_{\delta,\mu})(b'_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu}))^{-\frac{1}{2}}\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}, \sqrt{b'_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})}\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{G^\varepsilon_\tau}$$

and, applying Hölder inequality,

$$|\langle F^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon_{\delta,\mu}), \nabla\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\rangle_{G^\varepsilon_\tau}| \le \sigma_1\|\sqrt{k_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})}\nabla\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\|^2_{L^2(G^\varepsilon_\tau)}$$
$$+ \sigma_2\|\sqrt{b'_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})}\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\|^2_{L^2(G^\varepsilon_\tau)} + C_1\|\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}\|^2_{L^2(G^\varepsilon_T)} + C_2,$$

for $0<\sigma_1\le a_0/8$, $0<\sigma_2\le 1/4$ and C_1, C_2 are independent of μ, ε, and δ.

Then, using the estimate for $\nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}$ in $L^\infty(0,T;L^2(G^\varepsilon))$, which can be derived in a similar way as the corresponding estimate for $\nabla u^\varepsilon_\delta$ in (13), we obtain

$$\|\sqrt{b'_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})}\partial_t u^\varepsilon_{\delta,\mu}\|_{L^2(G^\varepsilon_\tau)} + \|\sqrt{k_\delta(u^\varepsilon_{\delta,\mu})}\partial_t \nabla u^\varepsilon_{\delta,\mu}\|_{L^2(G^\varepsilon_\tau)} \le C,$$

for any $\tau\in(0,T]$ and a constant C independent of μ, ε and δ. Considering $\mu\to 0$ and using continuity and strict positivity of k_δ and b'_δ, together with lower-semicontinuity of a norm, we obtain the third estimate in (9).

If b is Lipschitz continuous we also have

$$\|\partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta)\|^2_{L^2(G^\varepsilon_T)} \le \sup_{(t,x)\in G^\varepsilon_T}|b'_\delta(u^\varepsilon_\delta)|\,\|\sqrt{b'_\delta(u^\varepsilon_\delta)}\partial_t u^\varepsilon_\delta\|^2_{L^2(G^\varepsilon_T)} \le C.$$

Otherwise, we can consider

$$\|\partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta)\|_{L^2(0,T;L^r(G^\varepsilon))} = \|b'_\delta(u^\varepsilon_\delta)\partial_t u^\varepsilon_\delta\|_{L^2(0,T;L^r(G^\varepsilon))}$$
$$\le \sup_{(0,T)}\|\sqrt{b'_\delta(u^\varepsilon_\delta)}\|^{\frac{2-r}{r}}_{L^{\frac{2r}{2-r}}(G^\varepsilon)}\|\sqrt{b'_\delta(u^\varepsilon_\delta)}\partial_t u^\varepsilon_\delta\|^2_{L^2(G^\varepsilon_T)},$$

for some $1<r<2$. Then the first estimate in (9) for $0\le u^\varepsilon_\delta(t,x)\le 1$ and assumptions on b' for $u^\varepsilon_\delta(t,x)\ge 1$, combined with the uniform boundedness of $\|u^\varepsilon_\delta\|_{L^\infty(0,T;H^1(G^\varepsilon))}$, ensure

$$\sup_{(0,T)}\|\sqrt{b'_\delta(u^\varepsilon_\delta)}\|^{\frac{2-r}{r}}_{L^{\frac{2r}{2-r}}(G^\varepsilon)} \le C,$$

where $r=6/5$ for $n=3$ and $1<r<4/3$ for $n=1,2$.

From assumptions on b and the estimate for u^ε_δ in $L^\infty(0,T;H^1(G^\varepsilon))$, we also obtain the boundedness of $b_\delta(u^\varepsilon_\delta)$ in $L^\infty(0,T;L^2(G^\varepsilon))$, uniformly in ε and δ.

To derive the estimate for $\nabla\partial_t u^\varepsilon_\delta$ in $L^p((0,T)\times G^\varepsilon)$, with some $p>1$, we follow the same ideas as in [19]. Using assumptions on P_c and $u^\varepsilon_\delta \geq 0$ we can rewrite the term $\sqrt{P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)}\nabla u^\varepsilon_\delta$ as

$$\nabla \int_0^{u^\varepsilon_\delta} \sqrt{P_{c,\delta}(\xi)}d\xi,$$

where

$$\int_0^{u^\varepsilon_\delta} \sqrt{P_{c,\delta}(\xi)}d\xi = C_1\left[(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{1-\lambda/2} - \delta^{1-\lambda/2}\right] + C_2,$$

with some constants C_1 and C_2 independent of ε and δ. Then the estimate for $P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)|\nabla u^\varepsilon_\delta|^2$, together with the Dirichlet boundary condition on ∂G, implies that $(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{1-\lambda/2} \in L^2(0,T;H^1(G^\varepsilon))$. Considering an extension $\overline{(u^\varepsilon_\delta+\delta)}^{1-\frac{\lambda}{2}}$ of $(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{1-\frac{\lambda}{2}}$ from G^ε into G, see Lemma 2 applied to $v^\varepsilon = (u^\varepsilon_\delta+\delta)^{1-\frac{\lambda}{2}}$, we obtain

$$\begin{aligned}
\|\nabla\overline{(u^\varepsilon_\delta+\delta)}^{1-\lambda/2}\|_{L^2((0,T)\times G)} &\leq C_1\|\nabla(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{1-\lambda/2}\|_{L^2((0,T)\times G^\varepsilon)} \leq C_2,\\
\|(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{1-\lambda/2}\|_{L^2((0,T)\times G^\varepsilon)} &\leq \|\overline{(u^\varepsilon_\delta+\delta)}^{1-\lambda/2}\|_{L^2((0,T)\times G)}\\
&\leq C_3\|\nabla\overline{(u^\varepsilon_\delta+\delta)}^{1-\lambda/2}\|_{L^2((0,T)\times G)} + C_4 \leq C_5,
\end{aligned}$$

where the constants C_j, with $j=1,\dots,5$, are independent of δ and ε. Notice that the extension $\overline{(u^\varepsilon_\delta+\delta)}^{1-\lambda/2}$ satisfies the same Dirichlet boundary condition as the original function $(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{1-\lambda/2}$. Then the Sobolev embedding theorem ensures

$$\begin{aligned}
&\|\overline{(u^\varepsilon_\delta+\delta)}^{1-\lambda/2}\|_{L^2(0,T;C(\overline{G}))} \leq C, && \text{for } n=1,\\
&\|\overline{(u^\varepsilon_\delta+\delta)}^{1-\lambda/2}\|_{L^2(0,T;L^r(G))} \leq C, && \text{for } n=2, \quad r\in(1,+\infty),\\
&\|\overline{(u^\varepsilon_\delta+\delta)}^{1-\lambda/2}\|_{L^2(0,T;L^q(G))} \leq C, && \text{for } n\geq 3, \quad q=2n/(n-2),
\end{aligned} \tag{15}$$

with a constant $C>0$ independent of ε and δ.

For θ and θ_1 such that $(1-\lambda/2)\theta + (1+\alpha-\beta)\theta_1 = -\gamma\beta$, where β is as in the assumption on k and $\gamma>1$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_{G^\varepsilon}(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{-\gamma\beta}dx = \int_{G^\varepsilon}(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{(1-\lambda/2)\theta}(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{(1+\alpha-\beta)\theta_1}dx\\
&\leq \Big(\int_{G^\varepsilon}(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{(1-\lambda/2)p}dx\Big)^{\theta/p}\Big(\int_{G^\varepsilon}(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{(1+\alpha-\beta)\theta_1 p_1}dx\Big)^{1/p_1}\\
&\leq \Big(\int_{G}(\overline{u^\varepsilon_\delta+\delta})^{(1-\lambda/2)p}dx\Big)^{\theta/p}\Big(\int_{G^\varepsilon}(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{(1+\alpha-\beta)\theta_1 p_1}dx\Big)^{1/p_1}.
\end{aligned} \tag{16}$$

For $n=3$ we have $p=6$ and $p_1 = 6/(6-\theta)$. Then the estimate for $(u^\varepsilon_\delta+\delta)^{(1+\alpha-\beta)}$ in $L^1((0,T)\times G^\varepsilon)$ yields $\theta_1 = 1-\theta/6$ and the integrability of $\overline{(u_\delta^\varepsilon+\delta)}^{1-\lambda/2}$ with respect to the time variable implies $\theta = 2$. Hence $-\gamma\beta = 2-\lambda+\frac{2}{3}(1+\alpha-\beta)$ and in order to ensure that $\gamma > 1$ we require

$$-\frac{1}{\beta}\left(\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\alpha-\lambda-\frac{2}{3}\beta\right) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{8}{3}+\frac{2}{3}\alpha+\frac{\beta}{3} < \lambda.$$

If $n=2$ the Hölder exponents in (16) are $p = r/\theta$ and $1/p_1 = 1-\theta/r$, for any $r \geq 2$. Thus we obtain $\theta = 2$, $\theta_1 = 1-2/r$ and

$$-\gamma\beta = (2-\lambda)+(1+\alpha-\beta)(1-2/r).$$

For $n=1$ the estimate $\|\overline{(u_\delta^\varepsilon+\delta)}^{1-\lambda/2}\|_{L^2(0,T;C(\overline{G}))} \leq C$ ensures

$$-\gamma\beta = (2-\lambda)+(1+\alpha-\beta) = 3+\alpha-\lambda-\beta,$$

and for $\gamma > 1$ we require that $\beta \geq \lambda > 3+\alpha$.
Then, using (15) and (16), we obtain the following estimate

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{G^\varepsilon} |\nabla\partial_t u_\delta^\varepsilon|^p dxdt = \int_0^T\int_{G^\varepsilon} |k_\delta(u_\delta^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\nabla\partial_t u_\delta^\varepsilon|^p k_\delta(u_\delta^\varepsilon)^{-\frac{p}{2}} dxdt \\
&\leq \Big(\int_0^T\int_{G^\varepsilon} k_\delta(u_\delta^\varepsilon)|\nabla\partial_t u_\delta^\varepsilon|^2 dxdt\Big)^{\frac{p}{2}} \Big(\int_0^T\int_{G^\varepsilon} k_\delta(u_\delta^\varepsilon)^{-\frac{p}{2-p}} dxdt\Big)^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leq C_1 \Big(\int_0^T\int_{G^\varepsilon} k_\delta(u_\delta^\varepsilon)^{-\frac{p}{2-p}} dxdt\Big)^{1-\frac{p}{2}}
\end{aligned} \tag{17}$$

for some $1 < p < 2$. Assumptions on k and conditions on α, β and λ, specified in the formulation of the lemma, ensure that there exists such $p = p(\beta,\lambda,\alpha,n) > 1$ that

$$\|k_\delta(u_\delta^\varepsilon)^{-p/(2-p)}\|_{L^1((0,T)\times G^\varepsilon)} \leq C_2,$$

where C_2 is independent of ε and δ and the exponent p is defined as

$$\begin{aligned}
&p = \frac{2(3\lambda+2\beta-2\alpha-8)}{3\lambda+5\beta-2\alpha-8} && \text{for } n=3, \\
& && \text{with } \beta \geq \lambda > 4+\alpha, \\
&p = \frac{2[2(1+\alpha-\beta)+r(\lambda+\beta-3-\alpha)]}{2(1+\alpha-\beta)+r(\lambda+2\beta-3-\alpha)} && \text{for } n=2, \text{ any } r \geq 2, \\
& && \text{and } \beta \geq \lambda > 3+\alpha, \\
&p = \frac{2[\lambda+\beta-3-\alpha]}{2\beta+\lambda-3-\alpha} \qquad \text{for } n=1, && \text{with } \beta \geq \lambda > 3+\alpha.
\end{aligned} \tag{18}$$

This implies the last estimate in (9). ■

To ensure that in the derivation of a priori estimates the embedding and Poincaré constants are independent of ε, we considered an extension of u_δ^ε and of $(u_\delta^\varepsilon+\delta)^{1-\lambda/2}$ from G^ε to G with the following properties:

Lemma 2. *There exists an extension $\overline{v}^\varepsilon$ of v^ε from $L^p(0,T;W^{1,p}(G^\varepsilon))$ into $L^p(0,T;W^{1,p}(G))$ such that*

$$\|\overline{v}^\varepsilon\|_{L^p(G_T)} \le C\|v^\varepsilon\|_{L^p(G^\varepsilon_T)}, \quad \|\nabla\overline{v}^\varepsilon\|_{L^p(G_T)} \le C\|\nabla v^\varepsilon\|_{L^p(G^\varepsilon_T)}, \tag{19}$$

where $1 \le p < \infty$ and the constant C is independent of ε.

Proof. The assumptions on the geometry of G^ε and a standard extension operator, see e.g. [1,8], ensure the existence of an extension of v^ε satisfying estimates (19). ■

A priori estimates (9) ensure the following convergence results for a subsequence of $\{u^\varepsilon_\delta\}$ as $\delta \to 0$:

Lemma 3. *Under assumptions in Lemma 1, there exists a function $u^\varepsilon \in L^2(0,T;H^1(G^\varepsilon))$, with $\partial_t u^\varepsilon \in L^p(0,T;W^{1,p}(G^\varepsilon))$, such that, up to a subsequence,*

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon_\delta \to u^\varepsilon, \qquad b_\delta(u^\varepsilon_\delta) \to b(u^\varepsilon) && \textit{strongly in } L^2((0,T)\times G^\varepsilon),\\ &k_\delta(u^\varepsilon_\delta) \to k(u^\varepsilon) && \textit{strongly in } L^q((0,T)\times G^\varepsilon),\\ &b_\delta(u^\varepsilon_\delta) \rightharpoonup b(u^\varepsilon) && \textit{weakly-}* \textit{ in } L^\infty(0,T;L^2(G^\varepsilon)),\\ &u^\varepsilon_\delta \rightharpoonup u^\varepsilon && \textit{weakly-}* \textit{ in } L^\infty(0,T;H^1(G^\varepsilon)), \end{aligned} \tag{20}$$

for any $1 < q < \infty$, and

$$\begin{aligned} &\partial_t b_\delta(u^\varepsilon_\delta) \rightharpoonup \partial_t b(u^\varepsilon) && \textit{weakly in } L^2(0,T;L^r(G^\varepsilon)),\\ &\partial_t u^\varepsilon_\delta \rightharpoonup \partial_t u^\varepsilon && \textit{weakly in } L^p(0,T;W^{1,p}(G^\varepsilon)),\\ &k_\delta(u^\varepsilon_\delta)\nabla\partial_t u^\varepsilon_\delta \rightharpoonup k(u^\varepsilon)\nabla\partial_t u^\varepsilon && \textit{weakly in } L^2((0,T)\times G^\varepsilon),\\ &k_\delta(u^\varepsilon_\delta)P_{c,\delta}(u^\varepsilon_\delta)\nabla u^\varepsilon_\delta \rightharpoonup k(u^\varepsilon)P_c(u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon && \textit{weakly in } L^2((0,T)\times G^\varepsilon), \end{aligned} \tag{21}$$

as $\delta \to 0$, where p is defined in (18), $r = 6/5$ for $n = 3$ and $1 < r < 4/3$ for $n = 1, 2$. Due to the lower semicontinuity of a norm we also have

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(G^\varepsilon))} + \|\sqrt{k(u^\varepsilon)}\partial_t\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(G^\varepsilon_T)} + \|\nabla\partial_t u^\varepsilon\|_{L^p(G^\varepsilon_T)}&\\ +\|b(u^\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^2(G^\varepsilon))} + \|\partial_t b(u^\varepsilon)\|_{L^2(0,T;L^r(G^\varepsilon))} \le C&, \end{aligned} \tag{22}$$

with a constant $C > 0$ independent of ε, and $u^\varepsilon(t,x) \ge 0$ in $(0,T)\times G^\varepsilon$.

Proof. A priori estimates in (9) and assumptions on functions b, k, and P_c stated in Assumption 1, together with Lions-Aubin compactness lemma [17], ensure convergences stated in (20) and (21). ■

Theorem 1. *Under assumptions in Lemma 1, there exists a nonnegative solution of microscopic variational inequality (5), for every fixed $\varepsilon > 0$.*

Proof. Using the convergence results in Lemma 3, together with the assumptions on k, P_c, b, H, f_0, and f_1 stated in Assumption 1, and taking $\delta \to 0$ in the regularised problem (7), we obtain that u^ε satisfies the variational inequality (5). The regularity of u^ε implies $u^\varepsilon \in C([0,T]; L^2(G^\varepsilon))$ and $u^\varepsilon(t) \to u_0$ in $L^2(G^\varepsilon)$. The weak convergence of u^ε_δ in $L^2(0,T; H^1(G^\varepsilon))$ and non-negativity of u^ε_δ in G^ε_T ensure that $u^\varepsilon(t,x) \geq 0$ in $(0,T) \times G^\varepsilon$ and also on $(0,T) \times \Gamma^\varepsilon$ and $u^\varepsilon(t,x) = \kappa_D$ on $(0,T) \times \partial G$. Hence $u^\varepsilon(t) \in \mathcal{K}^\varepsilon$ for $t \in [0,T]$. ∎

4. Derivation of macroscopic inequality

Using estimates (22) and compactness theorems for the two-scale convergence, see [2,20,21] or Appendix for more details, we obtain the following convergence results for a subsequence of the sequence $\{u^\varepsilon\}$ of solutions of microscopic problem (5), as $\varepsilon \to 0$.

Lemma 4. *Under assumptions in Lemma 1, there exist functions* $u \in L^2(0,T; H^1(G))$ *and* $w \in L^2(G_T; H^1_{\text{per}}(Y^*)/\mathbb{R})$, *with* $\partial_t u \in L^p(0,T; W^{1,p}(G))$ *and* $\partial_t w \in L^p(G_T; W^{1,p}_{\text{per}}(Y^*)/\mathbb{R})$, *such that, up to a subsequence,*

$$
\begin{aligned}
&u^\varepsilon \to u, \qquad b(u^\varepsilon) \to b(u) && \textit{strongly in } L^2((0,T)\times G),\\
&k(u^\varepsilon) \to k(u) && \textit{strongly in } L^q((0,T)\times G),\\
&b(u^\varepsilon) \rightharpoonup b(u) && \textit{weakly-}{*} \textit{ in } L^\infty(0,T; L^2(G)),\\
&\partial_t b(u^\varepsilon) \rightharpoonup \partial_t b(u) && \textit{weakly in } L^2(0,T; L^r(G)),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

for any $1 < q < \infty$, $r = 6/5$ *for* $n = 3$ *and* $1 < r < 4/3$ *for* $n = 1, 2$, *and* u^ε *is extended by zero into* $G \setminus G^\varepsilon$, *and*

$$
\begin{aligned}
&\nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla u + \nabla_y w && \textit{two-scale},\\
&\nabla \partial_t u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla \partial_t u + \nabla_y \partial_t w && \textit{two-scale},\\
&k(u^\varepsilon)\nabla \partial_t u^\varepsilon \rightharpoonup k(u)(\nabla \partial_t u + \nabla_y \partial_t w) && \textit{two-scale},\\
&k(u^\varepsilon)P_c(u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon \rightharpoonup k(u)P_c(u)(\nabla u + \nabla_y w) && \textit{two-scale},\\
&\varepsilon \|u^\varepsilon\|^2_{L^2((0,T)\times\Gamma^\varepsilon)} \to |Y|^{-1}\|u\|^2_{L^2((0,T)\times G\times\Gamma)},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

as $\varepsilon \to 0$, *where* p *is defined in* (18).

Proof. The estimate for $\nabla \partial_t u^\varepsilon$ in (22), combined with the Dirichlet boundary condition on ∂G and the Poincaré and Sobolev inequalities, ensures that $\partial_t u^\varepsilon$ and its extension $\partial_t \overline{u}^\varepsilon$, see Lemma 2, satisfy the following estimate

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_t u^\varepsilon\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(G^\varepsilon))} + \|\partial_t \overline{u}^\varepsilon\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(G))}\\
&\quad + \|\partial_t u^\varepsilon\|_{L^{q_1}((0,T)\times G^\varepsilon)} + \|\partial_t \overline{u}^\varepsilon\|_{L^{q_1}((0,T)\times G)} \leq C,
\end{aligned}
$$

for $1 < p < 2$ as in (18), $q_1 = np/(n-p)$ for $n \geq 2$ and $q_1 \geq 2$ for $n = 1$, and a constant $C > 0$ independent of ε. Then using Lions-Aubin compactness lemma [17] we obtain the strong convergence of u^ε in $L^2((0,T)\times G)$, extended by zero into $G\backslash G^\varepsilon$. Strong convergence of u^ε, continuity of k and b, boundedness of $k(u^\varepsilon)$ and estimates for $b(u^\varepsilon)$ in $L^\infty(0,T;L^2(G^\varepsilon))$ and for $\partial_t b(u^\varepsilon)$ in $L^2(0,T;L^r(G^\varepsilon))$ ensure the strong convergence of $\{k(u^\varepsilon)\}$ and $\{b(u^\varepsilon)\}$ and weak convergence of $\{\partial_t b(u^\varepsilon)\}$. A priori estimates (22), the strong convergence of u^ε, continuity and boundedness of $k(\xi)$ and $k(\xi)P_c(\xi)$ for $\xi \geq 0$, together with compactness theorems for the two-scale convergence, see e.g. [2, 20, 21], imply the first four convergence results in (24). The last convergence in (24) follows from the estimate

$$\varepsilon\|v\|^2_{L^2(\Gamma^\varepsilon)} \leq C\|v\|^2_{H^\sigma(G^\varepsilon)}, \qquad \sigma > 1/2,$$

with a constant $C > 0$ independent of ε, see [27] for the proof, and the compactness of the embedding $H^1(G) \subset H^\sigma(G)$ for $1/2 < \sigma < 1$. ■

Theorem 2. *Under assumptions in Lemma 1, a subsequence $\{u^\varepsilon\}$ of solutions of problem (5) convergences to a function $u \in \kappa_D + L^2(0,T;H^1_0(G))$, with $\partial_t u \in L^p(0,T;W^{1,p}(G))$, $\partial_t b(u) \in L^2(0,T;L^r(G))$, with $6/5 \leq r < 4/3$, and $u(t) \in \mathcal{K}$, satisfying macroscopic variational inequality*

$$\begin{aligned} \langle \partial_t b(u), v-u\rangle_{G_T} + \big\langle A_{\text{hom}} k(u)[P_c(u)\nabla u + \partial_t \nabla u], \nabla(v-u)\big\rangle_{G_T} \\ -\langle F_{\text{hom}}(t,x,u), \nabla(v-u)\rangle_{G_T} + \langle f_{\text{hom}}(t,u), v-u\rangle_{G_T} \geq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

for $v - \kappa_D \in L^2(0,T;H^1_0(G))$, with $v(t) \in \mathcal{K}$, where $\mathcal{K}$ is defined in (6),

$$F_{\text{hom}}(t,x,u) = \fint_{Y^*} Q(t,x,y)\,dy\,H(u) + k(u)g,$$
$$f_{\text{hom}}(t,u) = \fint_{Y^*} f_0(t,y)\,dy\,f_1(u),$$

and matrix A_{hom} is defined in (31).

Proof. To derive macroscopic inequality (25) we consider

$$v^\varepsilon(t,x) = u^\varepsilon(t,x) + \phi(t,x) + \sigma(\varepsilon)\varphi(t,x) + \varepsilon\psi(t,x,x/\varepsilon)$$

as a test function in (5), where $\psi \in C^1_0(G_T, C^1_{\text{per}}(Y))$, $\phi, \varphi \in H^1_0((0,T)\times G)$, with $\phi(t,x) + u(t,x) \geq 0$ and $\varphi(t,x) \geq 0$ in $(0,T)\times G$, and $\sigma(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. Notice that since $u^\varepsilon \to u$ strongly two-scale on $(0,T)\times\Gamma^\varepsilon$ as $\varepsilon \to 0$, there exist such functions φ and $\sigma(\varepsilon) > 0$ that $v^\varepsilon(t,x) \geq 0$ on $(0,T)\times\Gamma^\varepsilon$ for sufficiently small $\varepsilon > 0$. We also have that $v^\varepsilon(t,x) = \kappa_D$ on $(0,T)\times\partial G$. Then convergence results in (23) and (24) yield

$$\int_{G_T}\int_{Y^*} A(y)k(u)[\partial_t(\nabla u + \nabla_y w) + P_c(u)(\nabla u + \nabla_y w)][\nabla\phi + \nabla_y\psi]dydxdt$$

$$+|Y^*|\int_{G_T}\partial_t b(u)\phi\, dxdt - \int_{G_T}\int_{Y^*} F(t,x,y,u)(\nabla\phi + \nabla_y\psi)dydxdt \qquad (26)$$
$$+\int_{G_T}\int_\Gamma f(t,x,y,u)\,\phi\, d\gamma_y dxdt \geq 0.$$

Assumptions on F^ε, i.e. $\nabla\cdot Q^\varepsilon(t,x)=0$ in G_T^ε and $Q^\varepsilon(t,x)\cdot\nu = 0$ on Γ_T^ε, which implies that $\nabla_y \cdot Q(t,x,y)=0$ in $G_T\times Y^*$ and $Q(t,x,y)\cdot\nu=0$ on $G_T\times\Gamma$, Q is Y-periodic, and the fact that u is independent of y ensure

$$\int_{G_T}\int_{Y^*} F(t,x,y,u)\nabla_y\psi\, dydxdt = 0.$$

By choosing $\phi = 0$ and $\psi = 0$, respectively, we obtain

$$\int_{G_T}\int_{Y^*} A(y)k(u)\left[\partial_t(\nabla u + \nabla_y w) + P_c(u)(\nabla u + \nabla_y w)\right]\nabla_y\psi\, dydxdt \geq 0$$

and

$$\int_{G_T}\fint_{Y^*} A(y)k(u)\left[\partial_t(\nabla u + \nabla_y w) + P_c(u)(\nabla u + \nabla_y w)\right]\nabla\phi\, dydxdt$$
$$-\int_{G_T}\fint_{Y^*} F(t,x,y,u)dy\,\nabla\phi\, dydxdt + \int_{G_T}\partial_t b(u)\,\phi\, dxdt \qquad (27)$$
$$+\int_{G_T}\frac{1}{|Y^*|}\int_\Gamma f(t,y,u)\,\phi\, d\gamma_y\, dxdt \geq 0.$$

Considering $\pm\psi$ in the inequality for w yields

$$\int_{G_T}\int_{Y^*} A(y)k(u)\left[\partial_t(\nabla u + \nabla_y w) + P_c(u)(\nabla u + \nabla_y w)\right]\nabla_y\psi\, dydxdt = 0,$$

for all $\psi \in C_0^1(G_T; C^1_{\text{per}}(Y^*))$. For a give $u \in L^2(G_T)$, the last equation is a pseudoparabolic equation for w with respect to microscopic variables y:

$$\begin{aligned} \nabla_y\cdot\big(A(y)k(u)[\partial_t(\nabla u+\nabla_y w) + P_c(u)(\nabla u + \nabla_y w)]\big) &= 0 \quad \text{in } Y_T^*,\\ A(y)k(u)[\partial_t(\nabla u+\nabla_y w) + P_c(u)(\nabla u + \nabla_y w)]\cdot\nu &= 0 \quad \text{on } \Gamma_T, \qquad (28)\\ w \qquad Y-\text{periodic}&, \end{aligned}$$

for $x\in G$, where $Y_T^* = (0,T)\times Y^*$. Using a regularisation of k and P_c, in a similar way as for (5), we can show the existence of a solution of problem (28). Considering the equation for a difference of two solutions w_1 and w_2 of (28), taking $\psi = (w_1 - w_2)/k(u+\delta)$, with $\delta > 0$, as a test function, using assumptions on A, and letting $\delta \to 0$, yield

$$\|\nabla_y(w_1 - w_2)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times Y^*))} = 0.$$

Hence a solution of (28) is defined uniquely up to an additive function independent of y. The structure of (28) suggests that w is of the form

$$w(t,x,y) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} u(t,x)\,\omega^j(y) + \overline{w}(t,x), \tag{29}$$

where ω^j, for $j = 1, \dots, n$, satisfy the following unit cell problems

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}_y(A(y)(\nabla_y \omega^j + e_j)) = 0 && \text{in } Y^*, && \int_{Y^*} \omega^j(y) dy = 0, \\ &A(y)(\nabla_y \omega^j + e_j) \cdot \nu = 0 && \text{on } \Gamma, && \omega^j \;\; Y-\text{periodic}, \end{aligned} \tag{30}$$

where $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ is the standard basis of $\mathbb{R}^n$. Notice that the well-posedness of (30) follows directly from the assumptions on A in Assumption 1.
Substituting expression (29) for w into (27) determines the matrix $A_{\text{hom}} = (A_{\text{hom}}^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, with

$$A_{\text{hom}}^{ij} = \fint_{Y^*} A(y) \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \omega^j}{\partial y_i} \right) dy. \tag{31}$$

For any $\psi \in C_0(G_T, C_{\text{per}}(\Gamma))$, with $\psi(t,x,y) \geq 0$ in $(0,T) \times G \times \Gamma$, using the non-negativity and two-scale convergence of u^ε on Γ^ε, we obtain

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \langle u^\varepsilon(t,x), \psi(t,x,x/\varepsilon) \rangle_{\Gamma_T^\varepsilon} &= |Y|^{-1} \langle u(t,x), \psi(t,x,y) \rangle_{G_T \times \Gamma} \\ &= \langle u(t,x), \overline{\psi}(t,x) \rangle_{G_T}, \end{aligned}$$

where

$$\overline{\psi}(t,x) = \frac{1}{|Y|} \int_\Gamma \psi(t,x,y) d\gamma_y \geq 0 \quad \text{in } \; (0,T) \times G.$$

Hence $u(t,x) \geq 0$ in $(0,T) \times G$. The weak convergence in $L^2(0,T;H^1(G))$ of the extension $\overline{u}^\varepsilon$ of u^ε, given by Lemma 2, ensures that $u(t,x) = \kappa_D$ on $(0,T) \times \partial G$. Thus we have that $u(t) \in \mathcal{K}$.

Considering $\phi = v - u$, for any $v \in \kappa_D + L^2(0,T;H_0^1(G))$ with $v(t,x) \geq 0$ in $(0,T) \times G$, as a test function in (27) yields the macroscopic variational inequality (25). ■

Remark. Notice that if in pseudoparabolic and elliptic parts we have two different functions depending on microscopic variables y, i.e. $A(y)k(u)\nabla\partial_t u$ and $B(y)k(u)P_c(u)\nabla u$, with $A(y) \geq a_0 > 0$ and $B(y) \geq b_0 > 0$, we need to consider a modified form for function w, i.e.

$$\begin{aligned} w(t,x,y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j} \vartheta^j(y) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial s \partial x_j} \chi^j(t-s,x,y) ds \\ + \overline{w}(t,x), \end{aligned} \tag{32}$$

instead of (29), where ϑ^j and χ^j satisfy the following unit cell problems:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_y(B(y)(\nabla_y \vartheta^j + e_j)) = 0 && \text{in } Y^*, && \int_{Y^*} \vartheta^j(y)dy = 0, \\ &B(y)(\nabla_y \vartheta^j + e_j)\cdot \nu = 0 && \text{on } \Gamma, && \vartheta^j \quad Y-\text{periodic}, \end{aligned} \tag{33}$$

and

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_y\big(k(u(t+s))\left[A(y)\nabla_y\partial_t\chi^j + B(y)P_c(u(t+s))\nabla_y\chi^j\right]\big) = 0 \;\; \text{in } Y^*_{T-s}, \\ &k(u(t+s))[A(y)\nabla_y\partial_t\chi^j + B(y)P_c(u(t+s))\nabla_y\chi^j]\cdot\nu = 0 \qquad \text{on } \Gamma_{T-s}, \\ &\chi^j \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Y-\text{periodic}, \\ &\chi^j(0,x,y) = \omega^j(y) - \vartheta^j(y) \qquad\qquad\qquad \text{in } Y^*, \end{aligned} \tag{34}$$

for $s \in [0,T]$, $x \in G$, and $j = 1,\dots,n$, with ω^j satisfying (30).

The well-posedness of (30) and (33) follows from the strict positivity of functions A and B. To show the well-posedness of (34) we consider the regularised problem

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_y\Big(k(u+\delta)\Big[A(y)\nabla_y\partial_t\chi^j_\delta + B(y)P_c(u+\delta)\nabla_y\chi^j_\delta\Big]\Big) = 0 \quad \text{in } Y^*_{T-s}, \\ &k(u+\delta)[A(y)\nabla_y\partial_t\chi^j_\delta + P_c(u+\delta)B(y)\nabla_y\chi^j_\delta]\cdot\nu = 0 \qquad \text{on } \Gamma_{T-s}, \\ &\chi^j_\delta \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Y-\text{periodic}, \\ &\chi^j_\delta(0,x,y) = \omega^j(y) - \vartheta^j(y) \qquad\qquad\qquad\qquad \text{in } Y^*. \end{aligned} \tag{35}$$

Assumptions on k, P_c, A, and B ensure that problem (35) has a unique solution $\chi^j_\delta \in H^1(0,T; L^2(G; H^1_{\text{per}}(Y^*)))$. Then considering $\chi^j_\delta/k(u+\delta)$ and $\partial_t\chi^j_\delta$ as test functions in the weak formulation of (35) we obtain

$$\begin{aligned} \|\nabla_y\chi^j_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(Y^*))} + \|\sqrt{P_c(u+\delta)}\nabla_y\chi^j_\delta\|_{L^2((0,T)\times Y^*)} \\ +\|\sqrt{k(u+\delta)}\nabla_y\partial_t\chi^j_\delta\|_{L^2((0,T)\times Y^*)} \le C, \end{aligned} \tag{36}$$

for $x \in G$ and a constant $C > 0$ independent of δ. Assumptions on k and P_c in Assumption 1, together with the additional assumption that k is continuously differentiable for $z \ge 0$, combined with the regularity $\partial_t u \in L^{q_1}((0,T)\times G)$, where $q_1 = n/(n-1)$ for $n \ge 2$ and $q_1 \ge 2$ for $n = 1$, imply

$$\begin{aligned} \langle k(u+\delta)\nabla_y\partial_t\chi^j_\delta, \nabla_y\psi\rangle_{Y^*_T} = -\langle k'(u+\delta)\partial_t u\nabla_y\chi^j_\delta, \nabla_y\psi\rangle_{Y^*_T} \\ -\langle k(u+\delta)\nabla_y\chi^j_\delta, \nabla_y\partial_t\psi\rangle_{Y^*_T} \end{aligned}$$

for $\psi \in C^1_0(G_T \times Y^*)$. Taking the limit as $\delta \to 0$ and considering estimates in (36) yield

$$\sqrt{k(u+\delta)}\nabla_y\partial_t\chi^j_\delta \rightharpoonup \sqrt{k(u)}\nabla_y\partial_t\chi^j \qquad \text{in } \; L^2(G_T\times Y^*).$$

Then, using the continuity of k and P_c, regularity of $\partial_t u$ and the estimate for $\nabla_y \chi^j_\delta$ in $L^\infty(0,T;L^2(G\times Y^*))$, we can pass to the limit as $\delta \to 0$ in the weak formulation of (35) and obtain that the limit function $\chi^j \in L^2(G_T;H^1_{\rm per}(Y^*))$, with $\sqrt{k(u)}\partial_t\chi^j \in L^2(G_T;H^1_{\rm per}(Y^*))$, is a solution of (34). Considering the expression (32) for w in (27) and choosing $\phi = v-u$ yield the corresponding macroscopic variational inequality

$$\begin{aligned} \langle \partial_t b(u), v-u\rangle_{G_T} &+ \big\langle k(u)[A_{\rm hom}\partial_t\nabla u + B_{\rm hom}P_c(u)\nabla u], \nabla(v-u)\big\rangle_{G_T} \\ &+ \Big\langle \int_0^t K_{\rm hom}(t-s,x)\partial_s \nabla u\, ds, \nabla(v-u)\Big\rangle_{G_T} \\ &-\langle F_{\rm hom}(t,x,u), \nabla(v-u)\rangle_{G_T} + \langle f_{\rm hom}(t,u), v-u\rangle_{G_T} \geq 0, \end{aligned}$$

where $A_{\rm hom}$, $F_{\rm hom}$ and $f_{\rm hom}$ are defined in Theorem 2, and matrices $B_{\rm hom} = (B^{ij}_{\rm hom})$ and $K_{\rm hom}(t,x) = (K^{ij}_{\rm hom}(t,x))$ are determined by

$$\begin{aligned} B^{ij}_{\rm hom} &= \fint_{Y^*} B(y)\left(\delta_{ij} + \frac{\partial \vartheta^j}{\partial y_i}\right) dy, \\ K^{ij}_{\rm hom}(t,x) &= \fint_{Y^*} k(u(t+s,x))[A(y)\partial_t\partial_{y_i}\chi^j + B(y)P_c(u(t+s,x))\partial_{y_i}\chi^j] dy. \end{aligned}$$

1. Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D. *An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains.* Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 1992, 18, 481–496.

2. Allaire G. *Homogenization and two-scale convergence.* SIAM J. Math. Anal., 1992, 23, 1482–1518.

3. Barenblatt G., Entov V., Ryzhik V. Theory of fluid flow through natural rocks. Dordrecht: Kluwer, 1990.

4. Barenblatt, G., Bertsch M., Passo R.D., Ughii M. *A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow.* SIAM J Math. Anal., 1993, 24, 1414–1439.

5. Boehm M., Showalter R.E. *A nonlinear pseudoparabolic diffusion equation.* SIAM J. Math. Anal., 1985, 16, 980–999.

6. Cancés C., Choquet C., Fan Y., Pop I.S. *Existence of weak solutions to a degenerate pseudo-parabolic equation modelling two-phase flow in porous media.* Technical report, Eindhoven University of Technology, CASA-Report, 2010, 10–75.

7. Capatina A., Timofte C. *Homogenization results for micro-contact elasticity problems.* J. Math. Anal. Appl., 2016, 441, 462–474.

8. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Homogenization of reticulated structures. Springer, New York, 1999.

9. Cuesta, C., van Duijn C.J., Hulshof J. *Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: Travelling waves.* Euro. Jnl Appl. Math., 2000, 11, 381–397.

10. DiBenedetto E., Showalter R.E. *A pseudo-parabolic variational inequality and Stefan problem.* Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 1982, 6, 279–291.

11. Iosifyan G.A. *Homogenization of elastic problems with boundary conditions of Signorini type.* Math. Notes, 2004, 75, 765–779.

12. Hassanizadeh S.M., Gray W.G. *Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media.* Water Resour. Res., 1993, 29, 3389–3405.

13. Hornung U., Jäger W., Mikelic A. *Reactive transport through an array of cells with semi-permeable membranes.* RAIRO - Modél. Math. Anal. Numér., 1994, 28, 59–94.

14. Jäger W. Neuss-Radu M., Shaposhnikova T.A. *Homogenization of a variational inequality for the Laplace operator with nonlinear restriction for the flux on the interior boundary of a perforated domain.* Nonlinear Analysis: Real World Appl., 2014, 15, 367–380.

15. Kenneth L., Kuttler J. *Degenerate variational inequalities of evolution.* Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 1984, 8, 837–850.

16. Kinderlehrer D., Stampacchia S. An introduction to variational inequalities and their applications. Academic Press, New York, 1980.

17. Lions J.L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.

18. Mielke A., Timofte C. *Two-scale homogenization for evolutionary variational inequalities via the energetic formulation.* SIAM J. Math. Anal., 2007, 39, 642–668.

19. Mikelić A. *A global existence result for the equations describing unsaturated flow in porous media with dynamic capillary pressure.* J. Differ. Equat., 2010, 248, 1561–1577.

20. Neuss-Radu M. *Some extensions of two-scale convergence.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1996, 332, 899–904.

21. Nguetseng G. *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization.* SIAM J. Math. Anal., 1989, 20, 608–623.

22. Novick-Cohen A., Pego R.L. *Stable patterns in a viscous diffusion equation.* Trans. Amer. Math. Soc., 1991, 324, 331–351.

23. Pavone D. *Macroscopic equations derived from space averaging for immiscible two-phase flow in porous media.* Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP, 1989, 44, 29–41.

24. Peszyńska M., Showalter R., Yi S.-Y. *Homogenization of a pseudoparabolic system.* Applicable Analysis, 2009, 88, 1265–1282.

25. Ptashnyk M. *Degenerate quasilinear pseudoparabolic equations with memory terms and variational inequalities.* Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 66, 2653–2675, 2006.

26. Ptashnyk M. *Nonlinear pseudoparabolic equations as singular limit of reaction-diffusion equations.* Applicable Analysis, 2006, 85, 1285–1299.

27. Marciniak-Czochra, A., Ptashnyk, M. *Derivation of a macroscopic receptor-based model using homogenization techniques.* SIAM J. Math. Anal., 2008, 40, 215-237.

28. Rodrigues J-F., *Free boundary convergence in the homogenization of the one phase Stefan problem.* Trans. Amer. Math, Society, 1982, 274, 297–3002.

29. Rubinshtein L.I. *On the process of heat transfer in heterogeneous media.* lzv. Akad. Nauk SSSR. Set. Geogrqf. Geofiz., 1948, 12, 27-45.

30. Sandrakov G.V. *Homogenization of variational inequalities and equations de ned by pseudomonotone operators.* Sbornik: Mathematics, 2008, 199, 67–98.

31. Scarpini, F. *Degenerate and pseudoparabolic variational inequalities.* Numer. Funct. Anal. Optim., 1987, 9, 859–879.

32. Showalter R.E., Ting T.W. *Pseudoparabolic partial differential equations.* SIAM J. Math. Anal., 1970, 1, 1–26.

Appendix

Definition 2. *[2,21] A sequence $\{u^\varepsilon\} \subset L^p(G)$ converges two-scale to u, with $u \in L^p(G \times Y)$, iff for any $\phi \in L^q(G, C_{\rm per}(Y))$ we have*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_G u^\varepsilon(x)\phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_G \fint_Y u(x,y)\phi(x,y)dxdy,$$

where $1/p + 1/q = 1$.

Definition 3. *[2,20] A sequence $\{u^\varepsilon\} \subset L^2(\Gamma^\varepsilon)$ converges two-scale to u, with $u \in L^2(G \times \Gamma)$, iff for $\psi \in L^2(G, C^\infty_{\rm per}(\Gamma))$ holds*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} u^\epsilon(x)\psi(x, x/\varepsilon)\, d\gamma_x = \frac{1}{|Y|}\int_G \int_\Gamma u(x,y)\psi(x,y)\, dxd\gamma_y.$$

Theorem 3 (Compactness [2,21]). *Let $\{u^\varepsilon\}$ be a bounded sequence in $H^1(G)$, which converges weakly to $u \in H^1(G)$. Then there exists $u_1 \in L^2(G, H^1_{\rm per}(Y))$ such that, up to a subsequence, u^ε two-scale converges to u and ∇u^ε two-scale converges to $\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x,y)$.*

Let $\{u_\varepsilon\}$ and $\{\varepsilon \nabla u^\varepsilon\}$ be bounded sequences in $L^2(G)$. Then there exists $u_0 \in L^2(G, H^1_{\rm per}(Y))$ such that, up to a subsequence, u^ε and $\varepsilon\nabla u^\varepsilon$ two-scale converge to $u_0(x,y)$ and $\nabla_y u_0(x,y)$, respectively.

Let $\{\sqrt{\varepsilon}u_\varepsilon\}$ be a bounded sequences in $L^2(\Gamma^\varepsilon)$. Then there exists $u_0 \in L^2(G\times\Gamma)$ such that, up to a subsequence, u^ε two-scale converge to $u_0(x,y)$.

Let $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ be a continuous and convex function and $\{v^\varepsilon\}$ is a bounded in $L^2((0,T)\times G^\varepsilon)^n$ sequence which two-scale converge to v. Then

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_{G^\varepsilon} \Phi(v^\varepsilon) dxdt \geq \int_0^T \int_G \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \Phi(v)\, dydxdt,$$

see [13] for the proof.

Марія Пташник

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ ВИРОДЖЕНИХ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

У роботі проведено багатомасштабний аналіз виродженої псевдопараболічної варіаційної нерівності, яка моделює двофазний потік з динамічним капілярним тиском в перфорованій області. Для встановлення розв'язності варіаційної нерівності використано апріорні оцінки, методи регуляризації, двомасштабної збіжності та метод оператора штрафу.

УДК 517.956.6

Іван Савка[1], Павло Василишин[2], Тарас Гой[3]

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ З НЕЛОКАЛЬНОЮ БАГАТОТОЧКОВОЮ УМОВОЮ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

У циліндричній області, що є декартовим добутком відрізка на багатовимірний тор, досліджено задачу спряження з нелокальною багатоточковою умовою за часовою змінною для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку. Встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі у просторах Соболєва. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

1. Вступ

Процеси у двошарових середовищах із різко відмінними фізичними властивостями приводять до розгляду задач спряження, коли на одній частині області задано параболічне рівняння, а на іншій — гіперболічне [1]. При цьому особлива увага приділяється вибору крайових умов і умов спряження на межі розділу підобластей (контакту шарів) цього середовища. Такий вибір зумовлений необхідністю пошуку коректно поставлених крайових задач, сформульованих одночасно для обох диференціальних рівнянь.

Крайові задачі з різними типами умов для параболо-гіперболічних рівнянь другого порядку вивчались багатьма авторами (Врагов В., Джураєв Т., Єлєєв В., Корзюк В., Нахушев А., Сабітов К., Салахітдінов М., Lions J., Al-Droubi A., Ashyralyev A. та інші). Зокрема, у роботах Сабітова К.Б. та його учнів (наприклад, див. [7]) методом спектрального аналізу для параболо-гіперболічного рівняння в прямокутній області двох змінних (t, x) досліджено крайові задачі спряження з локальними та нелокальними умовами за змінними x та t, а у роботі [9] — нелокальна багатоточкова задача для гіперболо-параболічного рівняння в гільбертовому просторі із самоспряженим додатно визначеним оператором.

[1] *ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України, s-i@ukr.net*

[2] *Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, pbvasylyshyn@ukr.net*

[3] *Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, tarasgoy@yahoo.com*

У роботі [8] встановлено коректну розв'язність у шкалі просторів Соболєва задачі спряження з інтегральною умовою за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими змінними для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку, а у роботі [5] із використанням метричного підходу досліджено задачу з нелокальною за часом умовою, що містить інтегральний доданок, в класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними.

2. Формулювання задачі

Нехай $\mathcal{D}^p = (-\alpha, \beta) \times \Omega^p$ — циліндрична область змінних (t, x), де $\alpha > 0$, $\beta > 0$, Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $x = (x_1, \dots, x_p)$, $p \in \mathbb{N}$. Поверхня $\{t = 0\} \times \Omega^p$ розбиває область $\mathcal{D}^p$ на дві підобласті: $\mathcal{D}^p_+ = \mathcal{D}^p \cap \{t > 0\}$ і $\mathcal{D}^p_- = \mathcal{D}^p \cap \{t < 0\}$.

В області $\mathcal{D}^p$ досліджуємо задачу спряження при $t = 0$ з m-багатоточковою нелокальною умовою, яка пов'язує шуканий розв'язок $u(t, x)$ у r точках при $t < 0$ та у $(m - r)$ точках при $t > 0$, для параболо-гіперболічного рівняння:

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - b\Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}^p_+, \\ u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}^p_-, \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} u(-\varepsilon, x) = \lim_{\varepsilon \to +0} u(\varepsilon, x), \ \lim_{\varepsilon \to +0} u_t(-\varepsilon, x) = \lim_{\varepsilon \to +0} u_t(\varepsilon, x), \ x \in \Omega^p, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j u(t_j, x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega^p, \tag{3}$$

де $a, b \in \mathbb{R}, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $a > 0$, $b > 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$, $-\alpha = t_1 < t_2 < \ldots < t_r < 0 < t_{r+1} < t_{r+2} < \ldots < t_{m-1} < t_m = \beta$, $\varphi(x)$ — задана функція.

Надалі використовуватимемо такі простори функцій:

$\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболєва, отриманий поповненням множини скінченних тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum\limits_k \varphi_k e^{i(k,x)}$, де $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p$, за нормою

$$\|\varphi; \mathbf{H}_q\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(1 + \lambda_k^2\right)^q |\varphi_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \lambda_k = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_p^2}.$$

$\mathbf{C}^n(I; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, I — відрізок прямої $\mathbb{R}$, — простір функцій

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)} \qquad (u_k(t) \in \mathbf{C}^n(I))$$

таких, що для кожного фіксованого $t \in I$ функції

$$\partial^j u(t,x)/\partial t^j \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t)e^{i(k,x)}, \quad 0 \le j \le n,$$

належать простору $\mathbf{H}_q$ і як елементи цього простору є неперервними за t на I; норму в просторі $\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)$ задаємо формулою

$$\|u;\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in I} \|\partial^j u(t,x)/\partial t^j;\mathbf{H}_q\|^2.$$

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1)–(3) *називаємо функцію* $u(t,x)$ *з класу*

$$\mathbf{C}^1([0,\beta];\mathbf{H}_q) \cap \mathbf{C}^2([-\alpha,0];\mathbf{H}_q),$$

для якої справжуються рівності

$$\|Lu;\mathbf{C}([-\alpha,0];\mathbf{H}_{q-2})\| = 0, \quad \|Lu;\mathbf{C}([0,\beta];\mathbf{H}_{q-2})\| = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|u(-\varepsilon,\cdot)-u(\varepsilon,\cdot);\mathbf{H}_q\| = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \|u_t(-\varepsilon,\cdot)-u_t(\varepsilon,\cdot);\mathbf{H}_{q-1}\| = 0, \tag{5}$$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{m} \mu_j u(t_j,\cdot) - \varphi;\mathbf{H}_q \Big\| = 0. \tag{6}$$

3. Умови коректної розв'язності задачі

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{i(k,x)}. \tag{7}$$

З умов (4)-(6) випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ коефіцієнт $u_k(t)$ ряду (7) є розв'язком задачі

$$\begin{cases} u_k'(t) + b\lambda_k^2 u_k(t) = 0, & 0 < t < \beta \\ u_k''(t) + a^2\lambda_k^2 u_k(t) = 0, & -\alpha < t < 0, \end{cases} \tag{8}$$

з умовами спряження при $t = 0$

$$u_k(-0) = u_k(+0), \ u_k'(-0) = u_k'(+0) \tag{9}$$

та нелокальною багатоточковою умовою

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j u_k(t_j) = \varphi_k, \tag{10}$$

де φ_k, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$.

Загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$u_k(t) = \begin{cases} D_k e^{-b\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ A_k \cos(a\lambda_k t) + B_k \dfrac{\sin(a\lambda_k t)}{a\lambda_k}, & t < 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{11}$$

де A_k, B_k і D_k — довільні сталі, для вектора $k = \vec{0}$ значення виразу $\frac{\sin(a\lambda_k t)}{a\lambda_k}$ приймаємо рівним t. Функція (11) задовольняє умови (9) тільки тоді, коли

$$A_k = D_k, \qquad B_k = -b\lambda_k^2 D_k.$$

Розв'язок рівняння (8), що справджує умови спряження (9), зображується формулою

$$u_k(t) = \begin{cases} D_k e^{-b\lambda_k^2 t}, & t \geq 0, \\ D_k\big(\cos(a\lambda_k t) - \frac{b}{a}\lambda_k \sin(a\lambda_k t)\big), & t < 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Для знаходження коефіцієнтів D_k скористаємось умовою (10). Тоді

$$D_k \delta_k = \varphi_k, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де

$$\delta_k = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \left(\cos(a\lambda_k t_j) - \frac{b}{a}\lambda_k \sin(a\lambda_k t_j)\right) + \sum_{j=1}^{m-r} \mu_j e^{-b\lambda_k^2 t_{r+j}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$\big(\forall\, k \in \mathbb{Z}^p\big) \qquad \delta_k \neq 0. \tag{12}$$

Якщо виконуються умови теореми 1, то формальний розв'язок задачі (1)–(3) зображується рядом

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0}{\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} u_k(t) e^{i(k,x)}, \tag{13}$$

де

$$u_k(t) = \begin{cases} \varphi_k \delta_k^{-1}\big(\cos(a\lambda_k t) - \frac{b}{a}\lambda_k \sin(a\lambda_k t)\big), & t < 0, \\ \varphi_k \delta_k^{-1} e^{-b\lambda_k^2 t}, & t \geq 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{14}$$

Питання існування розв'язку задачі (1)–(3) у просторі

$$\mathbf{C}^1\big([0,\beta]; \mathbf{H}_q\big) \cap \mathbf{C}^2([-\alpha, 0]; \mathbf{H}_q),$$

взагалі кажучи, пов’язанt з проблемою малих знаменників [6], яка полягає в тому, що відмінні від нуля вирази δ_k можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів k. Це спричиняє розбіжність ряду (13) у вказаних шкалах просторів.

Якщо малі знаменники δ_k мають поліноміальну чи експоненційну асимтотичну поведінку при $\lambda_k \to \infty$, то за відповідного обмеження на праву частину нелокальної умови (3) можна встановити існування єдиного розв’язку задачі (1)–(3).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (12) *та існує така стала* $\gamma > 0$, *що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$

$$|\delta_k| \geq \lambda_k^{-\gamma}. \tag{15}$$

Тоді, якщо $\varphi \in \mathbf{H}_{q+\gamma+3}$, *то існує єдиний розв’язок* u *задачі* (1)–(3), *який зображується рядом* (13); *при цьому виконуються нерівності*

$$\|u; \mathbf{C}^1([-\alpha, 0]; \mathbf{H}_q)\| \leq C_1 \|\varphi; \mathbf{H}_{q+\gamma+3}\|,$$

$$\|u; \mathbf{C}^1([0, \beta]; \mathbf{H}_q)\| \leq C_2 \|\varphi; \mathbf{H}_{q+\gamma+2}\|,$$

де додатні сталі C_1 *і* C_2 *не залежать від функції* φ.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{K}$ множину тих векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких виконується протилежна до (15) нерівність, тобто

$$\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{Z}^p : |\delta_k| < \lambda_k^{-\gamma}\}.$$

Оскільки за умовою теореми множина $\mathcal{K}$ є скінченна та $\inf\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} |\delta_k| > 0$, то для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$|\delta_k| \geq C_0 \lambda_k^{-\gamma} \tag{16}$$

зі сталою $C_0 = \min\left\{1, \min\limits_{k \in \mathcal{K}} \left\{\lambda_k^{\gamma} |\delta_k|\right\}\right\} > 0$.

Враховуючи оцінку (16), з формули (14) випливають такі оцінки:

$$|u_k^{(j)}(t)| \leq (1 + b/a) a^j \lambda_k^{j+1} \frac{|\varphi_k|}{|\delta_k|} \leq (1 + b/a)(1 + a^2) C_0 \lambda_k^{3+\gamma} |\varphi_k|, \; j = 0, 1, 2,$$

для $t \in [-\alpha, 0]$,

$$|u_k^{(j)}(t)| \leq b^j \lambda_k^j \frac{|\varphi_k|}{|\delta_k|} \leq (1 + b) C_0 \lambda_k^{2+\gamma} |\varphi_k|, \quad j = 0, 1, \quad t \in [0, \beta].$$

Тоді для розв’язку u задачі (1)–(3) отримуємо нерівності

$$\|u; \mathbf{C}^2([-\alpha, 0]; \mathbf{H}_q)\|^2 = \sum_{j=0}^{2} \max_{t \in [-\alpha, 0]} \|\partial^j u(t, x)/\partial t^j; \mathbf{H}_q\|^2 \leq$$

$$\leq 3(1+b/a)^2(1+a^2)^2 C_0^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \left(1+\lambda_k^2\right)^q \lambda_k^{2(3+\gamma)} |\varphi_k|^2 \leq$$

$$\leq 3(1+b/a)^2(1+a^2)^2 C_0^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \left(1+\lambda_k^2\right)^{q+3+\gamma} |\varphi_k|^2 = C_1^2 \|\varphi; \mathbf{H}_{q+\gamma+3}\|^2,$$

$$\|u; \mathbf{C}^1([0,\beta]; \mathbf{H}_q)\|^2 = \max_{t\in[0,\beta]} \|u; \mathbf{H}_q\|^2 + \max_{t\in[0,\beta]} \|u_t; \mathbf{H}_q\|^2 \leq$$

$$\leq 2(1+b)^2 C_0^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \left(1+\lambda_k^2\right)^{q+2+\gamma} |\varphi_k|^2 = C_2^2 \|\varphi; \mathbf{H}_{q+\gamma+2}\|^2,$$

де

$$C_1 = \sqrt{3}(1+b/a)(1+a^2)C_0, \quad C_2 = \sqrt{2}(1+b)^2 C_0,$$

з яких випливає доведення теореми. ■

4. Оцінка малих знаменників задачі

З'ясуємо тепер можливість виконання оцінки (15). Для цього скористаємось метричним підходом [4], який полягає у вивченні міри множин параметрів задачі (коефіцієнтів рівняння, коефіцієнтів умов або параметрів області), для яких вказані оцінки виконуються або порушуються.

Лема 1 (Бореля–Кантеллі, [2]). *Нехай $\{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ — послідовність вимірних (за мірою Лебега) множин з $\mathbb{R}$ таких, що*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{meas} \mathcal{A}_m < \infty.$$

Тоді міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин цієї послідовності, дорівнює нулю, тобто

$$\operatorname{meas} \mathcal{A} = 0, \qquad \mathcal{A} = \limsup_{m\to\infty} \mathcal{A}_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{r=m}^{\infty} \mathcal{A}_r.$$

Означення 2. *Множину $E(f,\varepsilon,I)$, яка задається рівністю*

$$E(f,\varepsilon,I) = \{t \in I : |f(t)| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

будемо називати $\varepsilon-$винятковою множиною для функції f на відрізку I, $I \subset \mathbb{R}$.

Лема 2 (Пяртлі, [3]). *Якщо функція $f \in \mathbf{C}^n(I)$ є такою, що*

$$\left(\forall t \in I\right) \quad |f^{(n)}(t)| \geq \delta > 0,$$

то міра $\varepsilon-$виняткової множини для функції f справджує нерівність

$$\operatorname{meas} E(f,\varepsilon,I) \leq 2n \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}.$$

Позначимо через I_T деякий фіксований відрізок $I_T = [T_1, T_2]$ прямої $\mathbb{R}$, де $T_1 < T_2 < 0$.

Теорема 3. *Якщо для фіксованого $s \in \{1, \ldots, r\}$ виконуються нерівності*

$$\mu_s \neq 0, \qquad |\mu_s| > 2 \sum_{j=1, j\neq s}^{r} |\mu_j|,$$

то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $t_s \in I_T$ оцінка (15) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma > p - 1$.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, доведення теореми проведемо для $s = 1$.

Розглянемо вирази δ_k, $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}$, як функції змінної t_1 на відрізку I_T, а саме:

$$f_k(t_1) := \delta_k = \mu_1 \left(\cos(a\lambda_k t_1) - \frac{b\lambda_k}{a} \sin(a\lambda_k t_1) \right) + \Phi_k, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

де через Φ_k позначено вираз, який не залежать від t_1, тобто

$$\Phi_k = \sum_{j=2}^{r} \mu_j \left(\cos(a\lambda_k t_j) - \frac{b}{a}\lambda_k \sin(a\lambda_k t_j) \right) + \sum_{j=1}^{m-r} \mu_{r+j} e^{-b\lambda_k^2 t_{r+j}}.$$

Запровадимо наступні ε-виняткові множини $\mathcal{A}_k$ при $\varepsilon = \lambda_k^{-\gamma}$:

$$\mathcal{A}_k = E(f_k, \lambda_k^{-\gamma}, I_T) = \{t_1 \in I_T : |f_k(t_1)| < \lambda_k^{-\gamma}\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

а також позначимо через $\mathcal{A}$ множину тих чисел t_1, які належать нескінченній кількості множин множин $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}$.

Продиференціюємо функцію f_k за змінною t_1. Тоді отримаємо, що

$$f_k'(t_1) = -\mu_1 \left(b\lambda_k^2 \cos(a\lambda_k t_1) + a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \right).$$

Оскільки

$$a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) f_k(t_1) + \cos(a\lambda_k t_1) f_k'(t_1) =$$

$$= a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \Big(\mu_1 \cos(a\lambda_k t_1) - \mu_1 \frac{b\lambda_k}{a} \sin(a\lambda_k t_1) + \Phi_k \Big) -$$

$$-\mu_1 \cos(a\lambda_k t_1) \Big(b\lambda_k^2 \cos(a\lambda_k t_1) + a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \Big) =$$

$$= a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \Phi_k - \mu_1 b\lambda_k^2,$$

то

$$a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1)\big(f_k(t_1)-\Phi_k\big)+\cos(a\lambda_k t_1)f'_k(t_1)=-\mu_1 b\lambda_k^2,$$

звідки

$$-\frac{\mu_1 b}{a}\lambda_k=\sin(a\lambda_k t_1)\big(f_k(t_1)-\Phi_k\big)+\cos(a\lambda_k t_1)\frac{f'_k(t_1)}{a\lambda_k}.$$

Таким чином, у кожній точці $t_1\in I_T$ виконується нерівність

$$\frac{|\mu_1|b}{a}\lambda_k\le|f_k(t_1)-\Phi_k|+\frac{|f'_k(t_1)|}{a\lambda_k}\le 2\max\left\{|f_k(t_1)-\Phi_k|,\frac{|f'_k(t_1)|}{a\lambda_k}\right\}. \quad (17)$$

Полічимо тепер кількість нулів на відрізку I_T функцій $g_k^+(t_1)$ і $g_k^-(t_1)$, які визначаються формулами

$$g_k^+(t_1)=f_k(t_1)-\Phi_k+\frac{f'_k(t_1)}{a\lambda_k},\quad g_k^-(t_1)=f_k(t_1)-\Phi_k-\frac{f'_k(t_1)}{a\lambda_k}.$$

Для цих функцій справедливі зображення

$$g_k^+(t_1)=\mu_1\big(1-\tfrac{b}{a}\lambda_k\big)\cos(a\lambda_k t_1)-\mu_1\big(1+\tfrac{b}{a}\lambda_k\big)\sin(a\lambda_k t_1)=$$

$$=-\mu_1\sqrt{2\big(1+\tfrac{b^2}{a^2}\lambda_k^2\big)}\sin(a\lambda_k t_1-\phi_k),$$

$$g_k^-(t_1)=\mu_1\big(1+\tfrac{b}{a}\lambda_k\big)\cos(a\lambda_k t_1)+\mu_1\big(1-\tfrac{b}{a}\lambda_k\big)\sin(a\lambda_k t_1)=$$

$$=\mu_1\sqrt{2\big(1+\tfrac{b^2}{a^2}\lambda_k^2\big)}\cos(a\lambda_k t_1-\phi_k),$$

де

$$\phi_k=\operatorname{arctg}\frac{a-b\lambda_k}{a+b\lambda_k},\quad k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{0\}.$$

Кількість нулів функції $g_k^+(t_1)$ (відповідно, функції $g_k^-(t_1)$) дорівнює кількості цілих чисел m_1 (відповідно, цілих чисел m_2), які справджують нерівність

$$\frac{T_1 a\lambda_k-\phi_k}{\pi}\le m_1\le\frac{T_2 a\lambda_k-\phi_k}{\pi}$$

$$\left(\frac{T_1 a\lambda_k-\phi_k-\pi/2}{\pi}\le m_2\le\frac{T_2 a\lambda_k-\phi_k-\pi/2}{\pi}\right).$$

Очевидно, що для фіксованого вектора $k\ne 0$ кожна з функцій $g_k^+(t_1)$ і $g_k^-(t_1)$ може мати не більше ніж $C_3\lambda_k$ нулів, де

$$C_3=C_3(I_T,a)=1+\frac{a}{\pi}(T_2-T_1).$$

Позначимо через $\xi_k^1, \ldots, \xi_k^{\ell(k)}$ різні нулі обох функцій $g_k^+(t_1)$, $g_k^-(t_1)$, які належать проміжку (T_1, T_2). Вважаючи, що точки $\xi_k^1, \ldots, \xi_k^{\ell(k)}$ записано у порядку зростання $\xi_k^1 < \ldots < \xi_k^{\ell(k)}$, зробимо розбиття відрізка I_T цими точками наступним чином:

$$I_T = \bigcup_{j=0}^{\ell(k)} I_T^j, \qquad I_T^j = [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}], \tag{18}$$

де $\xi_k^0 = T_1$, $\xi_k^{\ell(k)+1} = T_2$. На кожному відрізку I_T^j, $j = 0, 1, \ldots, \ell(k)$, обидві функції $g_k^+(t_1)$, $g_k^-(t_1)$ зберігають знак, а відтак із нерівності (17) одержуємо, що

$$\big(\forall t_1 \in I_T^j\big) \quad |f_k(t_1) - \Phi_k| \geq \frac{|\mu_1| b}{2a} \lambda_k \tag{19}$$

або

$$\big(\forall t_1 \in I_T^j\big) \quad |f_k'(t_1)| \geq \frac{|\mu_1| b}{2} \lambda_k^2, \tag{20}$$

Якщо на відрізку I_T^j виконується умова (19), то жодна точка цього відрізка не може належати множині $\mathcal{A}_k$ для досить великого λ_k і $\gamma > 0$. Дійсно, з нерівностей

$$\frac{|\mu_1| b}{2a} \lambda_k \leq |f_k(t_1) - \Phi_k| \leq |f_k(t_1)| + |\Phi_k| \leq \lambda_k^{-\gamma} + \frac{b}{a} \lambda_k \sum_{j=2}^{r} |\mu_j| + \sum_{j=2}^{m} |\mu_j|$$

випливає, що має виконуватись нерівність

$$\frac{b}{a} \lambda_k \left(\frac{|\mu_1|}{2} - \sum_{j=2}^{r} |\mu_j| \right) \leq 1 + \sum_{j=2}^{m} |\mu_j|.$$

За умовою теореми $|\mu_1| > 2 \sum_{j=2}^{r} |\mu_j|$, тому остання нерівність не виконується при

$$\lambda_k > \widetilde{\lambda} := \frac{a}{b} \left(1 + \sum_{j=2}^{m} |\mu_j| \right) \left(\frac{|\mu_1|}{2} - \sum_{j=2}^{r} |\mu_j| \right)^{-1}.$$

Тому при $\lambda_k > \widetilde{\lambda}$ і $\gamma > 0$ маємо $\mathcal{A}_k \cap I_T^j = \emptyset$, звідки

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq \begin{cases} C_4, & 0 < \lambda_k \leq \widetilde{\lambda}, \\ 0, & \lambda_k > \widetilde{\lambda}, \end{cases}$$

де $C_4 = \max\limits_{0 < \lambda_k \leq \widetilde{\lambda}} \{\operatorname{meas} \mathcal{A}_k\}$.

Якщо ж на відрізку I_T^j виконується умова (20), то за лемою Пяртлі (при $n=1$) для довільного $\gamma \in \mathbb{R}$ отримуємо оцінку

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq \tfrac{4}{b|\mu_1|}\lambda_k^{-2-\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}.$$

Із рівності $\operatorname{meas} \mathcal{A}_k = \sum_{j=0}^{\ell(k)} \operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j$ та оцінок

$$\ell(k) \leq C_3 \lambda_k, \quad \max_j \{\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j\} \leq \tfrac{4}{b|\mu_1|}\lambda_k^{-2-\gamma}$$

для $\lambda_k > \widetilde{\lambda}$ випливає, що

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \leq C_5 \lambda_k^{-1-\gamma}, \quad C_5 = \tfrac{4C_3}{b|\mu_1|}, \ \gamma > 0, \ \lambda_k > \widetilde{\lambda}.$$

Таким чином, при $\gamma > p-1$ ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\}} \operatorname{meas} \mathcal{A}_k$ є збіжним. Тому за лемою Бореля–Кантеллі $\operatorname{meas} \mathcal{A} = 0$ при $\gamma > p-1$. Отже, для кожного $t_1 \in I_T \backslash \mathcal{A}$ існує таке число $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(t_1)$, що оцінка $|\delta_k| \geq \lambda_k^{-\gamma}$ виконується для всіх $\lambda_k > \overline{\lambda}$. Теорему доведено. ∎

Зауважимо, що теорема 3 справджується й без умови

$$|\mu_s| > 2 \sum_{j=1, j \neq s}^{r} |\mu_j|,$$

але тоді показник γ повинен бути більшим, а саме $\gamma > 2p-1$.

Теорема 4. *Якщо $\mu_s \neq 0$ для фіксованого $s \in \{1, \ldots, r\}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $t_s \in I_T$ оцінка* (15) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma > 2p-1$.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, доведення теореми знову проведемо для $s=1$. Будемо використовувати ті ж самі позначення, що при доведенні теореми 3.

Двічі продиференціюємо функцію f_k:

$$f_k'(t_1) = -\mu_1 \left(b\lambda_k^2 \cos(a\lambda_k t_1) + a\lambda_k \sin(a\lambda_k t_1) \right),$$

$$f_k''(t_1) = -\mu_1 \left(a^2\lambda_k^2 \cos(a\lambda_k t_1) - ab\lambda_k^3 \sin(a\lambda_k t_1) \right).$$

Тоді одержуємо диференціальне рівняння

$$\sin(a\lambda_k t_1) f_k''(t_1) - a\lambda_k \cos(a\lambda_k t_1) f_k'(t_1) = \mu_1 ab\lambda_k^3,$$

з якого випливає нерівність

$$|\mu_1| b\lambda_k^2 \leq \frac{|f_k''(t_1)|}{a\lambda_k} + |f_k'(t_1)| \leq 2\max\left\{ |f_k'(t_1)|, \frac{|f_k''(t_1)|}{a\lambda_k} \right\}. \qquad (21)$$

Можна аналогічно показати, що кількість нулів функцій $h_k^+(t_1)$ і $h_k^-(t_1)$ на відрізку I_T, де

$$h_k^+ = f_k'(t_1) + \frac{f_k''(t_1)}{a\lambda_k}, \quad h_k^- = f_k'(t_1) - \frac{f_k''(t_1)}{a\lambda_k},$$

не перевищує $\widetilde{C}_3\lambda_k$, $\widetilde{C}_3$ — деяка додатна стала.

Далі зробимо розбиття (18) відрізка I_T, в якому $\xi_k^1, \ldots, \xi_k^{\ell(k)}$ — всі різні нулі обох функцій $h_k^+(t_1)$, $h_k^-(t_1)$, які належать проміжку (T_1, T_2).

Із нерівності (21) отримаємо такі альтернативи на відрізку I_T^j:

$$\left(\forall t_1 \in I_T^j\right) \quad |f_k'(t_1)| \geq \tfrac{|\mu_1|b}{2}\lambda_k^2 \tag{22}$$

або

$$\left(\forall t_1 \in I_T^j\right) \quad |f_k''(t_1)| \geq \tfrac{|\mu_1|ab}{2}\lambda_k^3.$$

Якщо на відрізку I_T^j виконується умова (22), то за лемою Пяртлі для довільного $\gamma \in \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq \tfrac{4}{b|\mu_1|}\lambda_k^{-2-\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

в іншому разі — оцінка

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq \tfrac{8}{ab|\mu_1|}\lambda_k^{\frac{-3-\gamma}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

Із нерівності для кількості $\ell(k)$ нулів функцій $h_k^+(t_1)$ і $h_k^-(t_1)$ та оцінок для мір множин $\mathcal{A}_k \cap I_T^j$ випливає, що

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_k = \sum_{j=0}^{\ell(k)} \operatorname{meas} \mathcal{A}_k \cap I_T^j \leq C_6 \lambda_k^{\frac{-\gamma-1}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{0\},$$

де $C_6 = \frac{4\widetilde{C}_3}{b|\mu_1|} \max\left\{1, \frac{2}{a}\right\}$, $\gamma > -1$.

Таким чином, ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}} \operatorname{meas} \mathcal{A}_k$ мажорується збіжним рядом при $\gamma > 2p - 1$. На підставі леми Бореля–Кантеллі отримуємо, що міра Лебега множина тих точок $t_1 \in \mathcal{A}$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, дорівнює нулеві. Теорему доведено. ■

1. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – **3**, Вып. 3(87). – С. 3–19.

2. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К. : Вища школа, 1979. – 408 с.

3. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісник НУ „Львівська політехніка“. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.

4. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.

5. *Кузь А.М., Пташник Б.Й.* Задача з умовою, що містить інтегральний доданок, для параболо-гіперболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 635–644.

6. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

7. *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – **89**, № 4. – С. 596–602.

8. *Савка І.Я., Симотюк М.М.* Задача спряження з інтегральною умовою за часовою змінною для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу // Прикарпатський вісник НТШ. Серія «Число». – 2015. – **1**, № 28. – С. 72–77.

9. *Ashyralyev A., Ozdemir Y.* On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations // Taiwanese J. Math. – 2007. – **11**, No. 4. – P. 1075–1089.

Ivan Savka, Pavlo Vasylyshyn, Taras Goy

CONJUGATE PROBLEM WITH MULTIPOINT NONLOCAL CONDITION IN TIME FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION IN A CYLINDRICAL DOMAIN

In the Cartesian product of the time segment and the spatial multidimensional torus, the conjugate problem with multipoint nonlocal condition in time for parabolic-hyperbolic equation is considered. The conditions for existence of the unique solution to the problem in Sobolev spaces are established. The metric theorems on the lower bounds of small denominators appearing in the solution of the problem are proved.

UDC 519.46:517.944

Vasyl Fedorchuk[1,2], **Volodymyr Fedorchuk**[2]

ON CLASSIFICATION OF SYMMETRY REDUCTIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

We suggest to investigate the relationship between the structural properties of nonconjugate subalgebras of the same rank of the Lie algebras of the symmetry groups of the partial differential equations and the properties of the reduced equations corresponding with them. Some results concerning to a classification of symmetry reductions for the eikonal equation are presented.

1. Introduction

It is well known that mathematical models of real processes of the nature can be very often described with the help of partial differential equations (PDEs).

It is also known that the important PDEs of theoretical and mathematical physics, mechanics, gas dynamics, etc. have non-trivial symmetry groups.

Symmetry reduction is one of the most powerful tools to investigate PDEs with non-trivial symmetry groups. In particular, for this purpose, we can use a classical Lie method. In 1895, Lie [1] considered solutions invariant with respect to groups admitted by the higher-order PDEs.

It turned out that the problem of symmetry reduction and the construction of classes of independent invariant solutions for PDEs with non-trivial symmetry groups was reduced to pure algebraic problem of describing all nonconjugate (nonsimilar) subalgebras of Lie algebras of symmetry groups of these equations. The details can be found in [2–7] (see also the references therein).

In 1975, Patera, Winternitz, and Zassenhaus [8] proposed a general method to describe the nonconjugate subalgebras of Lie algebras with nontrivial ideals. Two years ago, Patera and Winternitz [9] described the nonconjugate subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras.

The results of those two works make it possible to describe a subgroup structure of the symmetry groups as well as to construct classes of invariant

[1] *Institute of Mathematics, Pedagogical University, Cracow, Poland; vasfed@gmail.com,*

[2] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine; volfed@gmail.com*

solutions for many PDEs (see, for example, [6, 7, 10–21] and the references therein). However, it turned out that the reduced equations, obtained with the help of nonconjugate subalgebras of the given rank of the Lie algebras of the symmetry groups of some equations, important for theoretical and mathematical physics, were of different types (see, for example, [14–21] and the references therein).

Grundland, Harnad, and Winternitz [14] were the first to point out and investigate the similar phenomenon.

It means that using only the ranks of nonconjugate subalgebras of the Lie algebras of the symmetry groups of the PDEs under investigation, we cannot explain differences in the properties of their reduced equations.

It is well known that the nonconjugate subalgebras of the same rank of the Lie algebras of the symmetry groups of PDEs under investigation may have different structural properties.

To try to explain some of the differences in the properties of the reduced equations, obtained with the help nonconjugate subalgebras of the same rank of the Lie algebras of the symmetry groups of PDEs under investigation, we suggest to investigate the relationship between the structural properties of these subalgebras and the properties of the reduced equations corresponding with them.

By now, we have investigated the relationship between the structural properties [22] of the low-dimensional ($\dim L \leq 3$) nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group $P(1,4)$ and the properties of the corresponding reduced equations for the eikonal equation. In [21], there are the results, obtained on the basis of classification of three-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the group $P(1,4)$.

In this paper, we present some results relating to a classification of symmetry reductions for the eikonal equation, obtained on the basis of classification of one- and two-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the group $P(1,4)$.

2. Lie algebra of the Poincaré group $P(1,4)$ and its nonconjugate subalgebras

The group $P(1,4)$ is a group of rotations and translations of the five-dimensional Minkowski space $M(1,4)$. It is the smallest group, which contains, as subgroups, the extended Galilei group $\widetilde{G}(1,3)$ [23] (the symmetry group of classical physics) and the Poincaré group $P(1,3)$ (the symmetry group of relativistic physics).

Lie algebra of the group $P(1,4)$ is generated by 15 bases elements $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$ and P_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3, 4)$, which satisfy the commutation relations

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\nu\sigma} P_\mu - g_{\mu\sigma} P_\nu,$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho},$$

where $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1,\ g_{\mu\nu} = 0,$ if $\mu \neq \nu$.

Let's consider the following representation of the Lie algebra of the group $P(1,4)$:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad P_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$P_4 = -\frac{\partial}{\partial u}, \quad M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu,\ x_4 \equiv u.$$

In the following, we will use the next bases elements:

$$G = M_{04}, \quad L_1 = M_{23}, \quad L_2 = -M_{13}, \quad L_3 = M_{12},$$
$$P_a = M_{a4} - M_{0a}, \quad C_a = M_{a4} + M_{0a}, \quad (a = 1, 2, 3),$$
$$X_0 = \frac{1}{2}\left(P_0 - P_4\right), \quad X_k = P_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad X_4 = \frac{1}{2}\left(P_0 + P_4\right).$$

Nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the group $P(1,4)$ have been described in papers [24–28].

Lie algebra of the extended Galilei group $\widetilde{G}(1,3)$ is generated by the following bases elements:

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4.$$

In this paper, we use the full list of the nonconjugate (up to $P(1,4)$ - conjugation) subalgebras of the Lie algebra of the group $P(1,4)$, which can be found in [12].

3. On classification of symmetry reductions for the eikonal equation

In this section, we consider the eikonal equation of the form as follows:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1,$$

where $u = u(x),\ x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in M(1,3)$.

In 1982, Fushchych and Shtelen [29] proved that the maximally extensive local (in sense of Lie) invariance group of this equation was the conformal group $C(1,4)$ of the $(4+1)$ -dimensional Poincaré-Minkowski space with the metric

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2,\ x_4 = u.$$

It is known that the group $C(1,4)$ contains, as a subgroup, the group $P(1,4)$.

In this section, we present the results of classification of symmetry reductions of the eikonal equation for all nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the group $P(1,4)$ of dimensions 1 and 2.

3.1. Classification of symmetry reductions for the eikonal equation using one-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group $P(1,4)$

The results of classification of one-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the group $P(1,4)$ can be formulated as follows:

Proposition 1. *The Lie algebra of the group $P(1,4)$ contains* 20 *one-dimensional nonconjugate subalgebras of the type A_1.*

Consequently, we have 20 ansatzes, which are invariant with respect to the one-dimensional nonconjugate subalgebras of the type A_1.

By now, we have performed corresponding symmetry reduction of the eikonal equation to differential equations with a fewer number of independent variables using those ansatzes. Some classes of invariant solutions have been constructed.

Below, we present a short review of the results obtained. All the reduced equations are nonlinear. In 18 cases, the reduced equations are three-dimensional PDEs. Let's present some of the resuls obtained.

1. $\langle G \rangle$:

   Ansatz

   $$(x_0^2 - u^2)^{1/2} = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = x_1,\ \omega_2 = x_2,\ \omega_3 = x_3.$$

   Reduced equation

   $$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - 1 = 0, \qquad \varphi_i := \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

   Solution of the reduced equation

   $$\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -(1 - c_2^2 - c_3^2)^{1/2}\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_1.$$

   Solution of the eikonal equation

   $$(x_0^2 - u^2)^{1/2} = -(1 - c_2^2 - c_3^2)^{1/2}x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_1.$$

2. $\langle G + \alpha X_1,\ \alpha > 0\rangle$:

   Ansatz

   $x_1 - \alpha \ln(x_0 + u) = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = x_2,\ \omega_2 = x_3,$

   $\omega_3 = (x_0^2 - u^2)^{1/2}.$

   Reduced equation

   $\omega_3 \left(\omega_3(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 + 1) - 2\alpha\varphi_3\right) = 0.$

   Solutions of the reduced equation

   $$\omega_3 = 0, \quad \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3 +$$
   $$+\alpha \ln\left(\frac{2\alpha(\sqrt{(c_1^2 + c_2^2 + 1)\omega_3^2 + \alpha^2} + \alpha)}{\omega_3^2}\right) - \sqrt{(c_1^2 + c_2^2 + 1)\omega_3^2 + \alpha^2}.$$

   Solutions of the eikonal equation

   $$u = \pm x_0, \quad \alpha \ln\left(\frac{2\alpha(\sqrt{(c_1^2 + c_2^2 + 1)(x_0^2 - u^2) + \alpha^2} + \alpha)}{x_0 - u}\right) -$$
   $$-\sqrt{(c_1^2 + c_2^2 + 1)(x_0^2 - u^2) + \alpha^2} - x_1 + c_1x_2 + c_2x_3 + c_3 = 0.$$

   It should be noted that the next subalgebras belong to the Lie algebra of the extended Galilei group $\widetilde{G}(1,3) \subset P(1,4)$.

3. $\langle L_3\rangle$:

   Ansatz

   $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = x_0,\ \omega_2 = x_3,\ \omega_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$

   Reduced equation

   $\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 - 1 = 0.$

   Solution of the reduced equation

   $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (c_2^2 + c_3^2 + 1)^{1/2}\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + c_1.$

   Solution of the eikonal equation

   $u = (c_2^2 + c_3^2 + 1)^{1/2}x_0 + c_2x_3 + c_3(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + c_1.$

4. $\langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ \alpha > 0\rangle$:

   Ansatz

   $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$

   $\omega_3 = x_0 - \alpha \arctan \dfrac{x_1}{x_2}.$

Reduced equation

$\omega_2^2(\varphi_1^2+\varphi_2^2)+(\alpha^2-\omega_2^2)\varphi_3^2+\omega_2^2=0.$

Solution of the reduced equation

$$\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=i\alpha c_3\operatorname{arctanh}\frac{c_3\alpha}{((c_1^2-c_3^2+1)\omega_2^2+c_3^2\alpha^2)^{1/2}}-$$
$$-i((c_1^2-c_3^2+1)\omega_2^2+c_3^2\alpha^2)^{1/2}+c_3\omega_3+c_1\omega_1+c_4.$$

Solution of the eikonal equation

$$u=i\alpha c_3\operatorname{arctanh}\frac{c_3\alpha}{\sqrt{(c_1^2-c_3^2+1)(x_1^2+x_2^2)+c_3^2\alpha^2}}+$$
$$+c_3\left(x_0-\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}\right)-i\sqrt{(c_1^2-c_3^2+1)(x_1^2+x_2^2)+c_3^2\alpha^2}+c_1x_3+c_4.$$

5. $\langle L_3+\alpha X_3,\ \alpha>0\rangle$:

Ansatz

$$u=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\quad \omega_1=x_0,\ \omega_2=x_1^2+x_2^2,\ \omega_3=x_3+\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}.$$

Reduced equation

$\omega_2\varphi_1^2-4\omega_2^2\varphi_2^2-(\alpha^2+\omega_2)\varphi_3^2-\omega_2=0.$

Solution of the reduced equation

$$\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=-\alpha c_3\arctan\frac{((c_1^2-c_3^2-1)\omega_2-c_3^2\alpha^2)^{1/2}}{c_3\alpha}+c_1\omega_1+$$
$$+c_3\omega_3+((c_1^2-c_3^2-1)\omega_2-c_3^2\alpha^2)^{1/2}+c_4.$$

Solution of the eikonal equation

$$u=\sqrt{(c_1^2-c_3^2-1)(x_1^2+x_2^2)-\alpha^2c_3^2}+c_3\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}-$$
$$-c_3\alpha\arctan\left(\frac{\sqrt{(c_1^2-c_3^2-1)(x_1^2+x_2^2)-\alpha^2c_3^2}}{c_3\alpha}\right)+c_3x_3+c_1x_0+c_4.$$

6. $\langle L_3+2X_4\rangle$:

Ansatz

$$x_0-u+2\arctan\frac{x_2}{x_1}=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\quad \omega_1=x_0+u,$$
$$\omega_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ \omega_3=x_3.$$

Reduced equation

$\omega_2^2(4\varphi_1+\varphi_2^2+\varphi_3^2)+4=0.$

Solution of the reduced equation

$$\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=2i\sqrt{(c_1+c_3^2)\omega_2^2+1}-2i\,\mathrm{arctanh}\left(\sqrt{(c_1+c_3^2)\omega_2^2+1}\right)+$$
$$+c_1\omega_1+2c_3\omega_3+c_4.$$

Solution of the eikonal equation

$$x_0-u+2\arctan\frac{x_2}{x_1}=2i\sqrt{(c_3^2+c_1)(x_1^2+x_2^2)+1}-$$
$$-2i\,\mathrm{arctanh}\left(\sqrt{(c_3^2+c_1)(x_1^2+x_2^2)+1}\right)+c_1(x_0+u)+2c_3x_3+c_4.$$

7. $\langle P_3-2X_0\rangle$:

Ansatz

$$x_0-u+\frac{1}{6}(x_0+u)^3+x_3(x_0+u)=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\quad \omega_1=x_1,\ \omega_2=x_2,$$
$$\omega_3=(x_0+u)^2+4x_3.$$

Reduced equation

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+16\varphi_3^2-\omega_3=0.$$

Solution of the reduced equation

$$\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=c_1\omega_1+c_2\omega_2-\frac{1}{6}(\omega_3-c_1^2-c_2^2)^{3/2}+c_3.$$

Solution of the eikonal equation

$$x_0-u+\frac{1}{6}(x_0+u)^3+x_3(x_0+u)=c_1x_1+c_2x_2-\frac{1}{6}\left((x_0+u)^2+4x_3-\right.$$
$$\left.-c_1^2-c_2^2\right)^{3/2}+c_3.$$

In one case, the reduced equation is a two-dimensional PDE. Let's present the results obtained.

8. $\langle X_4\rangle$:

Ansatz

$$x_3=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\quad \omega_1=x_1,\ \omega_2=x_2,\ \omega_3=x_0+u.$$

Reduced equation

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+1=0.$$

Solution of the reduced equation

$$\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=-i(c_2^2+1)^{1/2}\omega_1+c_2\omega_2+c_1+f(\omega_3).$$

Solution of the eikonal equation

$$x_3=-i(c_2^2+1)^{1/2}x_1+c_2x_2+c_1+f(x_0+u),$$

where f is an arbitrary smooth function.

From the invariants of one subalgebra it is impossible to construct an ansatz, which reduces the eikonal equation. Let's present basis element of the subalgebra and corresponding functional basis of invariants.

9. $\langle X_4 - X_0 \rangle$:

$\omega_1 = x_0,\ \omega_2 = x_1,\ \omega_3 = x_2,\ \omega_4 = x_3$.

3.2. Classification of symmetry reductions of the eikonal equation using two-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group $P(1,4)$

The results of classification of two-dimensional nonconjugate subalgebras of the type $2A_1$ of the Lie algebra of the group $P(1,4)$ can be formulated as follows:

Proposition 2. *The Lie algebra of the group $P(1,4)$ contains 42 two-dimensional nonconjugate subalgebras of the type $2A_1$.*

Consequently, we have 42 ansatzes, which are invariant with respect to the two-dimensional nonconjugate subalgebras of the type $2A_1$.

By now, we have performed corresponding symmetry reduction of the eikonal equation to differential equations with a fewer number of independent variables using those ansatzes. Some classes of invariant solutions have been constructed.

Below, we present a short review of the results obtained. All the reduced equations are nonlinear.

In 32 cases, the reduced equations are two-dimensional PDEs. Let's present some of the resuls obtained.

1. $\langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ P_3 + C_3,\ \alpha > 0 \rangle$:

Ansatz

$$x_0 - \alpha \arctan \frac{x_1}{x_2} = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ \omega_2 = (u^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

Reduced equation

$$\left((\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 1)\omega_1^2 + \alpha^2\right)\omega_2^2 = 0, \qquad \varphi_i := \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Solutions of the reduced equation

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{(1 - c_2^2)\omega_1^2 - \alpha^2} + \alpha \arctan \frac{\alpha}{\sqrt{(1 - c_2^2)\omega_1^2 - \alpha^2}} + c_2\omega_2 + c_1, \quad \omega_2 = 0.$$

Solutions of the eikonal equation

$$x_0-\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}=\alpha\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{(1-c_2^2)(x_1^2+x_2^2)-\alpha^2}}+c_2(u^2+x_3^2)^{1/2}+$$
$$+\sqrt{(1-c_2^2)(x_1^2+x_2^2)-\alpha^2}+c_1,\quad u^2+x_3^2=0.$$

2. $\langle G+\alpha X_3,\ L_3,\ \alpha>0\rangle$:

Ansatz

$$x_3-\alpha\ln(x_0+u)=\varphi(\omega_1,\omega_2),\quad \omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ \omega_2=(x_0^2-u^2)^{1/2}.$$

Reduced equation

$$\omega_2(\omega_2\varphi_1^2-\omega_2\varphi_2^2-2\alpha\varphi_2+\omega_2)=0.$$

Solutions of the reduced equation

$$\omega_2=0,\quad \varphi(\omega_1,\omega_2)=\alpha\ln\left(2\alpha\frac{\sqrt{(c_1^2+1)\omega_2^2+\alpha^2}+\alpha}{\omega_2^2}\right)-$$
$$-\sqrt{(c_1^2+1)\omega_2^2+\alpha^2}+c_1\omega_1+c_2.$$

Solutions of the eikonal equation

$$x_0^2-u^2=0,\quad \alpha\ln\left(2\alpha\frac{\sqrt{(c_1^2+1)(x_0^2-u^2)+\alpha^2}+\alpha}{x_0-u}\right)-$$
$$-\sqrt{(c_1^2+1)(x_0^2-u^2)+\alpha^2}-x_3+c_1(x_1^2+x_2^2)^{1/2}+c_2=0.$$

It should be noted, that next subalgebras belong to the Lie algebra of the extended Galilei group $\widetilde{G}(1,3)\subset P(1,4)$.

3. $\langle L_3+\alpha(X_0+X_4),\ X_4,\ \alpha>0\rangle$:

Ansatz

$$x_0+u-\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}=\varphi(\omega_1,\omega_2),\quad \omega_1=x_3,\ \omega_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}.$$

Reduced equation

$$\omega_2^2\varphi_1^2+\omega_2^2\varphi_2^2+\alpha^2=0.$$

Solution of the reduced equation

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=c_1\omega_1+i\sqrt{c_1^2\omega_2^2+\alpha^2}-i\alpha\,\mathrm{arctanh}\,\frac{\alpha}{\sqrt{c_1^2\omega_2^2+\alpha^2}}+c_2.$$

Solution of the eikonal equation

$$u=c_1x_3+i\sqrt{c_1^2(x_1^2+x_2^2)+\alpha^2}-i\alpha\,\mathrm{arctanh}\,\frac{\alpha}{\sqrt{c_1^2(x_1^2+x_2^2)+\alpha^2}}-$$

$$-x_0 + \alpha \arctan \frac{x_1}{x_2} + c_2.$$

4. $\langle P_1,\ P_2 - X_2 - \beta X_3,\ \beta > 0\rangle$:

   Ansatz

$$\frac{x_1^2}{x_0 + u} + \frac{x_2^2}{x_0 + u + 1} + 2u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x_0 + u,$$

$$\omega_2 = x_3 - \frac{\beta x_2}{x_0 + u + 1}.$$

   Reduced equation

$$(\omega_1 + 1)^2 \omega_1^4 \left((\omega_1 + 1)^2(\varphi_2^2 - 4\varphi_1 + 4) + \beta^2 \varphi_2^2\right) = 0.$$

   Solutions of the reduced equation

$$\omega_1 + 1 = 0,\ \omega_1 = 0,\ \varphi(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{c_2^2}{4} + 1\right)\omega_1 + c_2\omega_2 - \frac{\beta^2 c_2^2}{4(\omega_1 + 1)} + c_1.$$

   Solutions of the eikonal equation

$$u = -1 - x_0, \quad u = -x_0, \quad \frac{x_1^2}{x_0 + u} + 2u = \left(\frac{c_2^2}{4} + 1\right)(x_0 + u) -$$

$$-\frac{(\beta c_2 + 2x_2)^2}{4(x_0 + u + 1)} + c_2 x_3 + c_1.$$

   In 5 cases, the reduced equations are ordinary differential equations. Let's present some of the resuls obtained.

5. $\langle L_3 + \alpha X_3,\ X_4,\ \alpha > 0\rangle$:

   Ansatz

$$x_3 + \alpha \arctan \frac{x_1}{x_2} = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x_0 + u,\ \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

   Reduced equation

$$(\varphi_2^2 + 1)\omega_2^2 + \alpha^2 = 0.$$

   Solution of the reduced equation

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = i\alpha \operatorname{arctanh} \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_2^2 + \alpha^2}} - i\sqrt{\omega_2^2 + \alpha^2} + f(\omega_1).$$

   Solution of the eikonal equation

$$x_3 + \alpha \arctan \frac{x_1}{x_2} = i\alpha \operatorname{arctanh} \frac{\alpha}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \alpha^2}} - i\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \alpha^2} +$$

$$+ f(x_0 + u),$$

   where f is an arbitrary smooth function.

From the invariants of 5 subalgebras it is impossible to constract ansatzes which reduce the eikonal equation. Let's present bases elements of some subalgebra and corresponding functional basis of invariants.

$\langle X_1\rangle \oplus \langle X_4 - X_0\rangle : \quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3$.

The results of classification of two-dimensional nonconjugate subalgebras of the type A_2 of the Lie algebra of the group $P(1,4)$ can be formulated as follows:

Proposition 3. *The Lie algebra of the group $P(1,4)$ contains 7 two-dimensional nonconjugate subalgebras of the type A_2.*

Consequently, we have 7 ansatzes, which are invariant with respect to two-dimensional nonconjugate subalgebras of the type A_2.

By now, we have performed corresponding symmetry reduction of the eikonal equation to differential equations with a fewer number of independent variables using those ansatzes. Some classes of invariant solutions have been constructed.

Below, we present a short review of the results obtained. All the reduced equations are nonlinear.

In 6 cases the reduced equations are two-dimensional PDEs. Let's present some of the resuls obtained.

1. $\langle -G - \dfrac{1}{\lambda}L_3,\ X_4,\ \lambda > 0\rangle :$

   Ansatz

   $\ln(x_0 + u) + \lambda \arctan \dfrac{x_1}{x_2} = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x_3,\ \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$

   Reduced equation

   $\omega_2^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \lambda^2 = 0.$

   Solution of the reduced equation

   $$\varphi(\omega_1, \omega_2) = c_1\omega_1 - i\sqrt{c_1^2\omega_2^2 + \lambda^2} + i\lambda \,\mathrm{arctanh}\, \frac{\lambda}{\sqrt{c_1^2\omega_2^2 + \lambda^2}} + c_2.$$

   Solution of the eikonal equation

   $$\ln(x_0 + u) = c_1x_3 - i\sqrt{c_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \lambda^2} - \lambda \arctan \frac{x_1}{x_2} + c_2 +$$

   $$+ i\lambda \,\mathrm{arctanh}\, \frac{\lambda}{\sqrt{c_1^2(x_1^2 + x_2^2) + \lambda^2}}.$$

2. $\langle -G-\alpha X_1,\ X_4,\ \alpha>0\rangle$:

Ansatz

$x_1-\alpha\ln(x_0+u)=\varphi(\omega_1,\omega_2),\quad \omega_1=x_2,\quad \omega_2=x_3.$

Reduced equation

$\varphi_1^2+\varphi_2^2+1=0.$

Solution of the reduced equation

$\varphi(\omega_1,\omega_2)=i(c_2^2+1)^{1/2}\omega_1+c_2\omega_2+c_1.$

Solution of the eikonal equation

$x_1-\alpha\ln(x_0+u)=i(c_2^2+1)^{1/2}x_2+c_2x_3+c_1.$

3. $\langle -G-\dfrac{\alpha}{\lambda}X_3-\dfrac{1}{\lambda}L_3,\ X_4,\ \alpha>0,\lambda>0\rangle$:

Ansatz

$\ln(x_0+u)+\lambda\arctan\dfrac{x_1}{x_2}=\varphi(\omega_1,\omega_2),\quad \omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$

$\omega_2=x_3+\alpha\arctan\dfrac{x_1}{x_2}.$

Reduced equation

$\omega_1^2(\varphi_1^2+\varphi_2^2)+(\alpha\varphi_2-\lambda)^2=0.$

Solution of the reduced equation

$\varphi(\omega_1,\omega_2)=i\sqrt{c_2^2\omega_1^2+(\alpha c_2-\lambda)^2}+c_2\omega_2+c_1-$

$-i(\alpha c_2-\lambda)\,\mathrm{arctanh}\,\dfrac{\alpha c_2-\lambda}{\sqrt{c_2^2\omega_1^2+(\alpha c_2-\lambda)^2}}.$

Solution of the eikonal equation

$\ln(x_0+u)=i\sqrt{c_2^2(x_1^2+x_2^2)+(\alpha c_2-\lambda)^2}+(\alpha c_2-\lambda)\arctan\dfrac{x_1}{x_2}-$

$-i(\alpha c_2-\lambda)\,\mathrm{arctanh}\,\dfrac{\alpha c_2-\lambda}{\sqrt{c_2^2(x_1^2+x_2^2)+(\alpha c_2-\lambda)^2}}+c_2x_3+c_5.$

4. $\langle -G-\alpha X_1,\ P_3,\ \alpha>0\rangle$:

Ansatz

$x_1-\alpha\ln(x_0+u)=\varphi(\omega_1,\omega_2),\quad \omega_1=x_2,\ \omega_2=(x_0^2-x_3^2-u^2)^{1/2}.$

Reduced equation

$\omega_2\left(\omega_2(\varphi_1^2-\varphi_2^2+1)-2\alpha\varphi_2\right)=0.$

Solutions of the reduced equation

$$\omega_2 = 0,\ \varphi(\omega_1, \omega_2) = \alpha \ln \left(2\alpha \frac{\sqrt{(c_1^2+1)\omega_2^2+\alpha^2}+\alpha}{\omega_2^2} \right) -$$
$$-\sqrt{(c_1^2+1)\omega_2^2+\alpha^2} + c_1\omega_1 + c_2.$$

Solutions of the eikonal equation

$$x_0^2 - x_3^2 - u^2 = 0, \quad x_1 - \alpha \ln(x_0 + u) =$$
$$= \alpha \ln \left(2\alpha \frac{\sqrt{(c_1^2+1)(x_0^2-x_3^2-u^2)+\alpha^2}+\alpha}{x_0^2-x_3^2-u^2} \right) -$$
$$-\sqrt{(c_1^2+1)(x_0^2-x_3^2-u^2)+\alpha^2} + c_1x_2 + c_2.$$

From the invariants of one subalgebra it is impossible to constract ansatz which reduces the eikonal equation. Let's present bases elements of the subalgebra and corresponding functional basis of invariants.

$$\langle -G,\ X_4 \rangle : \quad \omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \omega_3 = x_3\ .$$

1. Lie S. *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.* Leipz. Berichte, I. 53. (Reprinted in Lie, S., Gesammelte Abhandlungen, Vol. 4, Paper IX.), 1895.

2. Ovsiannikov L.V. *Groups and invariant-group solutions of differential equations.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 1958, **118** (3), 439–442. (Russian)

3. Ovsiannikov L.V. *Group properties of the equation of nonlinear heat conductivity.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 1959, **125** (3), 492–495. (Russian)

4. Ovsiannikov L.V. Group properties of differential equations. Izdat. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1962. (Russian), (English translation by G. Bluman, 1967.)

5. Ovsiannikov L.V. Lectures on the theory of group properties of differential equations. (Russian), Novosibirsk. Gos. Univ., Novosibirsk, 1966, 131 pp. (Translated by E. D. Avdonina and N. H. Ibragimov. Edited and with a preface by Nail H. Ibragimov. Higher Education Press, Beijing; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.)

6. Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. Nauka, Moscow, 1978. (Russian). (English translation in Academic Press, New York, 1982).

7. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1986.

8. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. *Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group.* J. Math. Phys. 1975, **16** (8), 1597–1614.

9. Patera J., Winternitz P. *Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras.* J. Math. Phys. 1977, **18** (7), 1449–1455.

10. Olver P.J. *Symmetry groups and group invariant solutions of partial differential equations.* J. Differential Geom. 1979, **14** (4), 497–542.

11. Olver P.J., Rosenau Ph. *Group-invariant solutions of differential equations.* SIAM J. Appl. Math. 1987, **47** (2), 263–278.

12. Fushchich V.I., Barannik L.F., Barannik A.F. Subgroup analysis of Galilei and Poincaré groups and the reduction of nonlinear equations. Naukova Dumka, Kiev, 1991.

13. Lagno V.I., Spichak S.V., Stognii V.I. Symmetry analysis of equations of evolution type. (Ukrainian). Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its Applications, 45. Natsionalna Akademiya Nauk Ukraini, Institut Matematiki, Kiev, 2002.

14. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. *Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations.* J. Math. Phys. 1984, **25** (4), 791–806.

15. Fushchich V.I., Fedorchuk V.M., Fedorchuk I.M. *Subgroup structure of the generalized Poincaré group and exact solutions of certain nonlinear wave equations*, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kyiv, Inst. Mat. Preprint 1986, no. 27, 36 pp. (Russian)

16. Fedorchuk V.M., Fedorchuk I.M., Leibov O.S. *Reduction of the Born-Infeld, the Monge-Ampere and the eikonal equation to linear equations.* Dokl. Akad. Nauk Ukrainy 1991, (11), 24–27.

17. Fedorchuk V. *Symmetry Reduction and Exact Solutions of the Euler–Lagrange–Born–Infeld, Multidimensional Monge–Ampere and Eikonal Equations.* Symmetry in nonlinear mathematical physics, Vol. 1 (Kiev, 1995). J. Nonlinear Math. Phys. 1995, **2** (3–4), 329–333.

18. Fedorchuk V.M. *Symmetry reduction and some exact solutions of a nonlinear five-dimensional wave equation.* Ukr. Mat. Zh. 1996, **48** (4), 573–576; Translated: Ukrain. Math. J. 1996, **48** (4), pp. 636–640.

19. Nikitin A.G., Kuriksha O. *Group analysis of equations of axion electrodynamics.* Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems 2011, Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus, Nicosia, 152–163.

20. Nikitin A.G., Kuriksha O. *Invariant solutions for equations of axion electrodynamics.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012, **17** (12), 4585–4601.

21. Fedorchuk V., Fedorchuk V. *On Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation.* Symmetry 2016, **8** (6), Art. 51, 32 pp./ doi: 10.3390/sym8060051.

22. Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I. *On classification of the low-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group* $P(1,4)$. Proceedings of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine 2006, **3** (2), 302–308.

23. Fushchich W.I., Nikitin A.G. *Reduction of the representations of the generalized Poincare algebra by the Galilei algebra.* J. Phys. A: Math. and Gen., 1980, **13** (7), 2319–2330.

24. Fedorchuk V.M. *Continuous subgroups of the inhomogeneous de Sitter group* $P(1,4)$, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kyiv, Inst. Mat. Preprint 1978, no. 78.18, 36 pp. (Russian)

25. Fedorchuk V.M. *Splitting subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group* $P(1,4)$. Ukr. Mat. Zh. 1979, **31** (6), 717–722; Translated: Ukrain. Math. J. 1979, **31** (6), pp. 554–558.

26. Fedorchuk V.M. *Nonsplitting subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group* $P(1,4)$. Ukr. Mat. Zh. 1981, **33** (5), 696–700; Translated: Ukrain. Math. J. 1981, **33** (5), pp. 535–538.

27. Fedorchuk V.M., Fushchych W.I. *On subgroups of the generalized Poincaré group.* Group-theoretical methods in physics: Proc. of the Internat. seminar. Zvenigorod, v. 1. Nauka, Moscow, 1980, 61–66.

28. Fushchich W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M. *Continuous subgroups of the Poincare group* $P(1,4)$. J. Phys. A: Math. and Gen. 1985, **18** (14), 2893–2899.

29. Fushchich W.I., Shtelen W.M. *The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation.* Lett. Nuovo Cimento 1982, **34** (16), 498–502.

Василь Федорчук, Володимир Федорчук

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ СИМЕТРІЙНИХ РЕДУКЦІЙ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Ми пропонуємо досліджувати взаємозв'язок між структурними властивостями неспряжених підалгебр того самого рангу алгебр Лі груп симетрії диференціальних рівнянь із частинними похідними і властивостями відповідних їм редукованих рівнянь. Представлено деякі результати, що стосуються класифікації симетрійних редукцій рівняння ейконала.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача

Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь

Збірник наукових праць,
присвячений 80-річчю
Богдана Йосиповича Пташника

(під заг. ред. Кушніра Р.М., Пелиха В.О.)

Наукове видання

Підписано до друку 21.09.2017. Формат $70 \times 100 \frac{1}{16}$.
Папір офсетний. Умовн. друк. арк. 20,64. Гарнітура LaTeX
Зам. № 09-3/17. Тираж 120 прим.

Видруковано у Дослідно-видавничому центрі
Наукового товариства ім. Шевченка,
79008, Львів, вул. Винниченка, 26,
тел. (032) 276–51–55

Свідоцтво про внесення до
Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
ДК № 884 від 04.04.2002 р.