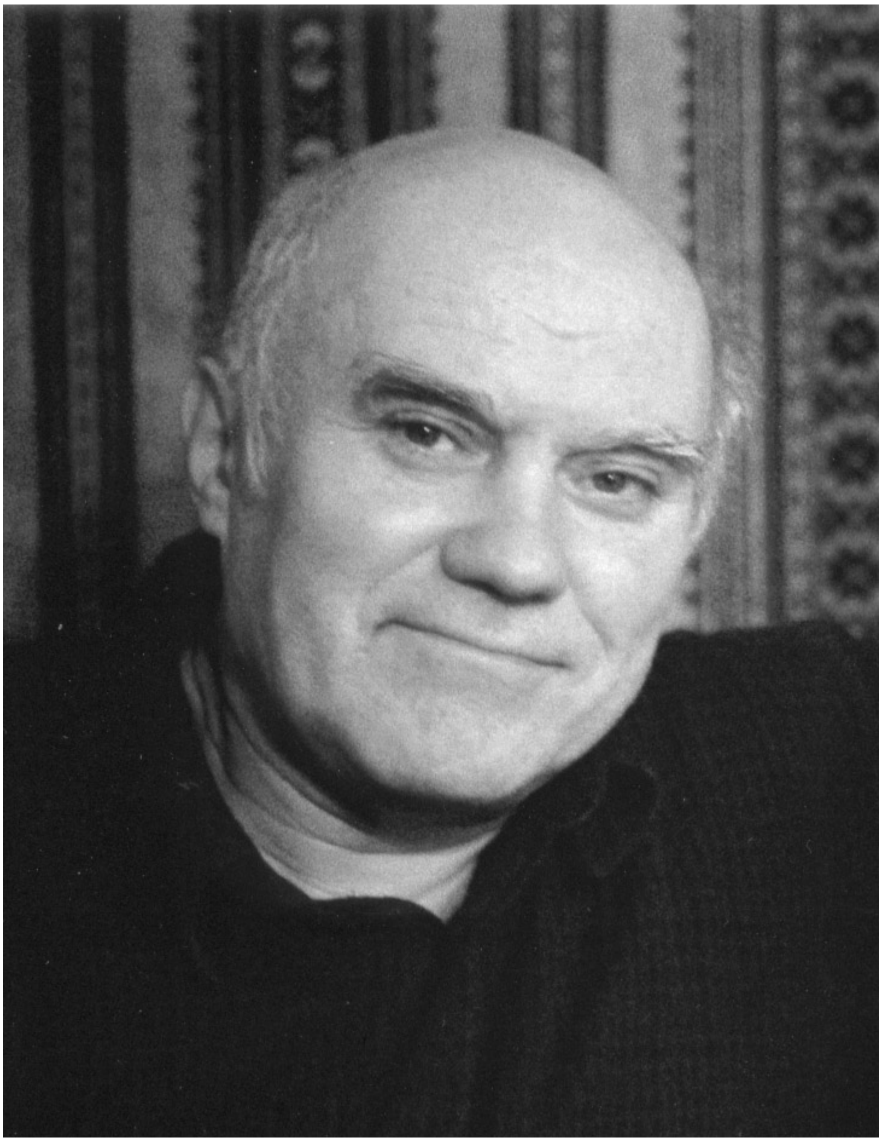
Ігор-Петро Сироїд

КОМПЛЕКСНИЙ МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСАМОСПРЯЖЕНИХ ПАР ЛАКСА ДЛЯ СИСТЕМИ КОРТЕВЕҐА – ДЕ ФРІЗА



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача

Ігор-Петро Сироїд

КОМПЛЕКСНИЙ МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСАМОСПРЯЖЕНИХ ПАР ЛАКСА ДЛЯ СИСТЕМИ КОРТЕВЕҐА – ДЕ ФРІЗА

Львів – 2005

УДК 517.988.6

Комплексний метод оберненої задачі розсіяння і дослідження несамоспряжених пар Лакса для системи Кортвеґа – де Фріза / І.-П. Сироїд. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – 191 с.

Монографія присвячена комплексному рівнянню Кортевеґа – де Фріза і узагальненню цього рівняння. Автор використовує певну модифікацію методу оберненої задачі розсіяння (МОЗР), запропонованого у 1967 році для розв'язання задачі Коші для рівняння Кортевеґа – де Фріза у просторі дійсних функцій. Встановлено зв'язок між розв'язністю досліджуваної задачі та спектральністю деякого оператора Шредінґера у відповідному гільбертовому просторі квадратично інтегровних функцій. Знайдено умови на (загалом кажучи, комплексний) потенціал цього оператора, за яких він є спектральним за Данфордом – Бейдом.

Крім оригінальних результатів автора, в монографії наведено детальний огляд літератури з функціонального аналізу та гідродинаміки, що стосується МОЗР.

Для аспірантів та наукових працівників – спеціалістів у галузі функціонального аналізу.

Бібліогр.: 379 найм.

Complex method of the inverse scattering problem and investigation of nonselfadjoint Lax pairs for the Corteveg – de Vries system / I.-P. Syroid. – L'viv: Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 2005. – 191 p.

The monograph is devoted to the complex Corteveg – de Vries equation and its generalization. The author uses some modifications of Inverse Scattering Problem Method (ISPM) proposed in 1967 for the solving of Cauchy problem for Corteveg – de Vries equation in the space of real functions.

Connections are established between solvability of investigated problem and spectralness of some Schrödinger operator in the corresponding Hilbert space of square integrable functions. The conditions are found concerning (in general case, complex-valued) potential of this operator, under which it is spectral in the sense of Dunford – Bade.

In addition to the original author's results in the monograph a detailed survey of literature on functional analysis and hydrodynamics concerning ISPM is given.

For postgraduate students and researchers, specialists in the field of functional analysis.

Ref.: 379 items.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *Є. В. Черемних*,
д-р фіз.-мат. наук, проф. *Р. М. Тацій*

ISBN 966-02-3736-7

ЗМІСТ

СЛОВО ВІД РЕДАКТОРА

Запропонована книга, крім наукової вартості, має свій моральний вимір. І не лише тому, що є спробою зробити доступним творчий доробок Автора і в такий спосіб віддати йому належне. Річ у тому, що ця книга − промовистий приклад пошуку власного шляху в науці, наполегливого і послідовного, сповненого терпіння і віри.

Не буду вдаватися до біографічних деталей, зауважу лише, що в 1969 р. Ігор Сироїд вступив до аспірантури Львівського державного (тепер − національного) університету імені Івана Франка. Його науковим керівником був відомий у світі вчений-математик, професор Владислав Елійович Лянце. Ігор Петрович надзвичайно шанував свого Вчителя, але, на жаль чи на щастя, не завжди прислухався до його порад.

Маю на увазі передусім ось що. Десь у 1975 чи 1976 році він, тоді ще молодший науковий співробітник Львівського філіалу математичної фізики Інституту математики АН УРСР (тепер − Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України), був учасником однієї престижної наукової конференції, присвяченої проблемам нелінійного аналізу, яка проходила у Києві. Після того в його лексиконі з'явилися слова «нелінійний функціональний аналіз», «рівняння Кортевеґа − де Фріза», «солітон». Здавалося, що учень зраджує Вчителя. Але виявилося, що це не так, а швидше навпаки, розвиває його ідеї. У цьому переконують основні наукові результати Ігоря Сироїда.

У процесі підготовки цієї книги до друку редактор старався зберегти авторський стиль, живий спосіб його мислення і робив лише незначні поправки, усуваючи, скажімо, суто «дисертаційні» моменти тексту, який оформив сам Автор, сподіваючись на захист докторської дисертації. Сталося інакше. Несподівано розімкнулося життєве коло і несуттєвим зробилося все, крім Істини.

Як редактор, я усвідомлюю, що праця, яку споряджено в дорогу до читача, не позбавлена недоліків, − Автор − колишній альпініст − ще піднімався на свою вершину. І так само усвідомлюю, що книга Ігоря Сироїда буде корисною для багатьох математиків, бо вершина насправді існує, бо життя коротке, а наука вічна.

Олег Сторож,
доктор фізико-математичних наук, професор

ВСТУП

Метод оберненої задачі розсіяння (МОЗР) започаткований у статті Ґарднера (C.S. Gardner), Ґріна (J.M. Greene), Краскала (M.D. Kruskal), М'юри (R.M. Miura) [1]. Автори статті [1] запропонували МОЗР для розв'язання задачі Коші для рівняння Кортевеґа − де Фріза в просторі дійсних функцій.

Наше дослідження стосується формулювання комплексного методу оберненої задачі розсіяння (КМОЗР) − див. І.-П.П. Сироїд [254] і Розділ 4 цієї праці. Задачі обґрунтування КМОЗР автор ставить і розв'язує як задачі аналізу (теорії операторів). А саме, досліджує несамоспряжені пари Лакса, що відповідають КМОЗР − див. Розділи 3, 4, 7, 10.

У роботі узагальнено МОЗР [1] (див. Розділ 9) на випадок півосі та істотно розширено застосування цього методу (див. Розділ 6).

Зауваження. Поряд з назвою *метод оберненої задачі розсіяння* в літературі (див. [59]) вживається назва *обернене перетворення розсіяння* (*Inverse Scattering Transform*) − яку в 1974 році запровадили М. Абловіц, Д. Кауп, А. Ньюел, Г. Сіґур (див. пояснення в [59, с. 62]), а також *метод оберненого перетворення розсіяння* (*The Method of Inverse Scattering Transform*).

Істотним є те, що МОЗР є методом лінеаризації в розв'язанні задачі Коші для нелінійного рівняння Кортевеґа − де Фріза. Бурхливий розвиток МОЗР пояснюється тією обставиною, що запропонована в [1] лінеаризація приводить до формул для точних розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевеґа − де Фріза (принаймні для солітонних і N-солітонних розв'язків).

Відкриттю методу оберненої задачі розсіяння передували дослідження М.О. Лаврентьєва в теорії довгих хвиль. У київський період своєї творчості М.О. Лаврентьєв [ГД 1] звів задачу про усталений рух важкої рідини в каналі скінченної глибини до граничної задачі теорії конформних відображень. Розв'язання цієї задачі містить, зокрема, доведення існування довгої ізольованої (поодинокої) поверхневої нелінійної хвилі в каналі на мілкій воді.

У 1964−1965 рр. М. Краскал і Н. Забуський за допомогою чисельного моделювання відкрили пружний характер взаємодії солітонів моделі Кортевеґа − де Фріза. На цьому шляху були відкриті закони збереження моделі Кортевеґа – де Фріза, а в 1967 році **колектив авторів, яким керував М. Краскал, відкрив МОЗР [1].**

П.Д. Лакс [7] опублікував строге доведення обчислень М. Краскала і Н. Забуського стосовно взаємодії солітонів і запропонував зображення рівняння Кортевеґа – де Фріза за допомогою операторної дужки $[\cdot,\cdot]$. Зображення Лакса для рівняння КдФ має вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, M].$$

Зауважимо, що в [7] досліджено множину операторів $\{M_i\}$, яка надалі дістала назву ієрархії Лакса (деталі див. нижче).

В.Є. Захаров і А.Б. Шабат [8, 9] використали зображення Лакса для дослідження нелінійного рівняння Шредінґера і знайшли солітони цього рівняння за допомогою МОЗР. **Відкриття В.Є. Захарова і А.Б. Шабата привело до розуміння того, що МОЗР можна застосовувати до широкого кола рівнянь математичної фізики за умови наявності відповідних пар Лакса.** На цьому шляху вдалося дослідити як відомі солітонні рівняння, так і відкрити багато нових рівнянь, які мають солітонні розв’язки, а також широкий вибір інтегралів збереження.

В.Є. Захаров і Л.Д. Фаддєєв [16], а також К.С. Ґарднер в 1971 році побудували гамільтонове тлумачення рівняння Кортевеґа – де Фріза.

Зауважимо, що Мозер (J. Moser) [72, 151] істотно вдосконалив теорію інтегровних гамільтонових систем.

М.М. Боголюбов (мол.), А.М. Курбатов, А.К. Прикарпатський і В.Г. Самойленко [17] дослідили нелінійну модель типу Шредінґера (НШ). Тут йдеться про закони збереження, гамільтонові структури і повну інтегровність моделі типу НШ. До цього напряму дослідження динамічних систем примикають праці М.М. Притули і Ю.М. Сидоренка.

Алгебричні аспекти інтегровності нелінійних динамічних систем на многовидах досліджують А.К. Прикарпатський та І.В. Микитюк.

За ініціативи і сприяння акад. О.С. Парасюка у Києві створено науковий відділ, який запроваджує ідеї і методи М.С. Лі для симетричного аналізу і отримання точних розв’язків нелінійних і лінійних рівнянь математичної фізики. Цей напрям представляють В.І. Фущич, А.Г. Нікітін, В.М. Штелень, Н.І. Сєров, Р.З. Жданов, В.М. Федорчук, Р.М. Черніга та їх учні.

Видатне місце в дослідженні періодичної задачі для рівняння КдФ займають дослідження В.О. Марченка [11, 12], С.П. Новікова [10, 22, 25, 26, 40, 41], П.Д. Лакса [13]. Під впливом С.П. Новікова виконали ряд праць Б.А. Дубровін [23−26], А.Р. Ітс і В.Б. Матвєєв [27], І.М. Крічевер [38, 39, 51]. Сюди примикає праця Б.М. Левітана [42]. Істотний вплив на цей напрям мають дослідження Є.Д. Бєлоколоса, В.З. Енольського, В.Б. Матвєєва, А.І. Бобенка [28, 29], які стосуються алгебро-геометричних принципів суперпозиції скінченнозонних розв'язків інтегровних нелінійних рівнянь.

Є.Я. Хруслов [14] дослідив асимптотику при $t \to \infty$ розв'язку $u(x,t)$ задачі Коші для рівняння Кортевеґа − де Фріза з початковими умовами типу східця. Використовуючи МОЗР, Є.Я. Хруслов строго обґрунтував явище народження нескінченного числа солітонів при $t \to \infty$ в околі фронту розв'язку $u(x,t)$ і запропонував формули для обчислення відповідної області переднього фронту. Ця праця дозволила відкрити солітони, що породжуються неперервним спектром.

Є.Я. Хруслову і В.П. Котлярову [95, 96] належить відкриття механізмів виникнення солітонів, що породжуються неперервним спектром для нелінійного рівняння Шредінґера.

У праці [75] Є.Я. Хруслов і Д. Шепельський висвітлили прикладну проблему застосування методу оберненої задачі розсіяння в теорії електромагнітного зондування.

Зауважимо (див. [1]), що задачу поведінки розв'язків рівняння Кортевеґа − де Фріза при $t \to \pm\infty$ на рівні чисельного експерименту почали вивчати ще вчені з Прінстонської лабораторії М. Краскала. Обчислення показали, що початковій умові задачі Коші у випадку N власних значень відповідає розв'язок, який розпадається при $t \to \pm\infty$ на N солітонів (що не взаємодіють між собою при дуже великих t). Ця задача зацікавила багатьох дослідників − див., додатково до вже згаданих статей [1, 7, 14, 95, 96, 75], праці В.Є. Захаров, А.Б. Шабат [8], Sh. Tanaka [98], В.Є. Захаров [15], E.Ya. Khruslov, St. Holder [76]. Методом Уізема цю задачу дослідили А.В. Гуревич і Л.П. Пітаєвський.

Помітний внесок у розвиток теорії багатовимірних обернених задач розсіяння (з основним акцентом на рівняння гіперболічного типу) зробив Л.П. Нижник [19, 45, 46, 143].

У статті В.Є. Захаров, А.Б. Шабат [20] подано схему інтегрування нелінійних рівнянь математичної фізики, яка спочатку дістала назву *метод Шабата або метод Шабата − Захарова*. Цей метод є розвитком ідеї МОЗР на випадок інтегрування нелінійного рівняння в просторах функцій, що не спадають на нескінченності. При цьому основна ідея методу

Шабата – Захарова така: лінійні оператори зі змінними коефіцієнтами можна отримати за допомогою операторів перетворення Дельсарта – Левітана – Марченка – Левіна з операторів із постійними коефіцієнтами за допомогою додаткової умови спільного спектра для кожної пари операторів – див. В.Є. Захаров [21], – у якій запропоновано називати цей метод *методом одягання* (використовуючи мову теоретичної фізики). Істотною перевагою методу одягання [21] є можливість поширення цього методу на випадок багатьох змінних. Задачі побудови багатовимірних нелінійних інтегровних систем і їх розв'язків присвячена також праця В.Є. Захарова і С.В. Манакова [117].

В.О. Марченко у книзі [18] створив новий метод знаходження розв'язків нелінійного рівняння (наприклад, рівняння Кортевеґа – де Фріза), який ґрунтується на дослідженні відповідних операторних алгебр.

Огляд праць, що стосуються застосування математичного аналізу в розвитку МОЗР, продовжується в Розділі 1.

Мета дослідження і основні задачі.
1. Система Кортевеґа – де Фріза

У цій праці замість класичного рівняння Кортевеґа – де Фріза [1, 62] досліджуємо (за винятком Розділів 6, 9) систему рівнянь Кортевеґа – де Фріза. Систему диференціальних рівнянь вигляду

$$
\begin{aligned}
u_t &= 6uu_x - 6vv_x - u_{xxx},\\
v_t &= 6u_xv + 6uv_x - v_{xxx}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

називаємо системою рівнянь Кортевеґа – де Фріза. Підставою для цього означення є еквівалентність системи (1) комплексному рівнянню Кортевеґа – де Фріза

$$
V_t = 6VV_x - V_{xxx}, \tag{2}
$$

якщо $V = u + i\,v$, де u, v – дійсні функції, а $i^2 = -1$.

При $v = 0$ отримуємо дійсне рівняння Кортевеґа – де Фріза

$$
u_t = 6uu_x - u_{xxx}.
$$

Комплексне рівняння Кортевеґа – де Фріза (КдФ) і узагальнення цього рівняння – основний предмет нашого дослідження. Винятками є лише Розділи 6, 9, 10, у яких показано, що «звуження» методів автора на дійсний випадок також є плідним.

Рівняння Кортевеґа – де Фріза (модель КдФ) застосовують у теорії нелінійних хвиль на мілкій воді, гідромагнітних хвиль в холодній плазмі, іон-акустичних хвиль і акустичних хвиль в ангармонійних кристалах – див., наприклад, [1, 2, 6, 7, 15, 32, 52, 56, 57, 58, 59, 60, 62].

З огляду на застосування в гідродинаміці виникла потреба зіставити основні результати стосовно розв'язків рівняння Кортевеґа – де Фріза (отриманих за допомогою безвідбивних початкових функцій – потенціалів) з відповідними результатами теорії довгих хвиль, отриманими раніше в гідродинаміці. Запропоноване зіставлення *передбачає виконання наближеної умови сталого тиску на вільній поверхні рідини з теорії довгих хвиль на мілкій воді. У цьому зіставленні використовуємо абсолютні величини (модулі) безвідбивних потенціалів.* У Розділі 2 використовуються формули М.О. Лаврентьєва для параметричної апроксимації довгої хвилі абсолютними величинами (модулями) стаціонарних безвідбивних потенціалів теорії розсіяння для рівняння Кортевеґа – де Фріза.

2. Комплексний параметричний метод оберненої задачі розсіяння для загальної системи Кортевеґа – де Фріза

Предметом Розділу 4 є формули, що узагальнюють МОЗР.

Запропоновані формули застосовано для знаходження комплекснозначних розв'язків початкової задачі Коші для загального комплексного рівняння Кортевеґа – де Фріза (системи рівнянь КдФ) (4.4), (4.6). *При цьому досліджуємо пряму і обернену задачі для несамоспряженого одновимірного оператора Шредінґера з комплексним потенціалом. Техніку розв'язання обернених задач розсіяння для несамоспряжених операторів створив В.Е. Лянце* [162] *і його учні* [166], [254].

Запропоноване в Розділі 4 узагальнення методу оберненої задачі розсіяння належить автору і опубліковане в статті [254].

Параметризуємо рівняння (2) таким чином:

$$V_t = c_0(6VV_x - V_{xxx}) + 4c_1V_x, \tag{3}$$

де c_0 і c_1 – параметри, які можуть приймати комплексні або дійсні значення. Зрозуміло, що рівняння (3) є загальнішим, ніж рівняння (2). При $c_0 = 1$ і $c_1 = 0$ рівняння (3) перетворюється в рівняння (2).

Наступний крок полягає в тому, щоб застосувати пари Лакса [7]. Використовуючи комплексифікацію пар Лакса, отримуємо загальне комплексифіковане рівняння КдФ:

$$V_t = i\,[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1], \tag{4}$$

де $V_t = \dfrac{\partial l}{\partial t}$; $l = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ − формальний одновимірний оператор Шредінґера на всій осі, що параметрично залежить від t, а $i^2 = -1$, $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ − вектор комплексних параметрів. Множину операторів $\{M_i\}$ називаємо ієрархією Лакса для моделі КдФ і задаємо ці оператори таким чином:

$$M_{2i+1} = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i}\left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k\right),$$

де $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$; $a_k = a_k(V, V_x, V_{xx}, \ldots; t)$ − многочлени від функції $V(x,t)$ і її похідних за змінною x. Зауважимо також, що в [7] замість оператора iD вживається оператор $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Позначимо

$$M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1. \tag{5}$$

Комплексифікована пара Лакса L, M є парою формальних несамоспряжених операторів.

У процесі дослідження комплексних солітонних многовидів КдФ виявилося [254], що досить використовувати лише формули, які відповідають випадку ***спектрального в сенсі Данфорда − Бейда*** несамоспряженого одновимірного оператора Шредінґера. Ця обставина пов'язана з властивостями стійкості солітонних многовидів моделі Кортевеґа − де Фріза і погоджується з думкою Б.Б. Кадомцева і В.І. Петвіашвілі [6]. Солітонні і N-солітонні розв'язки рівняння КдФ є безвідбивними потенціалами оператора Шредінґера, що й відповідає випадку спектральності в сенсі Данфорда − Бейда цього оператора.

Комплексне параметричне узагальнення МОЗР (Розділ 4) полягає в розв'язанні задачі Коші для загального параметричного рівняння КдФ (4) з початковою умовою

$$V(x,0) = V_0(x) \tag{6}$$

у просторі комплекснозначних функцій, конкретніше, в реалізації такого алгоритму:

I) Розв'язання прямої задачі розсіяння для несамоспряженого оператора Шредінґера L, що породжується в комплексному просторі $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, диференціальним виразом

$$l(y)(x) = -y''(x) + V_0(x)y(x)$$

і областю визначення $D(L)$, до якої належать всі функції $y \in L_2(\mathbb{R})$, для яких похідна y' існує, абсолютно неперервна в кожному скінченному проміжку і $l(y) \in L_2(\mathbb{R})$.

II) Знаходження формул еволюції для даних розсіяння, що відповідають оператору

$$l(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t; c_0, \ldots, c_n)$$

за умови, що потенціал $V(x, t; c_0, \ldots, c_n)$ цього оператора є розв'язком загального рівняння КдФ (4) з вектором параметрів $(c_0, \ldots, c_n)$. Формулювання умов на дані розсіяння, що мають вислідом розв'язання оберненої задачі розсіяння.

III) Розв'язання оберненої задачі розсіяння для (несамоспряженого) оператора Шредінґера, що відповідає диференціальному виразу за даними розсіяння, знайденими в п. II).

Зауважимо, що в пп. II) і III) запроваджуємо в формули Методу параметри, які є істотними з огляду на теорію солітонів та її узагальнення.

3. Теорія несамоспряжених операторів з неперервним спектром. Дослідження несамоспряжених пар Лакса з комплексними коефіцієнтами і породжуваних ними операторів

Теорія несамоспряжених операторів з неперервним спектром сформувалася в працях М.А. Наймарка [174], В.О. Марченка [156], Б.Я. Левіна [5], М.С. Лівшиця [129], Н. Данфорда [171], Н. Данфорда, В. Бейда, Дж.Т. Шварца [Ф 7, т. 3], Т. Като [180, 181], В.Е. Лянце [157−165, 229], Ф.С. Рофе-Бекетова [167, 221, 226], Б.С. Павлова [176−178], А.Г. Костюченка [173] та ін.

Вирішальними у формуванні теорії несамоспряжених задач з дискретним (нескінченним) спектром стали праці М.В. Келдиша [169, 170]. М.В. Келдиш і В.Б. Лідський у 1961 році запропонували огляд [168] праць і задач для несамоспряжених операторів з дискретним і неперервним спектром. Серед інших праць, присвячених різним питанням теорії несамоспряжених операторів, варто згадати [Ф 29, Ф 36, 81, 166, 175, 184, 185, 187, 194, 195, 196].

Зауважимо, що В.А. Ільїн, К.В. Мальков, Є.І. Мойсеєв [186] дослідили задачу обґрунтування зображення Лакса нелінійних рівнянь для випадку пар Лакса з (чисто) дискретним спектром. Тут сформульовано умову базисності систем кореневих функцій (несамоспряжених) пар Лакса в задачі інтегрування нелінійних еволюційних рівнянь.

Праці автора (див. [234−299]) належать до напряму, започаткованого В.Е. Лянце [159, 163, 164], де досліджується несамоспряжений одновимірний оператор Шредінґера в просторі $L_2[0, \infty)$. Зокрема, у [159] побудовано приклад такого оператора (з фінітним комплекснозначним потенціалом), який має спектральну особливість на неперервному спектрі і тому не є спектральним у сенсі Данфорда − Бейда. Цей приклад наведено нижче (див. підрозділ 7.1).

А.Г. Костюченко [173] в передмові до монографії [Ф 7, т. 3] поставив задачу про знаходження ефективних умов на комплекснозначний потенціал $P(x)$ оператора L, за яких цей оператор є спектральним за Данфордом − Бейдом. Оператор L при цьому породжується диференціальним виразом

$$l(y) = -y'' + P(x)y, \qquad 0 \le x < \infty,$$

та крайовою умовою

$$y(0) = 0.$$

Цю задачу ми називаємо *проблемою Данфорда − Костюченка.*

Ефективні достатні умови розв'язності проблеми Данфорда − Костюченка сформульовано в Розділі 7. Ми будуємо конструкції комплекснозначних потенціалів для оператора L, що розв'язують проблему, спочатку навіть без припущення фінітності, використовуючи метод Барґмана [66] і загальне стаціонарне рівняння Кортевеґа − де Фріза. Простір таких потенціалів ми називаємо S-многовидом. «Локалізації» функцій з S-многовиду до функцій з фінітним носієм можна зробити також такими, що розв'язують проблему Данфорда − Костюченка.

У Розділі 3 запропоновано ряд теорем, що стосуються комплексифікованих стаціонарних пар Лакса.

У Розділі 4 досліджуємо еволюцію несамоспряжених пар Лакса.

У Розділі 8 розв'язується задача про спектральність у сенсі Данфорда – Бейда оператора Шредінґера зі сферичносиметричним комплекснозначним потенціалом в просторі $L_2(E_3)$.

Властивості комутування диференціальних операторів вивчаються давно. Згадаємо насамперед праці Бурхнала (J.L. Burchnall) і Чеунді (T.W. Chaundy) [136–138], які стосуються комутуючих звичайних диференціальних операторів.

Комутативні кільця звичайних лінійних диференціальних операторів описав І.М. Крічевер [51]. До цього напряму належить також дослідження В.Г. Дрінфельда – див. огляд літератури в [51]. Його формуванню передували праці Н.І. Ахієзера [Ф 24, Ф 64] і H.F. Baker [138].

Н. Данфорд і В. Бейд [Ф 7, т. 3, с. 264–311] створили теорію алгебр комутуючих обмежених спектральних операторів. Згаданим працям передували фундаментальні дослідження Джона фон Неймана [Ф 49, Ф 51].

Теорія комутуючих самоспряжених і нормальних операторів дістала подальший розвиток у працях Ю.М. Березанського [Ф 8, Ф 9, Ф 11, Ф 57], З.Г. Шефтеля [Ф 11], Ю.С. Самойленка [Ф 46, 74], Ю.Г. Кондратьєва [Ф 9]. Ці праці спираються на результати М.Г. Крейна [Ф 10] в теорії розширень (необмежених) ермітових операторів.

Новий метод в теорії розсіяння, що ґрунтується на дослідженні сингулярних білінійних форм в теорії збурень самоспряжених операторів створив В.Д. Кошманенко [197].

Різні аспекти побудови функціонального числення від комутуючих необмежених операторів досліджують Я.В. Радино, Т. Зерзайхі [218]. Сюди примикають роботи О.В. Лопушанського [208] і дослідження спектральних задач В.О. Єровенко [225].

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ВИБІР НАПРЯМІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Огляд основної літератури з аналізу, що стосується методу оберненої задачі розсіяння

У цьому розділі продовжуємо огляд праць, що стосуються методу оберненої задачі розсіяння (МОЗР).

Метод оберненої задачі розсіяння, як було зазначено, започаткований в [1]. Автори запропонували МОЗР для розв'язання задачі Коші для рівняння Кортевеґа − де Фріза:

$$V_t = 6VV_x - V_{xxx}. \tag{1.1}$$

Рівняння (1.1) застосовується у теорії хвиль на мілкій воді, гідромагнетичних хвиль у холодній плазмі, іон-акустичних хвиль, теорії акустичних хвиль в ангармонійних кристалах (див. [1] і подальші оглядові праці в списку використаних джерел).

Зауваження 1.1. S-матриці, що відповідають основним моделям квантової теорії поля, дослідили М.М. Боголюбов, Д.В. Ширков, Б.В. Медведєв, М.К. Поліванов, Д.Я. Петрина, С.С. Іванов, А.Л. Ребенко − див. працю [36], у якій сформульована аксіоматична теорія матриці розсіяння (і метод її дослідження) в постановці М.М. Боголюбова.

Наша праця стосується математичної теорії солітонів. У цій теорії основне місце займають безвідбивні потенціали (Reflectionless Potentials), що відповідають S-матриці, в якої лише діагональні елементи відмінні від нуля: $s_{jj} \neq 0$. Тобто коефіцієнти матриці розсіяння, що відповідають за відбиття, анулюються, а коефіцієнти $s_{jj} \neq 0$ є коефіцієнтами проходження.

Створенню МОЗР сприяв тривалий розвиток теорії розсіяння. Йдеться про пряму та обернену задачі розсіяння − див. [3, 4]. Крім того, МОЗР передував розвиток обернених спектральних задач (у термінах умов на функцію Вейля − Тітчмарша). У межах цього огляду використаємо тези доповіді Б.М. Левітана [100].

Обернені задачі спектрального аналізу започатковані в працях В.А. Амбарцумян [109] (1929), G. Borg [68] (1945), N. Levinson [99] (1949).

Бурхливий розвиток обернених задач пов'язаний з операторами перетворення Дельсарта – Левітана (див. [101–104]), а також А.Я. Повзнера [100]. Для оператора Штурма – Ліувілля оператор перетворення T реалізується у вигляді

$$(Tf)(x) = f(x) + \int_0^x \mathcal{K}(x,s) f(s)\,ds. \qquad (1.2)$$

До розв'язання обернених спектральних задач оператор T вперше застосував В.О. Марченко [107].

***Теорема* [107]**. *Спектральна функція Вейля – Тітчмарша оператора Штурма – Ліувілля однозначно визначає цей оператор.*

Методи побудови диференціального оператора за його функцією Вейля – Тітчмарша запропонували І.М. Гельфанд і Б.М. Левітан [110], М.Г. Крейн [92]. До вказаного напряму належать праці Ю.М. Березанського [89–91], В.М. Адамяна [93].

Необхідні та достатні умови того, щоб задана монотонна функція $\rho(\lambda)$ була функцією Вейля – Тітчмарша, вказали І.М. Гельфанд і Б.М. Левітан.

Для розв'язання задач теорії розсіяння Б.Я. Левін [5] запропонував оператори перетворення з умовами на нескінченності вигляду

$$(Tf)(x) = f(x) + \int_x^\infty A(x,s) f(s)\,ds. \qquad (1.3)$$

В.О. Марченко [3, 4], З.С. Агранович, В.О. Марченко [3] застосували ці оператори перетворення до оберненої задачі розсіяння.

Значний вклад в теорію оберненої задачі розсіяння зробили Р. Йост (R. Jost), Р. Ньютон (R. Newton) [111, 112, 106], Е.І. Бондаренко [150], Ф.С. Рофе-Бекетов, а також Й. Кей (J. Kay) і Г. Мозес (H. Moses) [69, 70], К. Шадан, П. Сабатьє [105], М.Ш. Бірман, Д. Яфаєв (і їх учні – див. [80, 81]), Л.Д. Фаддєєв [82, 83, 84, 87] і його учні (зокрема Л.А. Тахтаджян), В.Д. Кошманенко [197], Л.П. Нижник [19, 45, 46], Ф. Калоджеро, А. Дегасперис [56]. Відомий напрям в теорії розсіяння створили П.Д. Лакс і Р.С. Філліпс [47]. Нове тлумачення схеми Лакса – Філліпса запропонували А.К. Мотовілов [135] і С.О. Кужель [Ф 67]. R. Lavine [179] зробив ґрунтовні дослідження в галузі потенціального розсіяння для оператора Шредінґера. М. Рід (M. Reed) та Б. Саймон (B. Simon) в [81, т. 3] висвітлили широке поле задач для хвильових операторів теорії розсіяння, а також застосування теорії розсіяння.

Крім цього, відкриттю МОЗР передували цікаві праці з чисельного моделювання рівняння Кортевеґа – де Фріза. До найважливіших з-поміж них треба віднести дослідження Е. Фермі, Дж. Паста і С.М. Улама стосовно ланцюжка нелінійних осциляторів. Ці автори виявили аномально сповільнену стохастизацію цієї динамічної системи. Оскільки дослідження Фермі, Паста і Улама добре висвітлені в літературі, обмежимося лише стислими зауваженнями на основі монографії [2] і праці В.Є. Захарова [15].

Експеримент Фермі – Паста – Улама стосувався одновимірного ланцюжка нелінійних осциляторів, що є дискретною моделлю нелінійної струни. Рівень нелінійності і число осциляторів (64) були достатньо великими і тому експериментатори очікували на спостереження швидкої стохастизації ланцюжка, а також на швидкий перехід до рівномірного розподілу енергії за степенями свободи. Проте, всупереч сподіванню, автори експерименту побачили квазіперіодичний обмін енергіями між деякими збудженими спочатку модами і виявили, що час прояву тенденцій до стохастизації системи є великим (становить кілька сот періодів коливань).

Проблема аномально сповільненої стохастизації одновимірних ланцюжків нелінійних осциляторів отримала назву проблеми Фермі – Паста – Улама. Проблему Фермі – Паста – Улама вдалося розв'язати за допомогою глибоких досліджень інтегровності відповідних рівнянь. Повна інтегровність рівняння нелінійної струни доводиться за допомогою модифікації МОЗР і теореми Ліувілля. При цьому рівняння нелінійної струни можна зобразити як континуальну границю ланцюжка Тоди. Дослідження в цьому напрямі привели до розуміння того, що причиною сповільненої стохастизації одновимірних ланцюжків нелінійних осциляторів в експерименті Е. Фермі, Дж. Паста і С.М. Улама є та обставина, що *умови експерименту відповідають повній інтегровності адекватної математичної моделі.* А характерним для цієї математичної моделі є майже періодичний рух, який, просто кажучи, не дає можливості ланцюжкам осциляторів стохастизуватися – див. В.Є. Захаров [15].

П.Д. Лакс [7] запропонував зображення рівняння Кортевеґа – де Фріза за допомогою операторної дужки $[\cdot,\cdot]$:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, M]. \tag{1.4}$$

Тлумачення зображення Лакса (1.4) висвітлимо далі.

Великий внесок у застосування математичної теорії солітонів зробили М. Абловіц (M.J. Ablowitz), Д. Кауп (D.J. Kaup), А. Ньюел (A.C. Newell), Г. Сеґур (H. Segur) [120], Р. Додд (R.K. Dodd), Дж. Ілбек (J.C. Eilbek), Дж. Ґіббон (J.D. Gibbon), Г. Морріс (H.C. Morris) [61].

Прямі методи в математичній теорії солітонів створив Гірота (R. Hirota) [147, 148].

Задача існування розв'язку початкової задачі Коші для рівняння Кортевеґа – де Фріза досліджена в працях A. Sjoberg [50], В.О. Марченко [4].

В.О. Марченко і Д.Ш. Лундіна дослідили формули зв'язку дійсних безвідбивних потенціалів одновимірного оператора Шредінґера з функцією Вейля цього оператора в термінах необхідних і достатніх умов – див. [64, 65, 86, 88].

Для одновимірного оператора Шредінґера комплекснозначні безвідбивні потенціали (а також матричні безвідбивні потенціали) запровадив І.-П.П. Сироїд [239, 240].

Запропонований огляд не претендує на повноту. Проте наше завдання істотно спрощує наявність ґрунтовних оглядів у математичній теорії солітонів і теорії розсіяння – див. [1–4, 6–28, 31–46, 47, 49–52, 54–61, 63–66, 69, 70, 72, 73, 75–78, 80, 82–88, 89–100, 110, 114–120, 166, 180].

1.2. Зауваження стосовно поняття солітона

У літературі немає єдиного математичного означення солітона. Причина цього зрозуміла і криється в різноманітті проявів солітонних явищ в природі і фізичних експериментах.

Математична теорія солітонів описує фізичні явища. У кожному конкретному фізичному експерименті солітони проявляють лише властивості, що стосуються саме цього конкретного явища і відповідають конкретному вибору параметрів у даному експерименті. *Тому найбільш природним у цій ситуації – подати характерні властивості хвиль солітонного типу, що відповідають конкретній моделі.*

М. Краскал і Н. Забуський (1964–1965) зробили відкриття **пружної взаємодії солітонів за допомогою чисельного моделювання** (див. також математичні пояснення чисельних експериментів Краскала і Забуського в статті Лакса [7]). М. Краскал і Н. Забуський виявили також, що для великих значень t розв'язок задачі Коші складається зі скінченного цугу (train) солітонів, що рухаються направо, в той час, як цуг осциляцій рухається наліво.

Пропонуємо тлумачення Дж. Лема і Д. Маклафліна щодо взаємодії, яка приводить до утворення солітонів. **Солітони − нелінійні утворення, що виникають в результаті рівноваги між нелінійністю і дисперсією** [55]. Це тлумачення збігається з тлумаченням, запропонованим у праці [1]. При цьому дисипація є незначною − див. [1].

У цій роботі, як правило, користуємося означенням солітона і властивостями взаємодії солітонів, які отримані в [1].

Зауваження 1.2. Зауважимо, що 6 листопада 1826 року видатний український математик М.В. Остроградський подав у Парижі «Мемуар про поширення хвиль в циліндричному басейні» − див. [ГД 7]. Праця М.В. Остроградського, а також праці С.Д. Пуассона значно випередили інші дослідження і потім були частково «перевідкриті», зосібна через півстоліття це зробив Л. Релей. У цьому плані є історичне дослідження І.З. Штокала і І.Б. Погребиського [ГД 9]. М.В. Остроградський був добре знайомий з попередніми працями Л. Ейлера та Ж.Л. Лаґранжа. Він зокрема вказував на межу застосування методів і формул Ж.Л. Лаґранжа, отриманих для хвиль на мілкій воді.

Зауважимо, що **Ж.Л. Лаґранж використовував функції комплексної змінної для розв'язання задач гідродинаміки**.

Строге математичне доведення існування ізольованої (поодинокої) поверхневої (довгої) нелінійної хвилі в каналі на мілкій воді випливає з праці М.О. Лаврентьєва [ГД 1].

У зв'язку зі створенням МОЗР природно поставити задачу про апроксимацію довгої хвилі М.О. Лаврентьєва [ГД 1] модулями солітонів КдФ, а також N-солітонними розв'язками рівняння Кортевеґа − де Фріза.

Математичного обґрунтування існування солітона на поверхні води скінченної глибини стосуються праці К. Фрідріхса і Д. Гайєрса − див. Дж. Стокер [32], де викладено результати, які опублікували К. Фрідріхс і Д. Гайєрс у 1954 р.

1.3. Зображення Лакса і комплексифікація загального рівняння Кортевеґа − де Фріза

Зображення Лакса загального рівняння Кортевеґа − де Фріза (КдФ) має вигляд

$$\frac{dL}{dt} = [L, M]\,(\mu), \tag{1.5}$$

де

$$M = \mu_0 M_{2n+1} + \mu_1 M_{2n-1} + \ldots + \mu_n M_1, \tag{1.6}$$

$\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_n, \ldots,)$ – вектор дійсних параметрів, а $L = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ – формальний одновимірний оператор Шредінґера на всій осі, що параметрично залежить від t. Множину операторів $\{M_i\}$ назвемо ієрархією Лакса для моделі КдФ і задамо ці оператори таким чином:

$$M_{2i+1} = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k \right), \qquad (1.7)$$

де $a_k = a_k(V, V_x, V_{xx}, \ldots, t)$ – многочлен від функції $V(x,t)$ і її похідних за змінною x, а число $i^2 = -1$ дозволяє симетризувати оператори (1.7) при дійсних многочленах $a_k = a_k(x,t)$. Зауважимо, що в [7] замість оператора iD вживається оператор D, і тому оператори з ієрархії Лакса [7] кососиметричні. Якщо в (1.6) параметр μ_{n-1} відмінний від нуля, а решта параметрів анулюються, то при $L = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ і $M_1 = 4D^3 - 6VD - 3V'$ загальне рівняння КдФ перетворюється в (1.1).

Зауваження 1.3. Перевага подання операторів M_i у симетризованому вигляді (1.7) реалізується повною мірою, якщо ці оператори діють у комплексному гільбертовому просторі $L_2(-\infty, \infty)$. Наприклад, якщо оператор M_i задати на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, то можна ставити задачу про самоспряжені розширення цього оператора.

Зауваження 1.4. Зображення рівняння КдФ за допомогою пари лінійних операторів L і M в подальшому лягло в основу МОЗР, а ця пара операторів дістала назву пари Лакса. Заслуга П.Д. Лакса полягає в оригінальному і строгому доведенні припущень авторів роботи [1]. Передовсім П.Д. Лакс запропонував математичні тлумачення чисельних експериментів М. Краскала і Н. Забуського, що стосуються існування для рівняння КдФ розв'язків типу подвійної хвилі, тобто таких розв'язків, які при великих $|t|$ ведуть себе як цуг (з пружними властивостями) поодиноких хвиль, що рухаються з різними швидкостями.

Означення 1.1. Сформулюємо правило комплексифікації $L-M$ пари Лакса і відповідного цій парі загального рівняння Кортевеґа − де Фріза (КдФ). Вектор $\mu=(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_n)$ дійсних параметрів замінюємо на вектор комплексних параметрів $c=(c_0,c_1,...,c_n)$, потенціал $V(x,t)$ оператора L розглядається як комплекснозначна функція дійсних змінних x,t. При цьому комплексифікуються функції $a_k(V,V',...)$, що входять у вирази операторів M_{2i+1}. Комплексифікована пара Лакса породжує при цьому загальне комплексне рівняння КдФ:

$$V_t=\left[L\ ,\ c_0M_{2n+1}+c_1M_{2n-1}+...+c_nM_1\right], \tag{1.8}$$

де $V_t=\dfrac{\partial L}{\partial t}$.

Зауваження 1.5. Загальне рівняння Кортевеґа − де Фріза містить вектор параметрів $c=(c_0,c_1,\ldots,c_n)$. Пізніше буде показано, що умови на цей вектор параметрів є істотними в застосуванні МОЗР. **Ми вводимо ці параметри у формули МОЗР і формулюємо параметричний підхід до МОЗР − див., наприклад, праці автора [254, 279, 281, 291].**

Зауваження 1.6. Творці сучасної гідродинаміки (див., наприклад, [32]) наголосили на потребі дослідження параметричних властивостей методів гідродинаміки. Наше дослідження параметричних властивостей МОЗР відповідає вказаній задачі стосовно загального рівняння Кортевеґа − де Фріза.

Зауваження 1.7. Несамоспряжені пари Лакса можуть виникати також в багатьох моделях математичної фізики. Наприклад, В.Є. Захаров і А.Б. Шабат [8, 9] дослідили нелінійне рівняння Шредінґера (НРШ) для випадку нестійких [8] і стійких [9] автомодуляцій хвиль оптичного діапазону в нелінійних середовищах. Запропоновані ними пари Лакса несамоспряжені і дають змогу ефективно обчислити солітони НРШ.

1.4. Властивості несамоспряженого одновимірного оператора Шредінґера з комплекснозначним потенціалом у просторі L_2. Спектральна міра

У цьому підрозділі подамо результати, що стосуються спектральних властивостей несамоспряженого оператора L, що породжується диференціальним виразом

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$$

з комплекснозначним потенціалом $V(x)$ і крайовою умовою $y(0)=0$ в гільбертовому просторі $L_2(0,\infty)$, а також відповідні результати в просторі $L_2(\mathbb{R})$. У загальному випадку оператор L може не бути спектральним за Данфордом [171, 172] і навіть не є спектральним в сенсі Лянце [158, 159]. Результати, які ми реферуємо в цьому підрозділі, є допоміжними для наступного викладу і підводять до розуміння проблематики, пов'язаної з оператором L і його застосуванням в МОЗР.

Означення 1.2. Припустимо, що несамоспряжений оператор L породжується в просторі $L_2(0,\infty)$ диференціальним виразом $L=-\dfrac{d^2}{dx^2}+V(x)$ і областю визначення $D(L)$ − множиною всіх функцій f, що мають похідну f', абсолютно неперервну в кожному проміжку $[0,a]$, $a>0$, і таких, що $f,\ Lf\in L_2(0,\infty)$, $f(0)=0$.

Наступне означення спектральної міри оператора подамо за статею Н. Данфорда [171] і працею В.Е. Лянце [158].

Означення 1.3 (Спектральна міра в сенсі Данфорда). Спектральною мірою в гільбертовому просторі H називається операторнозначна функція множини $P:\Delta\to P(\Delta)$, яка має такі властивості:

A) Функція P визначена на класі (B) всіх борелівських підмножин комплексної площини $\mathbb{C}$;

B) Значеннями функції P є лінійні обмежені оператори $P(\Delta)$, що відображають весь простір H у себе і мають такі властивості:

1) $P(\Delta_1)P(\Delta_2)=P(\Delta_1\cap\Delta_2),\qquad \Delta_1,\Delta_2\in(B)$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(P(\Delta_k)f,g\right)=\left(P(\Delta)f,g\right)$ для всякого розбиття множини $\Delta\in(B)$ на частини $\Delta_1,\Delta_2,\ldots\in(B)$, $\Delta_i\cap\Delta_j=\varnothing$ при $i\neq j$, де $\varnothing$ − порожня множина.

3) $P(\mathbb{C})=I$ де I − оператор тотожного перетворення в просторі H, а $\mathbb{C}$ − комплексна площина.

З умов ***A***) і ***B***) випливає (див. В.Е. Лянце [158]), що для спектральної міри P існує таке число $K,\ 1\le K<\infty$, що має місце властивість

C) $\quad\|P(\Delta)\|\le K \qquad$ для всіх $\quad\Delta\in(B)$;

4) Якщо для деякого $\Delta \in (B)$ виконується $\| P(\Delta) \| = \ = 1$, то оператор $P(\Delta)$ є самоспряженим ортопроектором.

З умови ***2***) випливає, що $P(\varnothing) = 0$, тому

$$P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 0, \qquad \text{якщо} \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing.$$

Ця властивість означає, що множинам, які не перетинаються, відповідають лінійно незалежні простори $P(\Delta_1)H$ і $P(\Delta_2)H$.

За означенням, міра P вважається зчисленно-адитивною у слабкому сенсі, проте зі слабкої зчисленної адитивності міри P випливає сильна адитивність P (див. [158]).

Означення 1.4. (Розвинення одиниці обмеженого оператора T). Припустимо, що H − комплексний гільбертів простір, T − обмежений оператор в H, а P − спектральна міра. Ідучи за Н. Данфордом, розглянемо такі властивості:

U) оператор T комутує зі спектральною мірою P, тобто для кожної множини $P(\Delta)H$ справджується $TP(\Delta) = P(\Delta)T$;

V) спектр $\mathrm{sp}\,(T \mid P(\Delta)H)$ звуження оператора T на інваріантний підпростір $P(\Delta)H$ міститься в замиканні $\overline{\Delta}$ множини $\Delta \in (B)$:

$$\mathrm{sp}\,(T \mid P(\Delta)H) \in \overline{\Delta}.$$

Спектральна міра P, що має разом з оператором T властивості ***U***) і ***V***), називається *розвиненням одиниці оператора* T.

***Теорема* 1.6 (І.М. Гельфанд, Г. Маккі).** *Для всякої рівномірно обмеженої спектральної міри P в гільбертовому просторі H існує таке розвинення одиниці $E : \Delta \to E(\Delta)$ нормального оператора*

$$\int_{\Lambda} \lambda \; E(d\lambda)$$

і таке лінійне, взаємно однозначне неперервне відображення M простору H на себе, що

$$P(\Delta) = M^{-1}E(\Delta)M \qquad \text{для всіх} \quad \Delta \in (B).$$

***Теорема* 1.7 (Н. Данфорд).** *Для того щоб оператор $A : H \to H$ задовольняв умови (**U**) і (**V**), необхідно і достатньо, щоб він допускав зображення*

$$A = S + N, \tag{\textbf{W}}$$

де $S = \int\limits_{\Lambda} \lambda \, P(d\lambda)$, а N − *квазінільпотентний оператор, що комутує з оператором* S.

Означення 1.5. Оператор A, що має властивість (***W***) за умови комутування операторів S і N, називається спектральним за Данфордом оператором, а оператор S називається оператором скалярного типу або скалярним оператором.

***Теорема* 1.8.** *Припустимо, що* S *− скалярний оператор. Тоді* S *подібний до нормального оператора.*

Теорема 1.8. є вислідом з теореми Гельфанда − Маккі.

У процесі дослідження несамоспряжених диференціальних операторів з комплексними коефіцієнтами виявилося, що існує дуже багато диференціальних операторів, які не мають властивості спектральності в сенсі Данфорда. М.А. Наймарк [174] показав, зокрема, що диференціальний оператор L (див. Означення 1.2) при умові

$$\int\limits_0^\infty e^{\varepsilon x} \,|\, V(x) \,|\, dx < \infty$$

на комплекснозначний потенціал $V(x)$ *має* так звані *спектральні особливості на неперервному спектрі.* Оператор L зі спектральними особливостями на неперервному спектрі не має властивості спектральності в сенсі Данфорда − Бейда і не має розвинення одиниці.

В.Е. Лянце [158] запропонував поняття узагальненої спектральної міри, яке дозволило дослідити несамоспряжені оператори зі скінченною кількістю спектральних особливостей (на неперервному спектрі) і скінченною кількістю власних значень дискретного спектра.

Означення 1.6 [158]. Припустимо, що H − гільбертів простір. Узагальненою спектральною мірою в H будемо називати операторнозначну функцію множини $P : \Delta \to\ \to P(\Delta)$, що має такі властивості:

a) функція P задана на деякому класі $D(P)$ борелівських підмножин Δ комплексної площини Λ і має наступні властивості:

(**I**) клас $D(P)$ містить всяку борелівську підмножину кожного свого елемента;

(**II**) клас $D(P)$ містить об'єднання всякої пари своїх елементів;

б) значеннями функції P є лінійні обмежені оператори $P(\Delta)$, що відображають весь простір H в себе. При цьому виконуються властивості:

(**I**) $P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ для всяких множин $\Delta_1, \Delta_2 \in$ $\in D(P)$;

(**II**) для всякого розбиття множини $\Delta \in D(P)$ на борелівські множини $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \in D(P)$, що не перетинаються, і всяких елементів $f, g \in H$ має місце

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(P(\Delta_k)f, g\right) = (P(\Delta)f, g);$$

(**III**) якщо $P(\Delta)f = 0$ для всіх $\Delta \in D(P)$, то $f = 0$;

(**IV**) якщо $[P(\Delta)] * f = 0$ для всіх $\Delta \in D(P)$, то $f = 0$.

Припустимо, що P − узагальнена спектральна міра. В.Е. Лянце [158] сформулював узагальнення теореми Гельфанда − Маккі. Виявилося, що формула вигляду

$$P(\Delta) = M^{-1}E(\Delta)M,$$

де E − розвинення одиниці нормального оператора, має місце для P, проте в цій формулі оператор M є необмеженим в сенсі норми простору H. У праці [158] В.Е. Лянце будує допоміжні простори $\tilde{H}$ і $\hat{H}$ з топологіями, що роблять оператор M неперервним. Зауважимо також, що в цій праці В.Е. Лянце, замість будувати пряму суму інваріантних підпросторів, використовує їх індуктивну або проективну границю $\tilde{H}$ і $\hat{H}$.

Зауваження 1.8 (В.Е. Лянце). Для оператора L зі спектральними особливостями

$$\| P(\Delta) \| \to \infty,$$

якщо віддаль від множини Δ до множини спектральних особливостей прямує до нуля.

Зауваження 1.9 Б.С. Павлов [176−178] глибоко вивчив структуру множини спектральних особливостей оператора L. Він запропонував умову

$$\sup_{0 \le x \le \infty} |V(x)| e^{\varepsilon\sqrt{x}} < \infty.$$

Ця умова при $\varepsilon > 0$ достатня для скінченності множини спектральних особливостей оператора L.

Якщо умову Б.С. Павлова замінити умовою повільнішого спадання на нескінченності, то будова множини спектральних особливостей може бути дуже складною. Наприклад, будь-яку точку неперервного спектра можна зробити граничною точкою множини спектральних особливостей оператора L.

Зауважимо також, що Б.С. Павлов [178] поширив свої результати на тривимірний несамоспряжений оператор Шредінґера з комплексним потенціалом, спадним на нескінченності:

$$\ell u = -\Delta u + q(x)u.$$

При цьому Б.С. Павлов припускає, що тривимірний потенціал $q(x)$ є неперервною комплексною функцією, що задовольняє умови

$$\sup_x |q(x)|\left(1+|x|^{3+\varepsilon}\right)|x| < \infty,$$

$$\sup_x |\nabla q(x)|\left(1+|x|^{3+\varepsilon}\right) < \infty.$$

Зауважимо, що теорії тривимірного несамоспряженого оператора Шредінґера з комплексним потенціалом, спадним на нескінченності, присвячені також праці Т. Като [180, 181] і К. Мочізукі [149].

РОЗДІЛ 2

АПРОКСИМАЦІЯ ХВИЛІ М.О. ЛАВРЕНТЬЄВА АБСОЛЮТНИМИ ВЕЛИЧИНАМИ (МОДУЛЯМИ) БЕЗВІДБИВНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ – РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕҐА – ДЕ ФРІЗА

2.1. Вступ

Модель Кортевеґа – де Фріза є універсальною в математичній фізиці (вживається для опису багатьох фізичних процесів – див., наприклад, праці [1, 2, 4, 6, 7, 14–16]). До фундаментальних понять сучасної математичної теорії солітонів належить поняття безвідбивного потенціалу одновимірного оператора Шредінґера на всій осі, який вважаємо відомим – див. [66], а також підрозділ 2.4.

З огляду на застосування в гідродинаміці виникла потреба зіставити основні результати стосовно розв'язків рівняння Кортевеґа – де Фріза (отримані за допомогою безвідбивних початкових функцій – потенціалів) з відповідними результатами теорії довгих хвиль, отриманими раніше в гідродинаміці. Запропоноване зіставлення *передбачає виконання* ***наближеної умови сталого тиску на вільній поверхні рідини з теорії довгих хвиль на мілкій воді***. *У цьому зіставленні використовуємо абсолютні величини* (*модулі*) *безвідбивних потенціалів*.

М.О. Лаврентьєв [ГД 1] створив конформну теорію усталеного руху довгих хвиль на поверхні рідини скінченної глибини. Вчений, зокрема, запропонував строге доведення існування ізольованої (поодинокої) нелінійної хвилі в каналі на мілкій воді. У цьому розділі використовуються формули М.О. Лаврентьєва для параметричної апроксимації хвилі Лаврентьєва абсолютними величинами (модулями) стаціонарних безвідбивних потенціалів теорії розсіяння для рівняння Кортевеґа – де Фріза.

Порівняльні характеристики, отримані в цьому розділі, відносимо до задачі обґрунтування *перетворення оберненої задачі розсіяння* [1, 2, 4] методами аналізу. Актуальність дослідження пояснюється необхідністю зіставити розв'язки, отримані перетворенням (методом) оберненої задачі розсіяння, з наближеною умовою сталого тиску на вільній поверхні рідини.

2.2. Умова сталого тиску на вільній поверхні рідини і стислі відомості з методу М.О. Лаврентьєва

Видатним досягненням у теорії довгих хвиль на воді скінченної глибини є метод М.О. Лаврентьєва [ГД 1]. У статті [ГД 1] міститься зокрема строге доведення існування ізольованої (поодинокої) нелінійної хвилі в каналі на мілкій воді.

Задачу про усталений хвильовий рух важкої рідини в каналі змінної малої глибини формулюємо як таку граничну задачу теорії конформних відображень.

***Дано*:** площина комплексної змінної $z = x + iy$.

У цій площині задана лінія $\Gamma_0 : y = y_0(x)$, де функція $y_0(x)$ визначена, однозначна, неперервна разом зі своїми двома похідними при всіх x.

Задача полягає у знаходженні лінії Γ: $y = y(x)$, $y(x) > y_0(x)$, так, щоб при конформному відображенні в площину $\zeta = \xi + i\eta$ за допомогою функції

$$\zeta = f(z, \Gamma_0, \Gamma)$$

смуга D, обмежена лініями Γ і Γ_0, відобразилась конформно в смугу $v < \eta < h$ і виконувалася умова

$$J_V(\Gamma_0, \Gamma) = \left| f'(z, \Gamma) \right|^2 - C + \lambda y = 0 \qquad (2.1)$$

уздовж лінії Γ. У формулі (2.1) C і λ − задані сталі.

Гідродинамічно функція f означає комплексний потенціал рухомої рідини, h − витрата (расход). Умова (2.1) означає сталий тиск на вільній поверхні.

Означення комплексного потенціалу в гідродинаміці подано у відомій книзі М.О. Лаврентьєва, Б.В. Шабата [ГД 3].

Якщо $y_0(x) = \mathrm{const}$, то, накладаючи на рух з потенціалом f певні додаткові умови (М.О. Лаврентьєв), отримуємо хвильовий рух у каналі скінченної глибини з нульовою поперечною швидкістю рідини.

Умови М.О. Лаврентьєва:

h – достатньо мале число;

числа C і λ мають таку структуру:

$$\lambda = \frac{2}{h} + (6 + \alpha)h, \qquad C = 3 + (9 + \beta)h^2, \tag{2.2}$$

де α, β – достатньо малі величини.

Для конформного відображення $f(z, \Gamma_0, \Gamma)$ виконуються умови

$$f(\pm\infty, \Gamma_0, \Gamma) = \pm\infty.$$

Надалі числа (параметри) $K_1, K_2, \ldots$ не залежать від h.

***Теорема* 2.1 (М.О. Лаврентьєв [ГД 1]).** *При всіх значеннях* $\omega > K_1\sqrt{h}$*, де число* K_1 *– достатньо велике, існує крива* $\Gamma_\omega : y = y(x, \omega)$ *з періодом* 2ω*,* $y(x + 2\omega, \omega) = y(x, \omega)$ *і з вершиною* $x = 0$*, що задовольняє функціональне рівняння* (2.1), *де* $C > 0$*, а крива* Γ_0 *відповідає* $y_0(x) = \text{const}$.

Границя лінії $\Gamma_\omega : y = y(x, \omega)$ *при* $\omega \to \infty$ *існує і дає аперіодичний розв'язок рівняння* (2.1) *з єдиною вершиною в точці* $x = 0$. *Цей граничний розв'язок є поодинокою* (*ізольованою*) *хвилею М.О. Лаврентьєва* $y = y(x, \infty)$.

Виходячи з (2.1) і переходячи до усталених хвильових рухів, бачимо, що в першому наближенні значення $|f'|^2$ в (2.1) замінюється так:

$$|f'(z, \Gamma_0, \Gamma)|^2 = \frac{(h - v)^2}{(y - y_0)^2}\left(1 + \frac{2}{3}yy''\right). \tag{2.3}$$

Внаслідок заміни (2.3) отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{(h - v)^2}{(y - y_0)^2}\left(1 + \frac{2}{3}yy''\right) = C - \lambda y. \tag{2.4}$$

Рівняння (2.4) за допомогою додаткових припущень [ГД 1, с. 16–17] зводиться до вигляду

$$y'' = \frac{9}{2}h + \frac{1}{2}\frac{v^2}{h^3} - 3\frac{\eta}{h^2} - \frac{9}{2h^3}\left[y - \left(h + \frac{v}{3}\right)\right]^2. \tag{2.5}$$

При $\eta = v = 0$ інтегральну криву рівняння (2.5) М.О. Лаврентьєв називає хвилею Релея. Рівняння (2.5) при $\eta = v = 0$ набуває вигляду

$$y'' = \frac{9}{2}h - \frac{9}{2h^3}(y-h)^2. \tag{2.6}$$

Розв'язки рівнянь* (2.4)–(2.6) *наближають функції, що задовольняють умову* (2.1) *сталого тиску на вільній поверхні рідини.

Наступна теорема з'ясовує величину відхилення хвилі Релея від розв'язку М. О. Лаврентьєва, отриманого в Теоремі 2.1.

***Теорема* 2.2 (М.О. Лаврентьєв [ГД 1]).** *За виконання умов, сформульованих вище, має місце оцінка*

$$|\, y(x,\omega) - y(x,\infty)\,| < \frac{K_5 h^2}{\log\frac{1}{h}}.$$

Надалі вважаємо, що $y_0(x) = \text{const} = 0$.

2.3. Параметрична апроксимація хвилі М.О. Лаврентьєва абсолютними величинами (модулями) безвідбивних потенціалів

Обґрунтування задачі робиться з огляду на умову сталого тиску на вільній поверхні рідини. При цьому використовуємо рівняння (2.6), яке є наближенням умови (2.1) сталого тиску на вільній поверхні рідини.

У статті І.-П.П. Сироїд [254] запропоновано параметричне узагальнення МОЗР, яке застосовано до загального рівняння Кортевеґа – де Фріза, зокрема до розв'язування наступної задачі Коші (2.7), (2.8):

$$V_t = c_0(6VV_x + V_{xxx}) + 4c_1V_x \tag{2.7}$$

з початковою умовою

$$V(x,0) = V_0(x). \tag{2.8}$$

У рівнянні (2.7) c_0 і c_1 – параметри. При $c_0 = 1$ і $c_1 = 0$ рівняння (2.7) перетворюється у класичне рівняння Кортевеґа – де Фріза

$V_t = 6VV_x + V_{xxx}$.   (2.9)Зі статті [7] випливає, що рівняння (2.7) можна зобразити у вигляді

$$V_t = [-D^2 + V, c_0M_3 + c_1M_1], \tag{2.10}$$

де M_1, M_3 – оператори з ієрархії Лакса – див. [7].

Для знаходження солітонних і N-солітонних розв'язків рівняння (2.10) досліджується простір початкових даних за допомогою стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза

$$[-D^2 + V, c_0M_3 + c_1M_1] = 0,$$

яке можна звести до вигляду

$$V''' + 6VV' - 4zV' = 0. \tag{2.11}$$

Відповідні обчислення зроблені в статті І.-П.П. Сироїд [252].

Сформулюємо теорему про зв'язок теорії М.О. Лаврентьєва [ГД 1] зі стаціонарними солітонами (точніше, їх модулями) рівняння Кортевеґа – де Фріза.

***Теорема* 2.3.** *Припустимо, що справджуються умови Теореми* 2.1, *зокрема, згадані вище умови М. О. Лаврентьєва.*

Тоді для значень параметрів $h = \sqrt[3]{1.5}$ *і* $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ *рівняння* (2.6) *збігається з рівнянням*

$$V'' = -3V^2 + 4zV + d, \tag{2.12}$$

яке отримано зі стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза (2.11) *шляхом взяття первісної.*

Зауваження 2.1. *Зі зміною масштабування рівняння Кортевеґа – де Фріза параметри* h *і* z *в Теоремі* 2.3 *слід також відповідно масштабувати. Критерієм при цьому має бути досягнення рівноваги між нелінійністю і дисперсією* (*між нелінійним членом і дисперсними лінійними членами рівняння Кортевеґа – де Фріза з урахуванням величини відповідних коефіцієнтів*).

Д о в е д е н н я ***Теореми 2.3.*** Припустимо, що виконуються умови Теореми 2.3. Рівняння (2.6) отримується з умови (2.1) сталого тиску на поверхні хвилі, яка формулюється через комплексний потенціал рухомої рідини. При цьому виконуються умови М.О. Лаврентьєва і додаткові умови, наведені вище. Пояснимо, що рівняння (2.6) є джерелом розв'язків, наближених до точного розв'язку задачі М.О. Лаврентьєва. По-

кажемо, що рівняння (2.6) можна отримати з стаціонарного рівняння КдФ з параметром (2.11) при вказаних у формулюванні теореми значеннях параметрів h і z. Для цього застосуємо до рівняння (2.11) операцію інтегрування і дістаємо рівняння (2.12). Припустимо, що $h = \sqrt[3]{1.5}$. Тоді при $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ рівняння (2.6) є частковим випадком рівняння (2.12). Зрозуміло, що всякий тричі диференційовний розв'язок рівняння (2.12) є розв'язком стаціонарного рівняння КдФ (2.11). ◊

Висновок з Теореми 2.3. *Нехай* $h = \sqrt[3]{1.5}$. *Тоді при* $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ *побудовану М.О. Лаврентьєвим ізольовану хвилю* $y(x,\infty)$ *можна наблизити стаціонарним розв'язком рівняння з параметром* (2.12), *використавши оцінку*

$$|\, y(x,\omega) - y(x,\infty)\,| < \frac{K_5 h^2}{\log \frac{1}{h}} \tag{2.13}$$

з Теореми Лаврентьєва. При цьому замість $y(x,\infty)$ *слід підставити розв'язок (стаціонарного) рівняння* (2.12), *а потім зробити граничний перехід при* $\omega \to \infty$. *Тобто стаціонарний солітонний розв'язок рівняння КдФ при конкретних значеннях параметрів* ($h = \sqrt[3]{1.5}$, $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$), *вказаних у доведенні Теореми* 2.3, *є наближенням розв'язку* $y(x,\infty)$, *отриманого методом М.О. Лаврентьєва.*

Доведення ***висновку з Теореми 2.3.*** Зафіксуємо значення параметрів відповідно до умов Теореми 2.3: $h = \sqrt[3]{1.5}$ і $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$. Тоді за Теоремою 2.3 рівняння (2.6) і (2.12) збігаються, а за Теоремою 2.2 М.О. Лаврентьєва має місце оцінка (2.13). Твердження висновку випливає при цьому з методу М.О. Лаврентьєва. Розв'язок $y(x,\infty)$ є стаціонарним солітоном КдФ за єдиністю розв'язку з умовою анулювання на $\pm\infty$. ◊

Теорема 2.4. *Припустимо, що виконуються умови Теореми* 2.3. *Тоді*:

1°) *має місце оцінка*

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x)} \right| < 0.014841 \frac{h^2}{\left| \log \frac{1}{h} \right|} \tag{2.14}$$

для відхилення розв'язку $y(x,\infty)$ *від функції* $\dfrac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2 2\mu x}$, *яку при* $\psi = 0$ *отримуємо з розв'язку*

$$y(x,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

рівняння (2.11), *якщо* $z = 4\mu^2$, *а* $\mu^2 = \frac{3}{8}\sqrt[3]{1.5}$ *і* $h = \sqrt[3]{1.5}$;

2°) *при* $x \to \infty$ *має місце співвідношення*

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)} \right| \to 0$$

для скінченного фіксованого числа ψ;

3°) $$\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313.$$

(Зауважимо, що оцінки в Теоремі 2.4 відповідають значенням параметрів, для яких досягається рівновага нелінійності і дисперсії. При зміні масштабування рівняння Кортевеґа – де Фріза значення параметрів слід поміняти так, щоб знову досягнути рівноваги нелінійності і дисперсії в рівнянні КдФ – див. Зауваження 2.1.)

Д о в е д е н н я. Твердження ***1°*** теореми випливає з оцінки (2.13), якщо обчислити сталу K_5. Для цього спочатку знайдемо максимальне значення розв'язку $y(x,\infty)$, яке досягається при $x = 0$. З методу М.О. Лаврентьєва випливає, що $y(0,\infty) = h + 2h^2$ – див. [ГД 1]. При $h = \sqrt[3]{1.5}$ обчислюємо висоту хвилі Лаврентьєва

$$y(0,\infty) = 3.7654556367.$$

При цьому має місце $\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313$. Ми довели твердження ***3°*** теореми, якщо врахувати, що при $x = 0$ і $\psi = 0$ маємо

$$y(0,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)} = 8\mu^2,$$

а

$$8\mu^2 = 2z = 3\sqrt[3]{1.5}.$$

Але при $h = \sqrt[3]{1.5}$ маємо оцінку

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x)} \right| < 22.3242886\, K_5, \tag{2.15}$$

яка випливає з висновку з Теореми 2.3, а саме, з оцінки (2.13), якщо скористатися виразом для стаціонарного солітона КдФ. Стаціонарний солітон КдФ

$$y(x,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

отримується явно при розв'язуванні наведеного вище стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза.

З оцінки (2.15) і доведеної вище рівності

$$\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313$$

випливає, що $K_5 \geq 0.014841$. Ми довели твердження ***1°*** теореми.

Твердження ***2°*** випливає з властивостей хвилі М.О. Лаврентьєва $y(x,\infty)$ при $x \to \pm\infty$ при виконанні умов теореми. Теорему 2.4 доведено. ◊

З оцінки (2.14) при виконанні умов Теореми 2.4 отримуємо

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x)} \right| < 0.331313. \qquad (2.16)$$

2.4. Випадок загального параметричного стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза

Запишемо стаціонарний аналог загального рівняння Кортевеґа – де Фріза (КдФ) у термінах пар Лакса:

$$\left[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_0 \right] = 0\,, \qquad (2.17)$$

де $l = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$ – формальний оператор Шредінґера з потенціалом $V(x)$, а ієрархію Лакса $\{M_i\}$ задаємо у вигляді

$$M_i = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k \right), \qquad (2.18)$$

де $c_0, c_1, ..., c_n$ – параметри, а функції a_k залежать від функції $V(x)$ і її похідних, $a_k = a_k(V, V', V'', \ldots)$.

Припустимо, що функція $q(x)$ має похідні до третього порядку включно і виконується умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)\left| q^{(k)}(x)\right| dx < \infty, \qquad k = 0,1,2,3.$$

Означимо оператор L таким чином:

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \qquad \text{і} \qquad L : L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty).$$

Областю визначення $D(L)$ оператора L є множина всіх функцій f, що мають похідну f', абсолютно неперервну в кожному скінченному інтервалі дійсної осі, таких, що f і Lf належать до $L_2(-\infty,\infty)$.

Функцію $q(x)$ називають *потенціалом* оператора L.

Означення безвідбивних потенціалів для оператора L − див. [1, 4, 66, 239, 240]. Відновимо це означення в цьому місці. За виконання наших припущень стосовно потенціалу $q(x)$ одновимірне рівняння Шредінґера

$$l(y) = \lambda^2 y$$

має (див. Л.Д. Фаддєєв [83, 84]) розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ з асимптотиками

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + o(1) \qquad \text{при} \qquad x \to -\infty.$$

Розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна:

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \mathcal{K}_1(x,y) e^{i\lambda y}\, dy,$$

де ядро $\mathcal{K}_1(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A \le x \le y < \infty$ і

$$\int_A^{\infty}\int_x^{\infty} \left|\mathcal{K}_1(x,y)\right| dy\, dx < \infty,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} \mathcal{K}_2(x,y) e^{-i\lambda y}\, dy,$$

а ядро $\mathcal{K}_2(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \le x \le B$. Функція $\left|\mathcal{K}_2(x,y)\right|$ сумовна в області $-\infty < y \le \le x \le B$.

Для дійсних $\lambda \ne 0$ пари

$$f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння Шредінґера. Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\{f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda)\} = 2i\lambda,$$

$$\{f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)\} = -2i\lambda.$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)f_1(x,\lambda) + a(\lambda)f_1(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0,$$

$$f_1(x,\lambda) = -b(-\lambda)f_2(x,\lambda) + a(\lambda)f_2(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0,$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \{f_1(x,\lambda), f_2(x,\lambda)\},$$

$$w_1(\lambda) = \{f_2(x,\lambda), f_1(x,-\lambda)\}$$

таким чином:

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w_1(\lambda).$$

За аналогією з самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію $w_1(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом відбиття.

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані формулою

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0.$$

Потенціал $q(x)$ називають безвідбивним, якщо коефіцієнт відбиття анулюється:

$$w_1(\lambda) \equiv 0.$$

***Теорема* 2.5 (див. також І.-П.П. Сироїд [240, 252]).** *Припустимо, що:*

(***i***) *вектор параметрів* $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *у стаціонарному рівнянні КдФ* (2.17) *такий, що рівняння вигляду*

$$c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n = 0 \qquad (2.19)$$

не має дійсних коренів, тобто для многовиду AL *коренів рівняння* (2.19) *виконується умова*

$$\operatorname{dist}(AL, \mathbb{R}) = d > 0; \qquad (2.20)$$

(***ii***) $V(x)$ – *дійсний розв'язок загального рівняння КдФ* (2.17), *що задовольняє умову*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|V(x)|\,dx < \infty$$

та умови на похідні:

$$\left|V^{(i)}(x)\right| \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \qquad (2.21)$$

де m – *порядок рівняння КдФ* (2.17).

Тоді:

1°) *самоспряжений одновимірний оператор Шредінґера* L *з потенціалом* $V(x)$ *відповідає безвідбивному випадку, тобто* $V(x)$ – *безвідбивний потенціал;*

2°) *якщо* z – *недійсний (уявний) корінь рівняння* (2.19), *то* z^2 *належить до дискретного спектра оператора* L.

***Теорема* 2.6 (І.-П.П. Сироїд [240]).** *Припустимо, що* $V(x)$ – *безвідбивний потенціал оператора* L. *Тоді*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon|x|}\,|V(x)|\,dx < \infty.$$

Зауваження 2.2. Змінимо масштабування стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза:

$$u_{xxx} + 12uu_x + cu_x = 0. \qquad (2.22)$$

Порівняємо рівняння (2.22) з рівнянням (2.6). Рівняння (2.22) має розв'язок

$$Y(x) = \frac{a^2}{4\,\mathrm{ch}^2\, 0.5\,(ax + f)}.$$

При $h = \sqrt[3]{0.75} = 0.90856$ отримуємо

$$|\, y(x,\infty) - Y(x)\,| < 19.82128\, C.$$

Параметр C можна обчислити аналогічно до обчислень, зроблених в Теоремі 2.4.

Зауваження 2.3 (щодо нестаціонарного випадку).

Досягненням МОЗР є можливість досліджувати динаміку розвитку солітонних і N-солітонних розв'язків (нестаціонарного) рівняння Кортевеґа − де Фріза. З Теореми 2.4 випливає можливість отримати також динаміку відхилення модуля поодинокого солітона (отриманого за допомогою МОЗР) при значеннях $t > 0$ від розв'язку $y(x,\infty)$.

Початковій функції

$$V(x,0) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

відповідає розв'язок задачі Коші

$$V(x,t) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x - vt + \psi)}$$

для рівняння Кортевеґа − де Фріза.

Зафіксуємо t так, щоб виконувалося співвідношення $2\mu x + \psi = vt$. Тоді функція $V(x,t)$ досягає максимуму: $\max V(x,t) = 8\mu^2$. Але

$$\max V(x,0) = 8\mu^2 \qquad\qquad (\text{при } 2\mu x + \psi = 0).$$

Це означає, що має місце оцінка

$$|\, y(x,\infty) - V(x,t)\,| < 0.014841 \frac{h^2}{\left|\log \frac{1}{h}\right|}$$

принаймні для $2\mu x + \psi = vt$ і $h = \sqrt[3]{1.5}$. Тобто

$$|\, y(x,\infty) - V(x,t)\,| < 0.331313$$

при запропонованих обмеженнях.

РОЗДІЛ 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО СПЕКТРАЛЬНІСТЬ ЗА ДАНФОРДОМ – БЕЙДОМ ОДНОВИМІРНОГО НЕСАМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДІНҐЕРА НА ВСІЙ ОСІ В ТЕРМІНАХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

3.1. Необхідні означення

Припустимо, що комплекснозначна функція $V(x)$ задовольняє умову

$$\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)\,|\,V(x)\,|\,dx < \infty. \tag{3.1}$$

Означення 3.1. Означимо оператор L. Несамоспряжений оператор Шредінґера L породжується в комплексному гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, диференціальним виразом

$$l(y)(x) = y''(x) + V(x)y(x) \tag{3.2}$$

і областю визначення $D(L)$, до якої належать усі $y \in L_2(\mathbb{R})$, для яких похідна y' існує, абсолютно неперервна в кожному скінченному проміжку і $l(y) \in L_2(\mathbb{R})$.

Комплекснозначну функцію $V(x)$ в означенні 3.1 називають потенціалом оператора Шредінґера L за формальною аналогією з самоспряженим випадком.

У випадку півосі аналогічну до (3.1) умову Б.Я. Левін [5] використав для узагальнення перетворень Фур'є і Лапласа. При цьому він істотно узагальнив оператори перетворення (оператори узагальненого зсуву Дельсарта − Левітана) для випадку операторів Штурма − Ліувілля на півосі і на всій осі (див. додатково [107]).

Зауваження. За аналогією до статті [5] можна довести, що за умови відсутності на неперервному спектрі несамоспряженого оператора L (з комплекснозначним потенціалом) спектральних особливостей в сенсі М.А. Наймарка [174], умова (3.1) гарантує спектральність в сенсі Данфорда − Бейда цього оператора і для довільної функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ має місце розвинення за власними і приєднаними функціями оператора L.

Зазначимо, що в низці випадків умову (3.1) можна замінити такою:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)\, |V(x)|\, dx < \infty. \tag{3.3}$$

При потребі використання умови (3.3) робитимемо відповідні зауваження.

Зробимо пояснення щодо теорії оператора L зі спектральними особливостями.

Несамоспряжений оператор Шредінґера L з огляду на припущення комплексності потенціалу за умови (3.1) не є спектральним оператором у сенсі В.Е. Лянце (і тим більше, не є спектральним у сенсі Н. Данфорда). Це випливає з результатів М.А. Наймарка [174], а також з праць Б.С. Павлова [176−178]. Щоправда, М.А. Наймарк [174] і Б.С. Павлов [176−178] дослідили лише випадок півосі $[0, \infty)$. Проте ситуація для несамоспряженого оператора Шредінґера L на всій осі аналогічна до випадку півосі $[0, \infty)$. Наявність спектральних особливостей в оператора L означає, що в цього оператора без додаткових обмежень на потенціал $V(x)$ спектральна міра або не існує, або існує лише в сенсі узагальнення, даного В.Е. Лянце [158] у випадку скінченного числа спектральних особливостей.

У Розділі 3 автор розв'язує задачу: які додаткові обмеження на комплексний потенціал оператора Шредінґера L слід накладати, щоб оператор L став спектральним в сенсі Данфорда − Бейда і мав спектральну міру в сенсі Данфорда?

Розв'язана в цьому Розділі задача вважалася проблемною (важкою) − див., наприклад, передмову А.Г. Костюченка [173] до монографії Н. Данфорда і Дж.Т. Шварца [172]. Щоправда, А.Г. Костюченко торкається лише крайової задачі на півосі. Відразу зазначимо, що задачу на всій осі розв'язувати важче, бо немає переваги наявності крайової умови в початку координат (яка є у випадку задачі на півосі). Поняття спектральності за Данфордом − Бейдом − основне в цьому Розділі. Для зручності відтворимо і доповнимо означення, анонсовані в попередніх підрозділах щодо спектральності за Данфордом − Бейдом.

Наступне означення спектральної міри оператора і подальші теореми подамо за статею Н. Данфорда [171] і працею В.Е. Лянце [158].

Означення 3.2 (Спектральна міра в сенсі Данфорда). Спектральною мірою в гільбертовому просторі H називається операторнозначна функція множини $P : \Delta \to P(\Delta)$, яка має такі властивості:

A) Функція P визначена на класі (B) всіх борелівських підмножин комплексної площини $\mathbb{C}$;

B) Значеннями функції P є лінійні обмежені оператори $P(\Delta)$, що відображають весь простір H у себе і мають такі властивості:

1) $\quad P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2), \qquad \Delta_1, \Delta_2 \in (B)$;

2) $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \big(P(\Delta_k)f, g\big) = \big(P(\Delta)f, g\big)$ для всякого розбиття множини $\Delta \in (B)$ на частини $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \in (B)$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$ при $i \neq j$, де $\varnothing$ − порожня множина;

3) $\quad P(\mathbb{C}) = I$ де I − оператор тотожного перетворення в просторі H, а $\mathbb{C}$ − комплексна площина.

З умов ***A***) і ***B***) випливає (див. В.Е. Лянце [158]), що для спектральної міри P існує таке число $K, 1 \leq K < \infty$, що має місце властивість

C) $\quad \| P(\Delta) \| \leq K$ для всіх $\Delta \in (B)$;

4) якщо для деякого $\Delta \in (B)$ виконується $\| P(\Delta) \| = 1$, то оператор $P(\Delta)$ є самоспряженим ортопроектором.

З умови ***2***) випливає, що $P(\varnothing) = 0$, тому

$$P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 0, \text{ якщо } \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing.$$

Ця властивість означає, що множинам, які не перетинаються, відповідають лінійно незалежні простори $P(\Delta_1)H$ і $P(\Delta_2)H$.

За означенням, міра P вважається зчисленно-адитивною у слабкому сенсі, проте зі слабкої зчисленної адитивності міри P випливає сильна адитивність P (див. [158]).

Означення 1.4 (Розвинення одиниці обмеженого оператора T). Припустимо, що H − комплексний гільбертів простір, T − обмежений оператор в H, а P − спектральна міра. Ідучи за Н. Данфордом, розглянемо такі властивості:

U) оператор T комутує зі спектральною мірою P, тобто для кожної множини $P(\Delta)H$ справджується $TP(\Delta) = P(\Delta)T$;

$\boldsymbol{V}$) спектр $\mathrm{sp}\,(T \mid P(\Delta)H)$ звуження оператора T на інваріантний підпростір $P(\Delta)H$ міститься в замиканні $\overline{\Delta}$ множини $\Delta \in (B)$:

$$\mathrm{sp}\,(T \mid P(\Delta)H) \in \overline{\Delta}.$$

Спектральну міру P, що має разом з оператором T властивості $\boldsymbol{U}$) і $\boldsymbol{V}$), називають *розвиненням одиниці оператора* T.

З метою дослідити умови спектральності необмеженого одновимірного оператора Шредінґера L (див. Означення 3.1) через потенціал подамо за книгою [172, Ф 7, т. 3] необхідні означення і теореми теорії необмежених спектральних операторів.

Означення 3.4. Припустимо, що (B) − клас (поле) борелівських підмножин комплексної площини, а T − лінійний оператор, область визначення $D(T)$ і область значень $R(T)$ якого належать до комплексного банахового простору X. Тоді оператор T називають *спектральним в сенсі Данфорда − Бейда*, якщо він замкнений та існує така зчисленно-адитивна спектральна міра E, визначена на (B), що:

$$E(\sigma)X \subseteq D(T), \qquad E(\sigma)D(T) \subseteq D(T) \tag{3.4}$$

і

$$TE(\sigma)x = E(\sigma)Tx, \qquad x \in D(T), \qquad \sigma \in (B), \tag{3.5}$$

спектр $\mathrm{sp}(T \mid E(\sigma)X)$ звуження $T \mid E(\sigma)X$ оператора T, визначеного на перетині $D(T) \bigcap E(\sigma)X$, задовольняє умову

$$\mathrm{sp}(T \mid E(\sigma)X) \subseteq \overline{\sigma}, \qquad \sigma \in (B). \tag{3.6}$$

Тут $\overline{\sigma}$ − замикання множини σ.

Спектральну міру E називають розвиненням одиниці необмеженого оператора T.

З цього означення випливає, що область визначення спектрального оператора щільна в просторі X.

***Теорема* 3.1 (В. Бейд, В.Е. Лянце).** *Припустимо, що $\Delta \in (B)$, T − спектральний оператор і E − його розвинення одиниці.*

Тоді:

$\mathbf{1}^{\circ}$) звуження $T \mid E(\Delta)X$ оператора T на $E(\Delta)X$ є спектральним оператором, а його розвинення одиниці є звуженням E на підпростір $E(\Delta)X$. Якщо множина $\Delta \in (B)$ обмежена, то оператор $T \mid E(\Delta)X$ є обмеженим оператором;

2°) розвинення одиниці замкненого спектрального оператора визначається однозначно.

Оператор A, що має властивість ($\mathbf{W}$) за умови комутування операторів S і N, є спектральним за Данфордом оператором.

Теорема 3.2 (В. Бейд). *Припустимо, що T − замкнений оператор, а λ − точка резольвентної множини цього оператора. Оператор T є спектральним тоді й тільки тоді, коли його резольвента $(T-\lambda)^{-1}$ є спектральним оператором, а його спектральна міра E задовольняє умову $E(\{0\})=0$.*

Якщо припустити лише виконання умови (3.1) на комплекснозначний потенціал оператора L, то оператор L не матиме властивості спектральності за Данфордом − Бейдом. Це випливає з результатів М.А. Наймарка [174] і Б.С. Павлова [176−178].

Теорема 3.3 (Б.С. Павлов [178]). *Припустимо, що комплекснозначний потенціал $V(x)$ одновимірного оператора Шредінґера L на півосі задовольняє умову*

$$\int_0^\infty (1+x^2)|V(x)|\,dx<\infty.$$

Тоді множина спектральних особливостей оператора L обмежена, замкнена та має міру нуль. Крім того, для множини спектральних особливостей виконується умова

$$\sum \ln|l_v|\,|l_v|>-\infty, \tag{3.7}$$

де l_v − інтервали суміжності з множиною спектральних особливостей, $|l_v|$ − довжина інтервалу l_v. Підсумовування здійснюється за всіма скінченними l_v.

Власні значення оператора L, що занумеровані з урахуванням кратності, задовольняють умову

$$\sum \operatorname{Im}\sqrt{\lambda_v}<\infty.$$

3.2. Розв'язок задачі про спектральність у сенсі Данфорда − Бейда несамоспряженого оператора L у термінах комплекснозначного потенціалу $V(x)$

У цьому підрозділі отримано умови на комплекснозначний потенціал $V(x)$ оператора L (див. Означення 3.1), при яких цей оператор є спектральним за Данфордом − Бейдом у (комплексному) гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$. Доведено теореми, що розв'язують цю задачу.

Сформульована задача виникла в зв'язку з працями М.А. Наймарка, Б.С. Павлова, В.Е. Лянце, Н. Данфорда, Дж.Т. Шварца, В. Бейда. Праці згаданих вчених привели до розуміння того, що оператор L при умові (3.1) на комплекснозначний потенціал може не мати спектральної міри і навіть узагальненої спектральної міри в сенсі В.Е. Лянце − див. Теорему 3.3.

Для розв'язання сформульованої задачі автор запропонував параметричний метод, що ґрунтується на комутаційних властивостях пар Лакса загального рівняння Кортевеґа − де Фріза (КдФ).

Запишемо стаціонарний аналог загального рівняння КдФ у термінах пар Лакса:

$$[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1] = 0, \tag{3.8}$$

де $l = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$ − формальний одновимірний оператор Шредінґера з комплекснозначним потенціалом $V(x)$, а ієрархію Лакса $\{M_i\}$ задаємо у вигляді

$$M_{2i+1} = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k \right), \tag{3.9}$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_n$ − комплексні параметри; a_k − многочлени від комплекснозначної функції $V(x)$ і її похідних, $a_k = a_k(V, V', V'', \ldots)$, які мають властивість

$$\left| a_k(V, V', V'', \ldots) \right| \to 0$$

$$\text{при} \quad \left| V^{(j)}(x) \right| \underset{|x|\to\infty}{\to} 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.9a}$$

***Теорема* 3.4 (Основна теорема, І.-П.П. Сироїд [239, 240, 252]).** *Припустимо, що*:

(***i***) *вектор комплексних параметрів* $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння КдФ* (3.8) *такий, що рівняння*:

$$c_0 \lambda^{2n} + c_1 \lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1} \lambda^2 + c_n = 0 \tag{3.10}$$

не має дійсних коренів, тобто для многовиду AL *коренів рівняння* (3.10) *справджується умова*

$$\operatorname{dist}(AL, \mathbb{R}) = d > 0; \tag{3.10a}$$

(***ii***) $V(x)$ − *комплекснозначний розв'язок загального рівняння КдФ* (3.8), *що задовольняє умову* (3.1) *та умови на похідні*

$$\left| V^{(i)}(x) \right| \underset{|x|\to\infty}{\to} 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.11}$$

де m − *порядок рівняння КдФ* (3.8).

Тоді:

1°) *несамоспряжений оператор Шредінґера* L *з комплекснозначним потенціалом* $V(x)$ (*див. Означення* 3.1) *не має спектральних особливостей (сингулярних точок в сенсі М.А. Наймарка* [174]) *на неперервному спектрі і є спектральним у сенсі Данфорда − Бейда оператором;*

2°) *якщо* z − *недійсний корінь рівняння* (3.10), *то* z^2 *належить до дискретного спектра оператора* L.

Зауваження. Випадок $c_n = 0$ також можна дослідити, запровадивши корекції в доведення Теореми 3.4. Проте обмежимося лише прикладами для випадку $c_n = 0$ у кінці цього Розділу.

Висновок 1 з Теореми 3.4. *Припустимо, що виконуються умови Теореми* 3.4. *Тоді несамоспряжений оператор Шредінґера* L *з комплекснозначним потенціалом* $V(x)$ *має спектральну міру* (*обмежену за нормою*), *що задовольняє Означення* 3.2 (*див. також Означення* 3.4).

Висновок 2 з Теореми 3.4. *Потенціали* $V(x)$, *що задовольняють умови Теореми* 3.4, *є комплекснозначними аналогами* N*-солітонних розв'язків рівняння Кортевеґа де − Фріза.*

Перед доведенням Теореми 3.4 подамо відомі формули теорії одновимірного рівняння Шредінґера. У припущенні (3.1) одновимірне рівняння Шредінґера

$$l(y) = \lambda^2 y \tag{3.12}$$

має (див. Л.Д. Фаддєєв [83, 84]) розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ з асимптотиками:

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + o(1) \qquad \text{при} \qquad x \to -\infty. \tag{3.13}$$

Розв'язки (3.13) мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \mathcal{K}_1(x,y)e^{i\lambda y}\, dy, \tag{3.14}$$

де ядро $\mathcal{K}_1(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A \le x \le y < \infty$ і

$$\int_A^{\infty}\int_x^{\infty} \left|\mathcal{K}_1(x,y)\right| dy\, dx < \infty,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} \mathcal{K}_2(x,y)e^{-i\lambda y}\, dy, \tag{3.15}$$

а ядро $\mathcal{K}_2(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \le x \le B$. Функція $\left|\mathcal{K}_2(x,y)\right|$ сумовна в області $-\infty < y \le$ $\le x \le B$.

Для дійсних $\lambda \ne 0$ пари

$$f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння Шредінґера. Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\{f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda)\} = 2i\lambda, \quad \{f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)\} = -2i\lambda. \tag{3.16}$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами:

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)f_1(x,\lambda) + a(\lambda)f_1(x,-\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0, \tag{3.17}$$

$$f_1(x,\lambda) = -b(-\lambda)f_2(x,\lambda) + a(\lambda)f_2(x,-\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0, \tag{3.18}$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \{f_1(x,\lambda), f_2(x,\lambda)\},$$

$$w_1(\lambda) = \{f_2(x,\lambda), f_1(x,-\lambda)\} \tag{3.19}$$

таким чином:

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} w_1(\lambda). \tag{3.20}$$

За аналогією зі самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію $w_1(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом відбиття.

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані наступною формулою:

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0. \qquad (3.21)$$

Означення 3.5. Припустимо, що виконується умова (3.1) і задано рівняння

$$a(\lambda) = 0. \qquad (3.22)$$

Якщо $\lambda \neq 0$ − дійсний корінь рівняння (3.22), то число λ^2 називається *спектральною особливістю* оператора L.

Якщо λ_k − недійсний ($\operatorname{Im}\lambda_k > 0$) корінь рівняння (3.22), то число $s_k = \lambda_k^2$ належить до *дискретного спектра* оператора L.

Зауважимо при цьому, що за умови (3.1) додатна піввісь належить *неперервному спектру* оператора L, а число 0 не належить до множини власних значень дискретного спектра оператора L.

Якщо оператор L має спектральні особливості (сингулярні точки) на неперервному спектрі, то спектральна міра в сенсі Данфорда не існує.

Наведемо формулу для спектральної міри оператора L ***в припущенні, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі***. Ми йдемо за працями М.А. Наймарка і Б.Я. Левіна. Припустимо, що Δ − борелівська множина комплексної площини. Задамо операторну функцію $\Delta \to P(\Delta)$:

$$P(\Delta)y(x) = \sum_{j,n=1,2} \int\limits_{\Delta\cap(0,\infty)} \frac{V_{jn}(s)\sqrt{s}}{w(\sqrt{s})w(-\sqrt{s})}\omega_j(y,s)\omega_n(x,s)\,ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left\{\left(\frac{d}{ds}\right)^{\nu_k-1} M_k(s)f_2(y,\sqrt{s})f_1(x,\sqrt{s})\right\}_{s=s_k}. \qquad (3.23)$$

Пояснимо значення виразів, що входять до формули (3.23). Позначимо через $\omega_j(x,s)$ ті розв'язки рівняння Шредінґера (3.12), які задовольняють початкові дані

$$\omega_1(0,s) = 1, D_x\omega_1(0,s) = 0, \qquad \omega_2(0,s) = 0, \; D_x\omega_2(0,s) = 1.$$

Крім того, позначаємо $s = \lambda^2$ і $s_k = \lambda_k^2$; D_x − похідна за x.

Означення 3.6. Припустимо, що виконується умова (3.1) і оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі. L-перетворенням Фур'є функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ називається пара функцій

$$\omega_j(f,s), \qquad j = 1,2,$$

заданих на неперервному спектрі оператора L такими перетвореннями:

$$\omega_j(f,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\omega_j(x,s)\,dx, \qquad j = 1,2, \tag{3.24}$$

де в перетвореннях (3.24) збіжність інтегралів розуміємо в середньому квадратичному, і система векторів

$$f_j^{(i)}(f,\lambda_k),\ j = 0,1,\dots,m_k - 1,\ k = 1,\dots,N, \tag{3.25}$$

на дискретному спектрі оператора L. Система векторів (3.25) відповідає власним і приєднаним функціям дискретного спектра оператора L, що відповідають власним значенням $s_k = \lambda_k^2$.

Функції $V_{jn}(s)$ означені на дійсній осі формулами

$$V_{jn}(s) = f_1^{v}(0,\lambda)f_1^{æ}(0,-\lambda) + f_2^{v}(0,\lambda)f_2^{æ}(0,-\lambda), \quad s = \lambda^2,$$

де $v = \left[\dfrac{j+n}{4}\right]$, $æ = \left[\dfrac{j+n-1}{2}\right]$ означають порядок диференціювання за x. Крім того,

$$M_{æ}(s) = \frac{(s - s_{æ})^{v_{æ}}}{w(\sqrt{s})\,(v_{æ} - 1)!}.$$

У формулі (3.23) інтеграл збігається в середньому квадратичному, якщо $w(\sqrt{s}) \neq 0$ на неперервному спектрі оператора L. Припущення $w(\sqrt{s}) \neq 0$ відповідає випадку відсутності спектральних особливостей (сингулярностей) в сенсі М.А. Наймарка на неперервному спектрі оператора L.

Висновок 3 з Теореми 3.4. Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.4. Тоді кожна функція $y \in L_2(-\infty,\infty)$ однозначно визначається (за виконання умови (3.1) своїм L-*перетворенням Фур'є* і має місце рівність Парсеваля

$$y(x) = \sum_{j,n=1,2} \int_0^\infty \frac{V_{jn}(s)\sqrt{s}}{w(\sqrt{s})w(-\sqrt{s})} \omega_j(y,s)\omega_n(x,s)\,ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \left\{ \left(\frac{d}{ds}\right)^{\nu_k - 1} M_k(s) f_2(y,\sqrt{s}) f_1(x,\sqrt{s}) \right\}_{s=s_k}.$$

Цей результат є аналогічним до результату Б.Я. Левіна [5], отриманого ним для випадку півосі.

Ця рівність дозволяє врахувати внесок неперервного і дискретного спектра в задачу розвинення за власними і приєднаними функціями оператора L.

Випадок наявності спектральної особливості на неперервному спектрі оператора ми змушені виключити з розгляду (в цьому випадку функція $w(\lambda)$ перетворюється у нуль на спектральній особливості і інтеграл в (3.23) стає розбіжним).

Покажемо, що з умов Теореми 3.4 випливає, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі.

Означення 3.7. Комплекснозначний потенціал V оператора L за аналогією з самоспряженим випадком назвемо *безвідбивним*, якщо коефіцієнт відбиття $w_1(\lambda) \equiv 0$.

Означення коефіцієнта відбиття $w_1(\lambda)$ – формула (3.19).

***Лема* 3.1.** *Припустимо, що V – безвідбивний комплекснозначний потенціал оператора L. Тоді:*

***1*°)** *оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі і має місце рівність*

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 \tag{3.26}$$

на дійсній осі;

***2*°)** *множина власних значень оператора L скінченна, а оператор L є спектральним у сенсі Данфорда – Бейда. Спектральну міру $\Delta \to P(\Delta)$ оператора L можна реалізувати формулами* (3.23)–(3.25), *заданими за допомогою L-перетворення Фур'є згідно з Означенням* 3.4.

***3*°)** *функція $a(\lambda)$ має вигляд*

$$a(\lambda) = \prod_{l=1}^{N} \frac{(\lambda + \lambda_l)^{m_l}}{(\lambda - \lambda_l)^{m_l}}. \tag{3.27}$$

Д о в е д е н н я *Леми* 3.1. З того, що коефіцієнт відбиття $w_1(\lambda)$ тотожно дорівнює нулеві, випливає, що розв'язки $f_2(x,\lambda)$ і $f_1(x,-\lambda)$ лінійно залежні:

$$f_2(x,\lambda) = a(\lambda) f_1(x,-\lambda),$$

і, крім того, (див. (3.21)) має місце формула (3.26)

$$a(\lambda) = 1$$

для всіх дійсних λ в нашому безвідбивному випадку. Тобто $a(\lambda) \neq 0$ для всіх дійсних λ. Ми довели, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі. Тому оператор L не має точок скупчення власних значень дискретного спектра на неперервному спектрі.

З безвідбивної властивості потенціалу випливає, що функція $a(\lambda)$ неперервна у півплощині $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ і має в цій півплощині асимптотику

$$a(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{при} \qquad |\lambda| \to \infty.$$

Ми довели, що оператор L має скінченну кількість власних значень. Крім того, з (3.26) випливає формула (3.27).

З формули (3.26) випливає також, що

$$w(\lambda) w(-\lambda) = 4\lambda^2,$$

тобто функція $w(\lambda)w(-\lambda)$ обертається в нуль при $\lambda = 0$. Проте з цієї обставини не випливає розбіжність інтеграла в рівності Парсеваля для оператора L.

Спектральність в сенсі Данфорда − Бейда оператора L (твердження ***2°***) випливає з праці Б.Я. Левіна [5] або зі статті Г.М. Кесельмана [175] за умови відсутності спектральних особливостей на неперервному спектрі.

Основні твердження Леми 3.1 опубліковані в статті І.-.П.П. Сироїд [240].

***Лема* 3.2 (І.-П.П. Сироїд [240, 252]).** *Припустимо, що V − безвідбивний комплекснозначний потенціал оператора L. Тоді існує число $\varepsilon > 0$ таке, що функція $V(x)$ задовольняє умову*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon|x|} |V(x)| dx < \infty. \tag{3.28}$$

Д о в е д е н н я *Теореми* 3.4. Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.4. Основний тягар доведення Теореми 3.4 падає на доведення тієї обставини, що з умов цієї теореми випливає відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора L. Проте відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі випливає з Леми 3.1.

Щоб скористатися Лемою 3.1, доведемо, що потенціал $V(x)$ оператора L є безвідбивним потенціалом. Припустимо, що

$$M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \cdots + c_n M_1. \tag{3.29}$$

З огляду на рівняння КдФ (3.8) оператори L і M комутують. Тому оператор M переводить розв'язки одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) знову в розв'язки цього рівняння. Мають місце асимптотичні формули:

$$Mf_1(x,\lambda) = -\lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)e^{i\lambda x} + o(1),$$
$$x \to \infty, \tag{3.30}$$

$$Mf_1(x,-\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)e^{-i\lambda x} + o(1),$$
$$x \to \infty. \tag{3.31}$$

Достатньо довести (3.30). Розв'язок $f_1(x,\lambda)$ одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) має зображення у вигляді тотожності

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} V(t) f_1(t,\lambda)\,dt. \tag{3.32}$$

Діємо оператором M на $f_1(x,\lambda)$ в зображенні (3.32) і, враховуючи асимптотику (3.11), отримуємо (3.30).

Порівнюючи асимптотики (3.30) і (3.14) при $x \to \infty$, зауважуємо, що асимптотики розв'язків $M f_1(x,\lambda)$ і $f_1(x,\lambda)$ відрізняються на множник, що залежить лише від λ. Ця обставина відповідає умові комутування операторів L і M.

Для розв'язку $f_2(x,\lambda)$ одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) має місце тотожність

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} - \int_{-\infty}^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} V(t) f_2(t,\lambda)\,dt. \tag{3.33}$$

Використовуючи тотожність (3.33) і асимтотику (3.15), при $x \to -\infty$, отримуємо, що асимптотики розв'язків $Mf_2(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ відрізняються на множник, що залежить лише від λ.

Асимптотика розв'язку $f_2(x,\lambda)$ при $x \to \infty$ має вигляд

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)e^{i\lambda x} + a(\lambda)e^{-i\lambda x} + o(1). \tag{3.34}$$

Асимптотика розв'язку $Mf_2(x,\lambda)$ при $x \to \infty$ має вигляд

$$Mf_2(x,\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n) \times$$

$$\times (-b(\lambda)e^{i\lambda x} + a(\lambda)e^{-i\lambda x}) + o(1). \qquad (3.35)$$

З вимоги, щоб асимптотики (3.34) і (3.35) збігалися з точністю до множника, що залежить лише від λ, випливає рівність

$$\lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)b(\lambda) = 0.$$

За умовою Теореми 3.4

$$c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n \neq 0$$

на дійсній осі. Тому

$$\lambda b(\lambda) = 0, \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0. \qquad (3.36)$$

Враховуючи (3.20), отримуємо, що $w_1(\lambda) \equiv 0$. Твердження ***1°*** доведено.

Доведемо твердження ***2°***. З цією метою поряд з фундаментальною системою $f_1(x,\lambda)$, $f_1(x,-\lambda)$ задамо пару розв'язків

$$Mf_1(x,\lambda), \qquad Mf_1(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0.$$

Вронскіан цієї пари розв'язків дорівнює

$$\{Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda)\} =$$

$$= 2i\lambda^2(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)^2 \qquad (3.37)$$

і обчислюється за допомогою асимптотик (3.30) і (3.31).

З умов Теореми 3.4 випливає, що

$$\{Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda)\} \neq 0 \text{ при } \lambda \neq 0.$$

Позначимо коефіцієнти переходу між фундаментальними системами

$$Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

через $a^M(\lambda)$ і $b^M(\lambda)$:

$$f_2(x,\lambda) = b^M(\lambda)Mf_1(x,\lambda) + a^M(\lambda)Mf_1(x,-\lambda),$$

$$Mf_1(x,\lambda) = -\,b^M(-\lambda)f_2(x,\lambda) + a^M(\lambda)f_2(x,-\lambda).$$

При цьому

$$a^M(\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)a(\lambda)$$

і

$$a^M(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}\{Mf_1(x,\lambda), f_2(x,-\lambda)\}. \tag{3.38}$$

Якщо z − недійсний корінь рівняння $a^M(\lambda) = 0$, то z^2 належить до дискретного спектра оператора L.

Припустимо, що z − недійсний корінь рівняння (3.10). Тоді з формули (3.38) випливає, що z є коренем рівняння $a^M(\lambda) = 0$, а z^2 належить до дискретного спектра оператора L. Твердження $\boldsymbol{2}^\circ$ Теореми 3.4 доведено. Теорему 3.4 доведено. ◊

Зауваження до Теореми 3.4. З доведення Теореми 3.4 випливає, що у випадку нового припущення $c_n = 0$ аналог цієї теореми також можна сформулювати, запровадивши деякі корекції у формули. Можна припустити, що $c_{n-1} \neq 0$ і провести аналогічне доведення.

***Приклад* 3.1.** Рівняння

$$[\, l,\ M_3 + cM_1] = 0,\ c \neq 0, \tag{3.39}$$

є частковим випадком рівняння (3.8). Припустимо, що $a_1 = \frac{3}{4}V$ і $V(x)$, $V'(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. У формулі (3.39)

$$M_3 = -iD^3 + i\frac{3}{2}VD + i\frac{3}{4}VD, \qquad M_1 = iD,$$

де $D = \frac{d}{dx}$, $i^2 = -1$. Нагадаємо, що $l = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, і обчислимо комутатор

$$[\, l,\ M_3 + cM_1] = i\left(\frac{1}{4}V''' - \frac{3}{2}VV' - cV'\right). \tag{3.40}$$

З формул (3.39) і (3.40) отримуємо стаціонарне рівняння Кортеґа − де Фріза з параметром:

$$V''' - 6VV' - 4cV' = 0. \tag{3.39a}$$

При $c = 4h^2$, $\mathrm{Re}\, h \neq 0$ функція

$$V(x) = -\frac{8h^2}{\mathrm{ch}^2(2hx + i)} \tag{3.41}$$

є спадним на $\pm\infty$ розв'язком рівняння (3.39а).

Оператор Шредінґера L, що породжується диференціальним виразом

$$l(y) = -\frac{d^2}{dx^2}y - \frac{8h^2}{\mathrm{ch}^2(2hx + i)}y$$

з потенціалом $V(x)$ і областю визначення $D(L)$, не має спектральних особливостей на неперервному спектрі і є спектральним у сенсі Данфорда – Бейда оператором.

Згідно з Теоремою 3.4 необхідно розглянути розв'язки рівняння

$$\lambda^2 + c = 0 \qquad \text{або} \qquad \lambda^2 + 4h^2 = 0. \tag{3.42}$$

При $\mathrm{Re}\, h \neq 0$ корені рівняння (3.42) недійсні. Крім того, отримуємо, що існує функція f з $L_2(\mathbb{R})$ така, що

$$Lf = -4h^2 f.$$

Власна функція f, що відповідає власному значенню $-4h^2$, має вигляд

$$f(x) = -\frac{8h^2}{\mathrm{ch}(2hx + i)}, \qquad \mathrm{Re}\, h \neq 0.$$

Умова $\mathrm{Re}\, h \neq 0$ істотна. Якщо $h = iy$, де y – дійсне число, то потенціал $V(x)$ (див. (3.41)) стає періодичним і необмеженим.

3.3. Комплекснозначний солітонний многовид розв'язків стаціонарного загального рівняння Кортевеґа – де Фріза. Поняття Шредінґер-аналізу над солітонним многовидом

Нагадаємо, що стаціонарний аналог загального рівняння Кортевеґа – де Фріза у термінах пар Лакса має вигляд (3.8):

$$[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1] = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Означення 3.8. S-многовидом (або стаціонарним солітонним многовидом) називається многовид розв'язків загального рівняння КдФ (3.8), що належить до простору

$$X=\left\{f(x):\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left|f^{(n)}(x)\right|dx<\infty,\ n=0,1,\dots,m\right\},\qquad(3.43)$$

де m – порядок рівняння (3.8).

Зауваження щодо коректності означення S-многовиду. Теорема 3.4 і приклад з підрозділу 3.2 показують, що означення S-многовиду (стаціонарного солітонного многовиду КдФ) стає коректним, якщо вектор комплексних параметрів $(c_0,c_1,\dots,c_n)$, $c_n\neq 0$, з рівняння КдФ (3.8) такий, що рівняння (3.10) не має дійсних коренів, тобто виконується умова (3.10а).

Означення 3.9. Означимо *простір S^l формальних операторів Шредінґера l над S-многовидом:*

$$S^l=\left\{\,l:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R});\ l=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x),\ V(x)\in S\,\right\}.\qquad(3.44)$$

Означення 3.10 (простору *S^L операторів Шредінґера L над S-многовидом*). До простору S^L належать оператори Шредінґера L, що задовольняють умови Означення 3.1.

Основна задача Шредінґер-аналізу над S-многовидом полягає в з'ясуванні умов, за яких простір S^L є простором спектральних за Данфордом – Бейдом (див. Означення 3.4) операторів Шредінґера в просторі $L_2(\mathbb{R})$ і відповідні спектральні міри $\Delta\to P(\Delta)$ для кожного оператора L обмежені.

З доведення Теореми 3.4 випливає більш загальна теорема.

Теорема 3.5. *Припустимо, що вектор комплексних параметрів $(c_0,c_1,\dots,c_n)$, $c_n\neq 0$, з рівняння КдФ (3.8) змінюється таким чином, що для кожного вектора $(c_0,c_1,\dots,c_n)$ існує число $a>0$ таке, що*

$$\operatorname{dist}(AL,\mathbb{R})=a>0\qquad(3.45)$$

для многовиду AL коренів рівняння

$$c_0\lambda^{2n}+c_1\lambda^{2(n-1)}+\ldots+c_{n-1}\lambda^2+c_n=0.\qquad(3.46)$$

Тоді відповідний простір S^L операторів Шредінґера L над S-многовидом ***є простором спектральних за Данфордом – Бейдом операторів Шредінґера*** *і для кожного $L\in S^L$ відповідна спектральна міра $P(\Delta)$ одностайно обмежена за нормою.*

Теорема 3.6. *Припустимо, що для вектора комплексних параметрів* $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння* (3.8) *існує число* $a > 0$ *таке, що виконується умова* (3.45).

Тоді з того, що відповідний вектору $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *розв'язок* $V(x)$ *рівняння* (3.8) *належить до простору* X *(див.* (3.43)) *випливає, що* $V(x)$ *належить до простору*

$$G_\varepsilon = \left\{ g(x) : \exists \varepsilon > 0 \quad \text{і} \quad \int_R e^{\varepsilon x} |g(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.6. Тоді відповідний вектору $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, розв'язок $V(x)$ рівняння (3.8) є безвідбивним потенціалом для одновимірного оператора Шредінґера $L \in S^L$. Твердження Теореми 3.6 випливає з безвідбивної властивості потенціалу $V(x)$ згідно з Лемою 3.2. ◊

3.4. Приклади, що стосуються масштабування розв'язуваних потенціалів

Припустимо, що оператор L такий, як в означенні 3.1.

Означення 3.11. Потенціал $V(x)$ оператора L назвемо *розв'язуваним потенціалом*, якщо спектральна задача для L розв'язується у явній формі і при цьому оператор L є спектральним за Данфордом − Бейдом.

Теорема 3.7. *Припустимо, що* $V(x)$ *− розв'язуваний потенціал, а* v *− число.*

Тоді потенціал $\tilde{V}(x)$, *отриманий перетворенням*

$$\tilde{V}(x) = v^2 V(vx),$$

також є розв'язуваним.

Теорема 3.7 має багато застосувань. Запропонуємо приклади в наступних теоремах.

Теорема 3.8. *Припустимо, що* $v \neq ib$, *де* $i^2 = -1$. *Тоді потенціал*

$$\tilde{V}(x) = -12v^2 \frac{3 + 4\operatorname{ch}(2vx - 8t) + \operatorname{ch}(4vx - 64t)}{(3\operatorname{ch}(vx - 28t) + \operatorname{ch}(3vx - 36t))^2} \qquad (3.47)$$

є розв'язуваним для кожного фіксованого $t \geq 0$.

Д о в е д е н н я. Приклад стосується випадку $c_n = 0$ в загальному рівнянні КдФ (3.8). Конкретніше, приклад стосується **рівняння Кортевеґа – де Фріза**

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 6VV' - V'''. \tag{3.48}$$

Задамо початкову функцію

$$V_0(x) = -\frac{6}{\mathrm{ch}^2(x)}. \tag{3.49}$$

У просторі дійсних функцій задача (3.48), (3.49) розв'язана в [1], де також доведено, що потенціал

$$V(x) = -12\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2x - 8t) + \mathrm{ch}(4x - 64t)}{(3\,\mathrm{ch}(x - 28t) + \mathrm{ch}(3x - 36t))^2} \tag{3.50}$$

є 2-солітонним розв'язком цієї задачі. Твердження Теореми 3.8 випливає із застосування Теореми 3.7 до потенціалу (3.50). ◊

Приклад 3.2. *Припустимо, що* $v = d + iu$, $d \neq 0$. *Тоді оператор Шредінґера* $L(t)$, *що породжується диференціальним виразом*

$$l(y) = -y'' - 12v^2\,\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2vx - 8t) + \mathrm{ch}(4vx - 64t)}{(3\,\mathrm{ch}(vx - 28t) + \mathrm{ch}(3vx - 36t))^2}\,y$$

для кожного фіксованого t *є спектральним за Данфордом – Бейдом оператором*

$$L(t) : L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty).$$

Умова $d \neq 0$ в прикладі 3.2 є істотною. Це випливає з наступного прикладу.

Приклад 3.3. *Припустимо, що оператор* $L(0)$ *є замиканням оператора* L_0, *що породжується в просторі* $L_2(-\infty,\infty)$ *диференціальним виразом*

$$h(0)f = -f'' - 12v^2\,\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2vx) + \mathrm{ch}(4vx)}{(3\,\mathrm{ch}(vx) + \mathrm{ch}(3vx))^2}\,f$$

і областю визначення $D(L_0) = C_0^{\infty}(\mathbb{R})$.

Оператор $h(0)$ *при* $v = ip$, $i^2 = -1$, *має осцилюючий потенціал і при цьому амплітуда осциляцій стає необмеженою в точках, де функції* $\cos(px)$ *і* $\cos(3px)$ *одночасно перетворюються в нуль.*

РОЗДІЛ 4

КОМПЛЕКСНИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ЗАГАЛЬНОЇ СИСТЕМИ КОРТЕВЕҐА – ДЕ ФРІЗА

4.1. Вступ і необхідні означення

Запишемо комплексне рівняння Кортевеґа − де Фріза (КдФ)

$$V_t = 6VV_x - V_{xxx}. \tag{4.1}$$

Систему Кортевеґа − де Фріза

$$\begin{aligned} u_t &= 6uu_x - 6zz_x - u_{xxx}, \\ z_t &= 6zu_x + 6z_x u - z_{xxx} \end{aligned} \tag{4.2}$$

запропонував автор [254].

Система (4.2) еквівалентна комплексному рівнянню (4.1) КдФ. Щоб переконатися в цьому, досить підставити в (4.1) наступне зображення комплексної функції $V(x,t)$:

$$V(x,t) = u(x,t) + iz(x,t).$$

Параметризуємо рівняння (4.1) таким чином:

$$V_t = c_0(6VV_x - V_{xxx}) + 4c_1V_x, \tag{4.3}$$

де c_0 і c_1 − параметри, які можуть приймати комплексні або дійсні значення. Зрозуміло, що рівняння (4.3) є загальнішим, ніж рівняння (4.1). При $c_0 = 1$ і $c_1 = 0$ рівняння (4.3) перетворюється в рівняння (4.1).

Наступний крок полягає в тому, щоб використати пари Лакса [7]. Ідучи за алгоритмом, запропонованим у Розділі 2, і використовуючи комплексифікацію пар Лакса, отримуємо загальне комплексифіковане рівняння КдФ:

$$V_t = i[l,\ c_0M_{2n+1} + c_1M_{2n-1} + \ldots + c_nM_1], \tag{4.4}$$

де $V_t = \frac{\partial l}{\partial t}$; $l = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ – формальний одновимірний оператор Шредінґера на всій осі, що параметрично залежить від t; $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ – вектор комплексних параметрів. Множину операторів $\{M_i\}$ називаємо ієрархією Лакса для моделі КдФ і задамо ці оператори наступним чином:

$$M_{2i+1} = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k\right),$$

де $D = \frac{\partial}{\partial x}$; $a_k = a_k(V, V_x, V_{xx}, \ldots; t)$ – многочлени від функції $V(x,t)$ і її похідних за змінною x.

Позначимо

$$M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1. \tag{4.5}$$

Комплексне параметричне узагальнення МОЗР полягає в розв'язанні задачі Коші для загального параметричного рівняння КдФ (4.4) з початковою умовою

$$V(x,0) = V_0(x) \tag{4.6}$$

у просторі комплекснозначних функцій, тобто реалізації описаного у вступі алгоритму.

4.2. Розв'язання несамоспряженої прямої задачі розсіяння для оператора L

Припустимо, що $V_0(x)$ – комплекснозначна функція, визначена на всій осі згідно з (4.6), і ця функція задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + x^2)\,|\,V(x)\,|\,dx < \infty. \tag{4.7}$$

Означення 4.1. Означимо оператор L. Несамоспряжений оператор Шредінґера L породжується в комплексному гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, диференціальним виразом

$$l(y)(x) = -y''(x) + V_0(x)y(x) \tag{4.8}$$

та областю визначення $D(L)$, до якої належать всі $y \in \in L_2(\mathbb{R})$, для яких похідна y' існує, абсолютно неперервна в кожному скінченному проміжку і $l(y) \in L_2(\mathbb{R})$.

Рівняння Шредінґера

$$l(y) = \lambda^2 y \tag{4.9}$$

має (див. [83, 84]) розв'язки $e_+(x,\lambda)$ і $e_-(x,\lambda)$ з асимптотиками

$$e_+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1), \qquad x \to \infty,$$

$$e_-(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + o(1), \qquad x \to -\infty, \tag{4.10}$$

де $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$.

Зауважимо, що для доведення існування розв'язків, замість умови (4.7) можна використати слабшу умову Л.Д. Фаддєєва (3.3).

Крім того, в Розділі 4 ми змінюємо позначення на такі, що зручніші для нас з огляду на КПМОЗР.

Розв'язки $e_+(x,\lambda)$ і $e_-(x,\lambda)$ аналітичні за λ в півплощині $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, неперервні аж до межі $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

Розв'язки (4.10) мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна (4.11) і (4.12):

$$e_+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \mathcal{K}_+(x,y)e^{i\lambda y}dy, \tag{4.11}$$

де ядро $\mathcal{K}_+(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A \leq x \leq y < \infty$ і

$$\int_A^\infty \int_x^\infty |\mathcal{K}_+(x,y)|\,dy\,dx < \infty,$$

$$e_-(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^x \mathcal{K}_-(x,y)e^{-i\lambda y}dy, \tag{4.12}$$

де ядро $\mathcal{K}_-(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \leq x \leq B$. Функція $|\mathcal{K}_-(x,y)|$ сумовна в області $-\infty < y \leq x \leq B$.

Для дійсних $\lambda \neq 0$ пари

$$e_+(x,\lambda),\ e_+(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad e_-(x,\lambda),\ e_-(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння (4.9). Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\{e_+(x,\lambda),\ e_+(x,-\lambda)\} = 2i\lambda,$$

$$\{e_-(x,\lambda),\ e_-(x,-\lambda)\} = -2i\lambda. \tag{4.13}$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами:

$$e_-(x,\lambda) = -b(-\lambda)e_+(x,\lambda) + a(\lambda)e_+(x,-\lambda), \ \ \mathrm{Im}\,\lambda = 0, \lambda \neq 0, \quad (4.14)$$

$$e_+(x,\lambda) = b(\lambda)e_-(x,\lambda) + a(\lambda)e_-(x,-\lambda), \ \mathrm{Im}\,\lambda = 0, \lambda \neq 0, \quad (4.15)$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \{e_+(x,\lambda), e_-(x,\lambda)\},$$

$$w_1(\lambda) = \{e_+(x,\lambda), e_-(x,-\lambda)\} \quad (4.16)$$

таким чином:

$$a(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w_1(\lambda). \quad (4.17)$$

За аналогією зі самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ ***назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію*** $w_1(\lambda)$ ***назвемо коефіцієнтом відбиття.***

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані формулою

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \mathrm{Im}\,\lambda = 0, \lambda \neq 0. \quad (4.18)$$

Означення 4.2. Припустимо, що виконується умова (3.1) і задано рівняння

$$a(\lambda) = 0. \quad (4.19)$$

Якщо $\lambda \neq 0$ – дійсний корінь рівняння (4.19), то число λ^2 називається *спектральною особливістю* оператора L.

Якщо λ_k – недійсний ($\mathrm{Im}\,\lambda_k > 0$) корінь рівняння (4.19), то число $s_k = \lambda_k^2$ належить до *дискретного спектра* власних значень оператора L.

Зауважимо при цьому, що за умови (4.7) додатна піввісь належить *неперервному спектру* оператора L, а нуль не належить до власних значень оператора L.

Далі припускатимемо (з метою знаходження комплексних аналогів солітонних і N-солітонних розв'язків загального рівняння КдФ), що ***оператор*** L ***не має спектральних особливостей*** (сингулярних точок за М.А. Наймарком) на неперервному спектрі, тобто

$$w(\lambda) \neq 0 \quad (4.20)$$

для всіх дійсних λ. Це означає, що ***оператор L припускаємо спектральним за Данфордом − Бейдом, а спектральна міра оператора L існує і є одностайно обмежена за нормою***.

Ідучи за статею Б.Я. Левіна [5], для оператора L можна довести ще сильніший результат.

***Лема* (Про спектральність).** *Припустимо, що для потенціалу оператора L виконується умова* (4.7).

Тоді:

1°) *відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора L є необхідною і достатньою умовою спектральності в сенсі Данфорда − Бейда оператора L;*

2°) *за умови відсутності спектральних особливостей в оператора L для всякої функції $y \in L_2(-\infty, \infty)$ має місце рівність Парсеваля* (*див. Розділ* 3), *що гарантує розвинення функції $y \in L_2(-\infty, \infty)$ за власними і приєднаними функціями оператора L;*

3°) *за відсутності спектральних особливостей в оператора L спектральна міра, що комутує з одновимірним оператором Шредінґера L на всій осі існує і зображується формулою* (3.23).

Припущення про відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора L зумовлене тією обставиною, що комплекснозначним аналогам солітонних і N-солітонних розв'язків рівняння Кортевеґа − де Фріза відповідають безвідбивні потенціали. Оператор Шредінґера з безвідбивним потенціалом не має спектральних особливостей на неперервному спектрі (доведення − див. Розділ 3). Ця обставина пов'язана з властивостями стійкості солітонних многовидів моделі Кортевеґа − де Фріза і добре погоджується з твердженням Б.Б. Кадомцева і В.І. Петвіашвілі [6] стосовно стійкості моделі Кортевеґа − де Фріза.

При виконанні умови (4.20) функція $w(\lambda)$ має скінченну множину нулів у півплощині $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Позначимо їх через $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ і назвемо сингулярними числами оператора L. Кратність кореня λ_p рівняння $w(\lambda) = 0$ називаємо кратністю сингулярного числа λ_p і позначимо її через m_p.

Припустимо, що λ_p − сингулярне число оператора L. Оскільки вронскіан функцій $e_+(x, \lambda_p)$ і $e_-(x, \lambda_p)$ дорівнює нулеві, ці функції лінійно залежні. Існують такі ланцюжки чисел

Зі статті [7] випливає, що рівняння (2.7) можна зобразити у вигляді

$$V_t = [-D^2 + V,\, c_0 M_3 + c_1 M_1], \tag{2.10}$$

де M_1, M_3 − оператори з ієрархії Лакса − див. [7].

Для знаходження солітонних і N-солітонних розв'язків рівняння (2.10) досліджується простір початкових даних за допомогою стаціонарного рівняння Кортевеґа − де Фріза

$$[-D^2 + V,\, c_0 M_3 + c_1 M_1] = 0,$$

яке можна звести до вигляду

$$V''' + 6VV' - 4zV' = 0. \tag{2.11}$$

Відповідні обчислення зроблені в статті І.-П.П. Сироїд [252].

Сформулюємо теорему про зв'язок теорії М.О. Лаврентьєва [ГД 1] зі стаціонарними солітонами (точніше, їх модулями) рівняння Кортевеґа − де Фріза.

***Теорема* 2.3.** *Припустимо, що справджуються умови Теореми* 2.1, *зокрема, згадані вище умови М. О. Лаврентьєва.*

Тоді для значень параметрів $h = \sqrt[3]{1.5}$ *і* $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ *рівняння* (2.6) *збігається з рівнянням*

$$V'' = -\,3V^2 + 4zV + d, \tag{2.12}$$

яке отримано зі стаціонарного рівняння Кортевеґа − де Фріза (2.11) *шляхом взяття первісної.*

Зауваження 2.1. *Зі зміною масштабування рівняння Кортевеґа − де Фріза параметри* h *і* z *в Теоремі* 2.3 *слід також відповідно масштабувати. Критерієм при цьому має бути досягнення рівноваги між нелінійністю і дисперсією* (*між нелінійним членом і дисперсними лінійними членами рівняння Кортевеґа − де Фріза з урахуванням величини відповідних коефіцієнтів*).

Доведення ***Теореми 2.3.*** Припустимо, що виконуються умови Теореми 2.3. Рівняння (2.6) отримується з умови (2.1) сталого тиску на поверхні хвилі, яка формулюється через комплексний потенціал рухомої рідини. При цьому виконуються умови М.О. Лаврентьєва і додаткові умови, наведені вище. Пояснимо, що рівняння (2.6) є джерелом розв'язків, наближених до точного розв'язку задачі М.О. Лаврентьєва. По-

кажемо, що рівняння (2.6) можна отримати з стаціонарного рівняння КдФ з параметром (2.11) при вказаних у формулюванні теореми значеннях параметрів h і z. Для цього застосуємо до рівняння (2.11) операцію інтегрування і дістаємо рівняння (2.12). Припустимо, що $h = \sqrt[3]{1.5}$. Тоді при $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ рівняння (2.6) є частковим випадком рівняння (2.12). Зрозуміло, що всякий тричі диференційовний розв'язок рівняння (2.12) є розв'язком стаціонарного рівняння КдФ (2.11). ◊

Висновок з Теореми 2.3. *Нехай* $h = \sqrt[3]{1.5}$. *Тоді при* $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ *побудовану М.О. Лаврентьєвим ізольовану хвилю* $y(x,\infty)$ *можна наблизити стаціонарним розв'язком рівняння з параметром* (2.12), *використавши оцінку*

$$|\, y(x,\omega) - y(x,\infty)\,| < \frac{K_5 h^2}{\log \frac{1}{h}} \tag{2.13}$$

з Теореми Лаврентьєва. При цьому замість $y(x,\infty)$ *слід підставити розв'язок (стаціонарного) рівняння* (2.12), *а потім зробити граничний перехід при* $\omega \to \infty$. *Тобто стаціонарний солітонний розв'язок рівняння КдФ при конкретних значеннях параметрів* ($h = \sqrt[3]{1.5}$, $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$), *вказаних у доведенні Теореми* 2.3, *є наближенням розв'язку* $y(x,\infty)$, *отриманого методом М.О. Лаврентьєва.*

Доведення ***висновку з Теореми 2.3.*** Зафіксуємо значення параметрів відповідно до умов Теореми 2.3: $h = \sqrt[3]{1.5}$ і $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$. Тоді за Теоремою 2.3 рівняння (2.6) і (2.12) збігаються, а за Теоремою 2.2 М.О. Лаврентьєва має місце оцінка (2.13). Твердження висновку випливає при цьому з методу М.О. Лаврентьєва. Розв'язок $y(x,\infty)$ є стаціонарним солітоном КдФ за єдиністю розв'язку з умовою анулювання на $\pm\infty$. ◊

Теорема 2.4. *Припустимо, що виконуються умови Теореми* 2.3. *Тоді*:

1°) *має місце оцінка*

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\operatorname{ch}^2(2\mu x)} \right| < 0.014841 \frac{h^2}{\left|\log \frac{1}{h}\right|} \tag{2.14}$$

для відхилення розв'язку $y(x,\infty)$ *від функції* $\dfrac{8\mu^2}{\operatorname{ch}^2 2\mu x}$, *яку при* $\psi = 0$ *отримуємо з розв'язку*

$$y(x,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

рівняння (2.11), *якщо* $z = 4\mu^2$, *а* $\mu^2 = \frac{3}{8}\sqrt[3]{1.5}$ *і* $h = \sqrt[3]{1.5}$;

2°) *при* $x \to \infty$ *має місце співвідношення*

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)} \right| \to 0$$

для скінченного фіксованого числа ψ;

3°) $$\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313.$$

(Зауважимо, що оцінки в Теоремі 2.4 відповідають значенням параметрів, для яких досягається рівновага нелінійності і дисперсії. При зміні масштабування рівняння Кортевеґа – де Фріза значення параметрів слід поміняти так, щоб знову досягнути рівноваги нелінійності і дисперсії в рівнянні КдФ – див. Зауваження 2.1.)

Доведення. Твердження ***1°*** теореми випливає з оцінки (2.13), якщо обчислити сталу K_5. Для цього спочатку знайдемо максимальне значення розв'язку $y(x,\infty)$, яке досягається при $x = 0$. З методу М.О. Лаврентьєва випливає, що $y(0,\infty) = h + 2h^2$ – див. [ГД 1]. При $h = \sqrt[3]{1.5}$ обчислюємо висоту хвилі Лаврентьєва

$$y(0,\infty) = 3.7654556367.$$

При цьому має місце $\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313$. Ми довели твердження ***3°*** теореми, якщо врахувати, що при $x = 0$ і $\psi = 0$ маємо

$$y(0,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)} = 8\mu^2,$$

а

$$8\mu^2 = 2z = 3\sqrt[3]{1.5}.$$

Але при $h = \sqrt[3]{1.5}$ маємо оцінку

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x)} \right| < 22.3242886\, K_5, \qquad (2.15)$$

яка випливає з висновку з Теореми 2.3, а саме, з оцінки (2.13), якщо скористатися виразом для стаціонарного солітона КдФ. Стаціонарний солітон КдФ

$$y(x,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

отримується явно при розв'язуванні наведеного вище стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза.

З оцінки (2.15) і доведеної вище рівності

$$\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313$$

випливає, що $K_5 \geq 0.014841$. Ми довели твердження ***1°*** теореми.

Твердження ***2°*** випливає з властивостей хвилі М.О. Лаврентьєва $y(x,\infty)$ при $x \to \pm\infty$ при виконанні умов теореми. Теорему 2.4 доведено. ◊

З оцінки (2.14) при виконанні умов Теореми 2.4 отримуємо

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x)} \right| < 0.331313. \tag{2.16}$$

2.4. Випадок загального параметричного стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза

Запишемо стаціонарний аналог загального рівняння Кортевеґа – де Фріза (КдФ) у термінах пар Лакса:

$$[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_0] = 0, \tag{2.17}$$

де $l = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$ – формальний оператор Шредінґера з потенціалом $V(x)$, а ієрархію Лакса $\{M_i\}$ задаємо у вигляді

$$M_i = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k \right), \tag{2.18}$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – параметри, а функції a_k залежать від функції $V(x)$ і її похідних, $a_k = a_k(V, V', V'', \ldots)$.

Припустимо, що функція $q(x)$ має похідні до третього порядку включно і виконується умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)\left| q^{(k)}(x)\right| dx < \infty, \qquad k = 0,1,2,3.$$

Означимо оператор L таким чином:

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \qquad \text{і} \qquad L : L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty).$$

Областю визначення $D(L)$ оператора L є множина всіх функцій f, що мають похідну f', абсолютно неперервну в кожному скінченному інтервалі дійсної осі, таких, що f і Lf належать до $L_2(-\infty,\infty)$.

Функцію $q(x)$ називають *потенціалом* оператора L.

Означення безвідбивних потенціалів для оператора L – див. [1, 4, 66, 239, 240]. Відновимо це означення в цьому місці. За виконання наших припущень стосовно потенціалу $q(x)$ одновимірне рівняння Шредінґера

$$l(y) = \lambda^2 y$$

має (див. Л.Д. Фаддєєв [83, 84]) розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ з асимптотиками

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + o(1) \qquad \text{при} \qquad x \to -\infty.$$

Розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна:

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \mathcal{K}_1(x,y)e^{i\lambda y}\,dy,$$

де ядро $\mathcal{K}_1(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A \le x \le y < \infty$ і

$$\int_A^{\infty}\int_x^{\infty} |\mathcal{K}_1(x,y)|\,dy\,dx < \infty,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} \mathcal{K}_2(x,y)e^{-i\lambda y}\,dy,$$

а ядро $\mathcal{K}_2(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \le x \le B$. Функція $\left|\mathcal{K}_2(x,y)\right|$ сумовна в області $-\infty < y \le \le x \le B$.

Для дійсних $\lambda \ne 0$ пари

$$f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння Шредінґера. Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\{f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda)\} = 2i\lambda,$$

$$\{f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)\} = -2i\lambda.$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)f_1(x,\lambda) + a(\lambda)f_1(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0,$$

$$f_1(x,\lambda) = -b(-\lambda)f_2(x,\lambda) + a(\lambda)f_2(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0,$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \{f_1(x,\lambda), f_2(x,\lambda)\},$$

$$w_1(\lambda) = \{f_2(x,\lambda), f_1(x,-\lambda)\}$$

таким чином:

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w_1(\lambda).$$

За аналогією з самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію $w_1(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом відбиття.

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані формулою

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0.$$

Потенціал $q(x)$ називають безвідбивним, якщо коефіцієнт відбиття анулюється:

$$w_1(\lambda) \equiv 0.$$

***Теорема* 2.5 (див. також І.-П.П. Сироїд [240, 252]).** *Припустимо, що:*

(***i***) *вектор параметрів* $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *у стаціонарному рівнянні КдФ* (2.17) *такий, що рівняння вигляду*

$$c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n = 0 \tag{2.19}$$

не має дійсних коренів, тобто для многовиду AL *коренів рівняння* (2.19) *виконується умова*

$$\operatorname{dist}(AL, \mathbb{R}) = d > 0; \tag{2.20}$$

(***ii***) $V(x)$ – *дійсний розв'язок загального рівняння КдФ* (2.17), *що задовольняє умову*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|V(x)|dx < \infty$$

та умови на похідні:

$$\left|V^{(i)}(x)\right| \underset{|x|\to\infty}{\to} 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{2.21}$$

де m – *порядок рівняння КдФ* (2.17).

Тоді:

1°) *самоспряжений одновимірний оператор Шредінґера* L *з потенціалом* $V(x)$ *відповідає безвідбивному випадку, тобто* $V(x)$ – *безвідбивний потенціал;*

2°) *якщо* z – *недійсний* (*уявний*) *корінь рівняння* (2.19), *то* z^2 *належить до дискретного спектра оператора* L.

***Теорема* 2.6 (І.-П.П. Сироїд [240]).** *Припустимо, що* $V(x)$ – *безвідбивний потенціал оператора* L. *Тоді*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon|x|}\,|V(x)|\,dx < \infty.$$

Зауваження 2.2. Змінимо масштабування стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза:

$$u_{xxx} + 12uu_x + cu_x = 0. \tag{2.22}$$

Порівняємо рівняння (2.22) з рівнянням (2.6). Рівняння (2.22) має розв'язок

$$Y(x) = \frac{a^2}{4\,\mathrm{ch}^2\,0.5\,(ax+f)}.$$

При $h = \sqrt[3]{0.75} = 0.90856$ отримуємо

$$|\,y(x,\infty) - Y(x)\,| < 19.82128\,C.$$

Параметр C можна обчислити аналогічно до обчислень, зроблених в Теоремі 2.4.

Зауваження 2.3 (щодо нестаціонарного випадку). Досягненням МОЗР є можливість досліджувати динаміку розвитку солітонних і N-солітонних розв'язків (нестаціонарного) рівняння Кортевеґа − де Фріза. З Теореми 2.4 випливає можливість отримати також динаміку відхилення модуля поодинокого солітона (отриманого за допомогою МОЗР) при значеннях $t > 0$ від розв'язку $y(x,\infty)$.

Початковій функції

$$V(x,0) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

відповідає розв'язок задачі Коші

$$V(x,t) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x - vt + \psi)}$$

для рівняння Кортевеґа − де Фріза.

Зафіксуємо t так, щоб виконувалося співвідношення $2\mu x + \psi = vt$. Тоді функція $V(x,t)$ досягає максимуму: $\max V(x,t) = 8\mu^2$. Але

$$\max V(x,0) = 8\mu^2 \qquad\qquad (\text{при } 2\mu x + \psi = 0).$$

Це означає, що має місце оцінка

$$|\,y(x,\infty) - V(x,t)\,| < 0.014841\frac{h^2}{\left|\log\frac{1}{h}\right|}$$

принаймні для $2\mu x + \psi = vt$ і $h = \sqrt[3]{1.5}$. Тобто

$$|\,y(x,\infty) - V(x,t)\,| < 0.331313$$

при запропонованих обмеженнях.

РОЗДІЛ 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО СПЕКТРАЛЬНІСТЬ ЗА ДАНФОРДОМ – БЕЙДОМ ОДНОВИМІРНОГО НЕСАМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДІНҐЕРА НА ВСІЙ ОСІ В ТЕРМІНАХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

3.1. Необхідні означення

Припустимо, що комплекснозначна функція $V(x)$ задовольняє умову

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)\, |\, V(x) \,|\, dx < \infty. \tag{3.1}$$

Означення 3.1. Означимо оператор L. Несамоспряжений оператор Шредінґера L породжується в комплексному гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, диференціальним виразом

$$l(y)(x) = y''(x) + V(x)y(x) \tag{3.2}$$

і областю визначення $D(L)$, до якої належать усі $y \in L_2(\mathbb{R})$, для яких похідна y' існує, абсолютно неперервна в кожному скінченному проміжку і $l(y) \in L_2(\mathbb{R})$.

Комплекснозначну функцію $V(x)$ в означенні 3.1 називають потенціалом оператора Шредінґера L за формальною аналогією з самоспряженим випадком.

У випадку півосі аналогічну до (3.1) умову Б.Я. Левін [5] використав для узагальнення перетворень Фур'є і Лапласа. При цьому він істотно узагальнив оператори перетворення (оператори узагальненого зсуву Дельсарта − Левітана) для випадку операторів Штурма − Ліувілля на півосі і на всій осі (див. додатково [107]).

Зауваження. За аналогією до статті [5] можна довести, що за умови відсутності на неперервному спектрі несамоспряженого оператора L (з комплекснозначним потенціалом) спектральних особливостей в сенсі М.А. Наймарка [174], умова (3.1) гарантує спектральність в сенсі Данфорда − Бейда цього оператора і для довільної функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ має місце розвинення за власними і приєднаними функціями оператора L.

Зазначимо, що в низці випадків умову (3.1) можна замінити такою:

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)\,|V(x)|\,dx < \infty. \tag{3.3}$$

При потребі використання умови (3.3) робитимемо відповідні зауваження.

Зробимо пояснення щодо теорії оператора L зі спектральними особливостями.

Несамоспряжений оператор Шредінґера L з огляду на припущення комплексності потенціалу за умови (3.1) не є спектральним оператором у сенсі В.Е. Лянце (і тим більше, не є спектральним у сенсі Н. Данфорда). Це випливає з результатів М.А. Наймарка [174], а також з праць Б.С. Павлова [176−178]. Щоправда, М.А. Наймарк [174] і Б.С. Павлов [176−178] дослідили лише випадок півосі $[0,\infty)$. Проте ситуація для несамоспряженого оператора Шредінґера L на всій осі аналогічна до випадку півосі $[0,\infty)$. Наявність спектральних особливостей в оператора L означає, що в цього оператора без додаткових обмежень на потенціал $V(x)$ спектральна міра або не існує, або існує лише в сенсі узагальнення, даного В.Е. Лянце [158] у випадку скінченного числа спектральних особливостей.

У Розділі 3 автор розв'язує задачу: які додаткові обмеження на комплексний потенціал оператора Шредінґера L слід накладати, щоб оператор L став спектральним в сенсі Данфорда − Бейда і мав спектральну міру в сенсі Данфорда?

Розв'язана в цьому Розділі задача вважалася проблемною (важкою) − див., наприклад, передмову А.Г. Костюченка [173] до монографії Н. Данфорда і Дж.Т. Шварца [172]. Щоправда, А.Г. Костюченко торкається лише крайової задачі на півосі. Відразу зазначимо, що задачу на всій осі розв'язувати важче, бо немає переваги наявності крайової умови в початку координат (яка є у випадку задачі на півосі). Поняття спектральності за Данфордом − Бейдом − основне в цьому Розділі. Для зручності відтворимо і доповнимо означення, анонсовані в попередніх підрозділах щодо спектральності за Данфордом − Бейдом.

Наступне означення спектральної міри оператора і подальші теореми подамо за статею Н. Данфорда [171] і працею В.Е. Лянце [158].

Означення 3.2 (Спектральна міра в сенсі Данфорда). Спектральною мірою в гільбертовому просторі H називається операторнозначна функція множини $P : \Delta \to P(\Delta)$, яка має такі властивості:

A) Функція P визначена на класі (B) всіх борелівських підмножин комплексної площини $\mathbb{C}$;

B) Значеннями функції P є лінійні обмежені оператори $P(\Delta)$, що відображають весь простір H у себе і мають такі властивості:

1) $\quad P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2), \qquad \Delta_1, \Delta_2 \in (B)$;

2) $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(P(\Delta_k)f, g \right) = \left(P(\Delta)f, g \right)$ для всякого розбиття множини $\Delta \in (B)$ на частини $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \in (B)$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$ при $i \neq j$, де $\varnothing$ – порожня множина;

3) $\quad P(\mathbb{C}) = I$ де I – оператор тотожного перетворення в просторі H, а $\mathbb{C}$ – комплексна площина.

З умов ***A***) і ***B***) випливає (див. В.Е. Лянце [158]), що для спектральної міри P існує таке число $K, 1 \leq K < \infty$, що має місце властивість

C) $\quad \| P(\Delta) \| \leq K$ для всіх $\Delta \in (B)$;

4) якщо для деякого $\Delta \in (B)$ виконується $\| P(\Delta) \| = 1$, то оператор $P(\Delta)$ є самоспряженим ортопроектором.

З умови ***2***) випливає, що $P(\varnothing) = 0$, тому

$$P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 0, \text{ якщо } \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing.$$

Ця властивість означає, що множинам, які не перетинаються, відповідають лінійно незалежні простори $P(\Delta_1)H$ і $P(\Delta_2)H$.

За означенням, міра P вважається зчисленно-адитивною у слабкому сенсі, проте зі слабкої зчисленної адитивності міри P випливає сильна адитивність P (див. [158]).

Означення 1.4 (Розвинення одиниці обмеженого оператора T). Припустимо, що H – комплексний гільбертів простір, T – обмежений оператор в H, а P – спектральна міра. Ідучи за Н. Данфордом, розглянемо такі властивості:

U) оператор T комутує зі спектральною мірою P, тобто для кожної множини $P(\Delta)H$ справджується $TP(\Delta) = P(\Delta)T$;

V) спектр $\mathrm{sp}\,(T \mid P(\Delta)H)$ звуження оператора T на інваріантний підпростір $P(\Delta)H$ міститься в замиканні $\overline{\Delta}$ множини $\Delta \in (B)$:

$$\mathrm{sp}\,(T \mid P(\Delta)H) \in \overline{\Delta}.$$

Спектральну міру P, що має разом з оператором T властивості ***U***) і ***V***), називають *розвиненням одиниці оператора* T.

З метою дослідити умови спектральності необмеженого одновимірного оператора Шредінґера L (див. Означення 3.1) через потенціал подамо за книгою [172, Ф 7, т. 3] необхідні означення і теореми теорії необмежених спектральних операторів.

Означення 3.4. Припустимо, що (B) − клас (поле) борелівських підмножин комплексної площини, а T − лінійний оператор, область визначення $D(T)$ і область значень $R(T)$ якого належать до комплексного банахового простору X. Тоді оператор T називають *спектральним в сенсі Данфорда − Бейда*, якщо він замкнений та існує така зчисленно-адитивна спектральна міра E, визначена на (B), що:

$$E(\sigma)X \subseteq D(T), \qquad E(\sigma)D(T) \subseteq D(T) \tag{3.4}$$

і

$$TE(\sigma)x = E(\sigma)Tx, \qquad x \in D(T), \qquad \sigma \in (B), \tag{3.5}$$

спектр $\mathrm{sp}(T \mid E(\sigma)X)$ звуження $T \mid E(\sigma)X$ оператора T, визначеного на перетині $D(T) \bigcap E(\sigma)X$, задовольняє умову

$$\mathrm{sp}(T \mid E(\sigma)X) \subseteq \overline{\sigma}, \qquad \sigma \in (B). \tag{3.6}$$

Тут $\overline{\sigma}$ − замикання множини σ.

Спектральну міру E називають розвиненням одиниці необмеженого оператора T.

З цього означення випливає, що область визначення спектрального оператора щільна в просторі X.

***Теорема* 3.1 (В. Бейд, В.Е. Лянце).** *Припустимо, що $\Delta \in (B)$, T − спектральний оператор і E − його розвинення одиниці.*

Тоді:

1°) *звуження $T \mid E(\Delta)X$ оператора T на $E(\Delta)X$ є спектральним оператором, а його розвинення одиниці є звуженням E на підпростір $E(\Delta)X$. Якщо множина $\Delta \in (B)$ обмежена, то оператор $T \mid E(\Delta)X$ є обмеженим оператором;*

2°) розвинення одиниці замкненого спектрального оператора визначається однозначно.

*Оператор A, що має властивість (**W**) за умови комутування операторів S і N, є спектральним за Данфордом оператором.*

Теорема 3.2 (В. Бейд). *Припустимо, що T − замкнений оператор, а λ − точка резольвентної множини цього оператора. Оператор T є спектральним тоді й тільки тоді, коли його резольвента $(T-\lambda)^{-1}$ є спектральним оператором, а його спектральна міра E задовольняє умову $E(\{0\})=0$.*

Якщо припустити лише виконання умови (3.1) на комплекснозначний потенціал оператора L, то оператор L не матиме властивості спектральності за Данфордом − Бейдом. Це випливає з результатів М.А. Наймарка [174] і Б.С. Павлова [176−178].

Теорема 3.3 (Б.С. Павлов [178]). *Припустимо, що комплекснозначний потенціал $V(x)$ одновимірного оператора Шредінґера L на півосі задовольняє умову*

$$\int_0^{\infty}(1+x^2)|V(x)|\,dx<\infty.$$

Тоді множина спектральних особливостей оператора L обмежена, замкнена та має міру нуль. Крім того, для множини спектральних особливостей виконується умова

$$\sum \ln|l_v|\,|l_v|>-\infty, \tag{3.7}$$

де l_v − інтервали суміжності з множиною спектральних особливостей, $|l_v|$ − довжина інтервалу l_v. Підсумовування здійснюється за всіма скінченними l_v.

Власні значення оператора L, що занумеровані з урахуванням кратності, задовольняють умову

$$\sum \operatorname{Im}\sqrt{\lambda_v}<\infty.$$

3.2. Розв'язок задачі про спектральність у сенсі Данфорда − Бейда несамоспряженого оператора L у термінах комплекснозначного потенціалу $V(x)$

У цьому підрозділі отримано умови на комплекснозначний потенціал $V(x)$ оператора L (див. Означення 3.1), при яких цей оператор є спектральним за Данфордом − Бейдом у (комплексному) гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$. Доведено теореми, що розв'язують цю задачу.

Сформульована задача виникла в зв'язку з працями М.А. Наймарка, Б.С. Павлова, В.Е. Лянце, Н. Данфорда, Дж.Т. Шварца, В. Бейда. Праці згаданих вчених привели до розуміння того, що оператор L при умові (3.1) на комплексно-значний потенціал може не мати спектральної міри і навіть узагальненої спектральної міри в сенсі В.Е. Лянце − див. Теорему 3.3.

Для розв'язання сформульованої задачі автор запропонував параметричний метод, що ґрунтується на комутаційних властивостях пар Лакса загального рівняння Кортевеґа − де Фріза (КдФ).

Запишемо стаціонарний аналог загального рівняння КдФ у термінах пар Лакса:

$$[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1] = 0, \tag{3.8}$$

де $l = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$ − формальний одновимірний оператор Шредінґера з комплекснозначним потенціалом $V(x)$, а ієрархію Лакса $\{M_i\}$ задаємо у вигляді

$$M_{2i+1} = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i}\left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k\right), \tag{3.9}$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_n$ − комплексні параметри; a_k − многочлени від комплекснозначної функції $V(x)$ і її похідних, $a_k = a_k(V, V', V'', \ldots)$, які мають властивість

$$\left| a_k(V, V', V'', \ldots) \right| \to 0$$

$$\text{при} \quad \left| V^{(j)}(x) \right| \underset{|x|\to\infty}{\to} 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.9a}$$

***Теорема* 3.4 (Основна теорема, І.-П.П. Сироїд [239, 240, 252]).** *Припустимо, що*:

(***i***) *вектор комплексних параметрів* $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння КдФ* (3.8) *такий, що рівняння*:

$$c_0 \lambda^{2n} + c_1 \lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1} \lambda^2 + c_n = 0 \tag{3.10}$$

не має дійсних коренів, тобто для многовиду AL *коренів рівняння* (3.10) *справджується умова*

$$\operatorname{dist}(AL, \mathbb{R}) = d > 0; \tag{3.10a}$$

(***ii***) $V(x)$ – *комплекснозначний розв'язок загального рівняння КдФ* (3.8), *що задовольняє умову* (3.1) *та умови на похідні*

$$\left|V^{(i)}(x)\right| \underset{|x|\to\infty}{\to} 0, \quad i=1,2,\ldots,m, \tag{3.11}$$

де m – *порядок рівняння КдФ* (3.8).

Тоді:

1°) *несамоспряжений оператор Шредінґера* L *з комплекснозначним потенціалом* $V(x)$ (*див. Означення* 3.1) *не має спектральних особливостей (сингулярних точок в сенсі М.А. Наймарка* [174]) *на неперервному спектрі і є спектральним у сенсі Данфорда – Бейда оператором;*

2°) *якщо* z – *недійсний корінь рівняння* (3.10), *то* z^2 *належить до дискретного спектра оператора* L.

Зауваження. Випадок $c_n=0$ також можна дослідити, запровадивши корекції в доведення Теореми 3.4. Проте обмежимося лише прикладами для випадку $c_n=0$ у кінці цього Розділу.

Висновок 1 з Теореми 3.4. *Припустимо, що виконуються умови Теореми* 3.4. *Тоді несамоспряжений оператор Шредінґера* L *з комплекснозначним потенціалом* $V(x)$ *має спектральну міру* (*обмежену за нормою*), *що задовольняє Означення* 3.2 (*див. також Означення* 3.4).

Висновок 2 з Теореми 3.4. *Потенціали* $V(x)$, *що задовольняють умови Теореми* 3.4, *є комплекснозначними аналогами* N*-солітонних розв'язків рівняння Кортевеґа де – Фріза.*

Перед доведенням Теореми 3.4 подамо відомі формули теорії одновимірного рівняння Шредінґера. У припущенні (3.1) одновимірне рівняння Шредінґера

$$l(y)=\lambda^2 y \tag{3.12}$$

має (див. Л.Д. Фаддєєв [83, 84]) розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ з асимптотиками:

$$f_1(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+o(1) \qquad \text{при} \qquad x\to\infty,$$

$$f_2(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+o(1) \qquad \text{при} \qquad x\to-\infty. \tag{3.13}$$

Розв'язки (3.13) мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \mathcal{K}_1(x,y)e^{i\lambda y}\,dy, \tag{3.14}$$

де ядро $\mathcal{K}_1(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A \le x \le y < \infty$ і

$$\int_A^\infty \int_x^\infty |\mathcal{K}_1(x,y)|\,dy\,dx < \infty,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^x \mathcal{K}_2(x,y)e^{-i\lambda y}\,dy, \tag{3.15}$$

а ядро $\mathcal{K}_2(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \le x \le B$. Функція $|\mathcal{K}_2(x,y)|$ сумовна в області $-\infty < y \le$ $\le x \le B$.

Для дійсних $\lambda \ne 0$ пари

$$f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння Шредінґера. Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\{f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda)\} = 2i\lambda, \quad \{f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)\} = -2i\lambda. \tag{3.16}$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами:

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)f_1(x,\lambda) + a(\lambda)f_1(x,-\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0, \tag{3.17}$$

$$f_1(x,\lambda) = -b(-\lambda)f_2(x,\lambda) + a(\lambda)f_2(x,-\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0, \tag{3.18}$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \{f_1(x,\lambda), f_2(x,\lambda)\},$$

$$w_1(\lambda) = \{f_2(x,\lambda), f_1(x,-\lambda)\} \tag{3.19}$$

таким чином:

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w_1(\lambda). \tag{3.20}$$

За аналогією зі самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію $w_1(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом відбиття.

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані наступною формулою:

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0. \tag{3.21}$$

Означення 3.5. Припустимо, що виконується умова (3.1) і задано рівняння

$$a(\lambda) = 0. \tag{3.22}$$

Якщо $\lambda \neq 0$ − дійсний корінь рівняння (3.22), то число λ^2 називається *спектральною особливістю* оператора L.

Якщо λ_k − недійсний ($\operatorname{Im}\lambda_k > 0$) корінь рівняння (3.22), то число $s_k = \lambda_k^2$ належить до *дискретного спектра* оператора L.

Зауважимо при цьому, що за умови (3.1) додатна піввісь належить *неперервному спектру* оператора L, а число 0 не належить до множини власних значень дискретного спектра оператора L.

Якщо оператор L має спектральні особливості (сингулярні точки) на неперервному спектрі, то спектральна міра в сенсі Данфорда не існує.

Наведемо формулу для спектральної міри оператора L ***в припущенні, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі***. Ми йдемо за працями М.А. Наймарка і Б.Я. Левіна. Припустимо, що Δ − борелівська множина комплексної площини. Задамо операторну функцію $\Delta \to P(\Delta)$:

$$P(\Delta)y(x) = \sum_{j,n=1,2} \int_{\Delta\bigcap(0,\infty)} \frac{V_{jn}(s)\sqrt{s}}{w(\sqrt{s})w(-\sqrt{s})} \omega_j(y,s)\omega_n(x,s)\,ds +$$
$$+ \sum_{k=1}^{r} \left\{ \left(\frac{d}{ds}\right)^{\nu_k - 1} M_k(s) f_2(y,\sqrt{s}) f_1(x,\sqrt{s}) \right\}_{s=s_k}. \tag{3.23}$$

Пояснимо значення виразів, що входять до формули (3.23). Позначимо через $\omega_j(x,s)$ ті розв'язки рівняння Шредінґера (3.12), які задовольняють початкові дані

$$\omega_1(0,s) = 1, D_x\omega_1(0,s) = 0, \qquad \omega_2(0,s) = 0,\ D_x\omega_2(0,s) = 1.$$

Крім того, позначаємо $s = \lambda^2$ і $s_k = \lambda_k^2$; D_x − похідна за x.

Означення 3.6. Припустимо, що виконується умова (3.1) і оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі. L-перетворенням Фур'є функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ називається пара функцій

$$\omega_j(f,s), \qquad j = 1,2,$$

заданих на неперервному спектрі оператора L такими перетвореннями:

$$\omega_j(f,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\omega_j(x,s)\,dx, \qquad j = 1,2, \tag{3.24}$$

де в перетвореннях (3.24) збіжність інтегралів розуміємо в середньому квадратичному, і система векторів

$$f_j^{(i)}(f,\lambda_k),\ j = 0,1,\ldots,m_k - 1,\ k = 1,\ldots,N, \tag{3.25}$$

на дискретному спектрі оператора L. Система векторів (3.25) відповідає власним і приєднаним функціям дискретного спектра оператора L, що відповідають власним значенням $s_k = \lambda_k^2$.

Функції $V_{jn}(s)$ означені на дійсній осі формулами

$$V_{jn}(s) = f_1^{v}(0,\lambda)f_1^{æ}(0,-\lambda) + f_2^{v}(0,\lambda)f_2^{æ}(0,-\lambda), \quad s = \lambda^2,$$

де $v = \left[\dfrac{j+n}{4}\right]$, $æ = \left[\dfrac{j+n-1}{2}\right]$ означають порядок диференціювання за x. Крім того,

$$M_{æ}(s) = \frac{(s - s_{æ})^{v_{æ}}}{w(\sqrt{s})\,(v_{æ} - 1)!}.$$

У формулі (3.23) інтеграл збігається в середньому квадратичному, якщо $w(\sqrt{s}) \neq 0$ на неперервному спектрі оператора L. Припущення $w(\sqrt{s}) \neq 0$ відповідає випадку відсутності спектральних особливостей (сингулярностей) в сенсі М.А. Наймарка на неперервному спектрі оператора L.

Висновок 3 з Теореми 3.4. Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.4. Тоді кожна функція $y \in L_2(-\infty,\infty)$ однозначно визначається (за виконання умови (3.1) своїм L-*перетворенням Фур'є* і має місце рівність Парсеваля

$$y(x) = \sum_{j,n=1,2} \int_0^\infty \frac{V_{jn}(s)\sqrt{s}}{w(\sqrt{s})w(-\sqrt{s})} \omega_j(y,s)\omega_n(x,s)\,ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \left\{ \left(\frac{d}{ds} \right)^{\nu_k - 1} M_k(s) f_2(y,\sqrt{s}) f_1(x,\sqrt{s}) \right\}_{s=s_k} .$$

Цей результат є аналогічним до результату Б.Я. Левіна [5], отриманого ним для випадку півосі.

Ця рівність дозволяє врахувати внесок неперервного і дискретного спектра в задачу розвинення за власними і приєднаними функціями оператора L.

Випадок наявності спектральної особливості на неперервному спектрі оператора ми змушені виключити з розгляду (в цьому випадку функція $w(\lambda)$ перетворюється у нуль на спектральній особливості і інтеграл в (3.23) стає розбіжним).

Покажемо, що з умов Теореми 3.4 випливає, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі.

Означення 3.7. Комплекснозначний потенціал V оператора L за аналогією з самоспряженим випадком назвемо *безвідбивним*, якщо коефіцієнт відбиття $w_1(\lambda) \equiv 0$.

Означення коефіцієнта відбиття $w_1(\lambda)$ − формула (3.19).

***Лема* 3.1.** *Припустимо, що* V *− безвідбивний комплекснозначний потенціал оператора* L*. Тоді:*

1°) *оператор* L *не має спектральних особливостей на неперервному спектрі і має місце рівність*

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 \tag{3.26}$$

на дійсній осі;

2°) *множина власних значень оператора* L *скінченна, а оператор* L *є спектральним у сенсі Данфорда − Бейда. Спектральну міру* $\Delta \to P(\Delta)$ *оператора* L *можна реалізувати формулами* (3.23)−(3.25), *заданими за допомогою* L*-перетворення Фур'є згідно з Означенням* 3.4.

3°) *функція* $a(\lambda)$ *має вигляд*

$$a(\lambda) = \prod_{l=1}^{N} \frac{(\lambda + \lambda_l)^{m_l}}{(\lambda - \lambda_l)^{m_l}}. \tag{3.27}$$

Д о в е д е н н я ***Леми* 3.1.** З того, що коефіцієнт відбиття $w_1(\lambda)$ тотожно дорівнює нулеві, випливає, що розв'язки $f_2(x,\lambda)$ і $f_1(x,-\lambda)$ лінійно залежні:

$$f_2(x,\lambda) = a(\lambda) f_1(x,-\lambda),$$

і, крім того, (див. (3.21)) має місце формула (3.26)

$$a(\lambda) = 1$$

для всіх дійсних λ в нашому безвідбивному випадку. Тобто $a(\lambda) \neq 0$ для всіх дійсних λ. Ми довели, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі. Тому оператор L не має точок скупчення власних значень дискретного спектра на неперервному спектрі.

З безвідбивної властивості потенціалу випливає, що функція $a(\lambda)$ неперервна у півплощині $\mathrm{Im}\,\lambda \geq 0$ і має в цій півплощині асимптотику

$$a(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{при} \qquad |\lambda| \to \infty.$$

Ми довели, що оператор L має скінченну кількість власних значень. Крім того, з (3.26) випливає формула (3.27).

З формули (3.26) випливає також, що

$$w(\lambda) w(-\lambda) = 4\lambda^2,$$

тобто функція $w(\lambda)w(-\lambda)$ обертається в нуль при $\lambda = 0$. Проте з цієї обставини не випливає розбіжність інтеграла в рівності Парсеваля для оператора L.

Спектральність в сенсі Данфорда − Бейда оператора L (твердження ***2°***) випливає з праці Б.Я. Левіна [5] або зі статті Г.М. Кесельмана [175] за умови відсутності спектральних особливостей на неперервному спектрі.

Основні твердження Леми 3.1 опубліковані в статті І.-.П.П. Сироїд [240].

***Лема* 3.2 (І.-П.П. Сироїд [240, 252]).** *Припустимо, що V − безвідбивний комплекснозначний потенціал оператора L. Тоді існує число $\varepsilon > 0$ таке, що функція $V(x)$ задовольняє умову*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon|x|} |V(x)| dx < \infty. \tag{3.28}$$

Д о в е д е н н я *Теореми* 3.4. Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.4. Основний тягар доведення Теореми 3.4 падає на доведення тієї обставини, що з умов цієї теореми випливає відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора L. Проте відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі випливає з Леми 3.1.

Щоб скористатися Лемою 3.1, доведемо, що потенціал $V(x)$ оператора L є безвідбивним потенціалом. Припустимо, що

$$M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \cdots + c_n M_1. \tag{3.29}$$

З огляду на рівняння КдФ (3.8) оператори L і M комутують. Тому оператор M переводить розв'язки одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) знову в розв'язки цього рівняння. Мають місце асимптотичні формули:

$$Mf_1(x,\lambda) = -\lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)e^{i\lambda x} + o(1),$$
$$x \to \infty, \tag{3.30}$$

$$Mf_1(x,-\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)e^{-i\lambda x} + o(1),$$
$$x \to \infty. \tag{3.31}$$

Достатньо довести (3.30). Розв'язок $f_1(x,\lambda)$ одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) має зображення у вигляді тотожності

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} V(t) f_1(t,\lambda)\, dt. \tag{3.32}$$

Діємо оператором M на $f_1(x,\lambda)$ в зображенні (3.32) і, враховуючи асимптотику (3.11), отримуємо (3.30).

Порівнюючи асимптотики (3.30) і (3.14) при $x \to \infty$, зауважуємо, що асимптотики розв'язків $M f_1(x,\lambda)$ і $f_1(x,\lambda)$ відрізняються на множник, що залежить лише від λ. Ця обставина відповідає умові комутування операторів L і M.

Для розв'язку $f_2(x,\lambda)$ одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) має місце тотожність

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} - \int_{-\infty}^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} V(t) f_2(t,\lambda)\, dt. \tag{3.33}$$

Використовуючи тотожність (3.33) і асимтотику (3.15), при $x \to -\infty$, отримуємо, що асимптотики розв'язків $Mf_2(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ відрізняються на множник, що залежить лише від λ.

Асимптотика розв'язку $f_2(x,\lambda)$ при $x \to \infty$ має вигляд

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)e^{i\lambda x} + a(\lambda)e^{-i\lambda x} + o(1). \tag{3.34}$$

Асимптотика розв'язку $Mf_2(x,\lambda)$ при $x \to \infty$ має вигляд

$$Mf_2(x,\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n) \times$$

$$\times(-b(\lambda)e^{i\lambda x} + a(\lambda)e^{-i\lambda x}) + o(1). \qquad (3.35)$$

З вимоги, щоб асимптотики (3.34) і (3.35) збігалися з точністю до множника, що залежить лише від λ, випливає рівність

$$\lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)b(\lambda) = 0.$$

За умовою Теореми 3.4

$$c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n \neq 0$$

на дійсній осі. Тому

$$\lambda b(\lambda) = 0, \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0. \qquad (3.36)$$

Враховуючи (3.20), отримуємо, що $w_1(\lambda) \equiv 0$. Твердження ***1°*** доведено.

Доведемо твердження ***2°***. З цією метою поряд з фундаментальною системою $f_1(x,\lambda)$, $f_1(x,-\lambda)$ задамо пару розв'язків

$$Mf_1(x,\lambda), \qquad Mf_1(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0.$$

Вронскіан цієї пари розв'язків дорівнює

$$\{Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda)\} =$$

$$= 2i\lambda^2(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)^2 \qquad (3.37)$$

і обчислюється за допомогою асимптотик (3.30) і (3.31).

З умов Теореми 3.4 випливає, що

$$\{Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda)\} \neq 0 \text{ при } \lambda \neq 0.$$

Позначимо коефіцієнти переходу між фундаментальними системами

$$Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

через $a^M(\lambda)$ і $b^M(\lambda)$:

$$f_2(x,\lambda) = b^M(\lambda)Mf_1(x,\lambda) + a^M(\lambda)Mf_1(x,-\lambda),$$

$$Mf_1(x,\lambda) = -\,b^M(-\lambda)f_2(x,\lambda) + a^M(\lambda)f_2(x,-\lambda).$$

При цьому

$$a^M(\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)a(\lambda)$$

і

$$a^M(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}\{Mf_1(x,\lambda), f_2(x,-\lambda)\}. \tag{3.38}$$

Якщо z – недійсний корінь рівняння $a^M(\lambda) = 0$, то z^2 належить до дискретного спектра оператора L.

Припустимо, що z – недійсний корінь рівняння (3.10). Тоді з формули (3.38) випливає, що z є коренем рівняння $a^M(\lambda) = 0$, а z^2 належить до дискретного спектра оператора L. Твердження ***2***° Теореми 3.4 доведено. Теорему 3.4 доведено. ◊

Зауваження до Теореми 3.4. З доведення Теореми 3.4 випливає, що у випадку нового припущення $c_n = 0$ аналог цієї теореми також можна сформулювати, запровадивши деякі корекції у формули. Можна припустити, що $c_{n-1} \neq 0$ і провести аналогічне доведення.

***Приклад* 3.1.** Рівняння

$$[\,l,\ M_3 + cM_1] = 0,\ c \neq 0, \tag{3.39}$$

є частковим випадком рівняння (3.8). Припустимо, що $a_1 = \frac{3}{4}V$ і $V(x)$, $V'(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. У формулі (3.39)

$$M_3 = -iD^3 + i\frac{3}{2}VD + i\frac{3}{4}VD, \qquad M_1 = iD,$$

де $D = \dfrac{d}{dx}$, $i^2 = -1$. Нагадаємо, що $l = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$, і обчислимо комутатор

$$[\,l,\ M_3 + cM_1] = i\left(\frac{1}{4}V''' - \frac{3}{2}VV' - cV'\right). \tag{3.40}$$

З формул (3.39) і (3.40) отримуємо стаціонарне рівняння Кортевеґа – де Фріза з параметром:

$$V''' - 6VV' - 4cV' = 0. \tag{3.39a}$$

При $c = 4h^2$, $\mathrm{Re}\, h \neq 0$ функція

$$V(x) = -\frac{8h^2}{\mathrm{ch}^2(2hx + i)} \tag{3.41}$$

є спадним на $\pm\infty$ розв'язком рівняння (3.39а).

Оператор Шредінґера L, що породжується диференціальним виразом

$$l(y) = -\frac{d^2}{dx^2} y - \frac{8h^2}{\mathrm{ch}^2 (2hx + i)} y$$

з потенціалом $V(x)$ і областю визначення $D(L)$, не має спектральних особливостей на неперервному спектрі і є спектральним у сенсі Данфорда – Бейда оператором.

Згідно з Теоремою 3.4 необхідно розглянути розв'язки рівняння

$$\lambda^2 + c = 0 \qquad \text{або} \qquad \lambda^2 + 4h^2 = 0. \tag{3.42}$$

При $\mathrm{Re}\, h \neq 0$ корені рівняння (3.42) недійсні. Крім того, отримуємо, що існує функція f з $L_2(\mathbb{R})$ така, що

$$Lf = -4h^2 f.$$

Власна функція f, що відповідає власному значенню $-4h^2$, має вигляд

$$f(x) = -\frac{8h^2}{\mathrm{ch}\,(2hx + i)}, \qquad \mathrm{Re}\, h \neq 0.$$

Умова $\mathrm{Re}\, h \neq 0$ істотна. Якщо $h = iy$, де y – дійсне число, то потенціал $V(x)$ (див. (3.41)) стає періодичним і необмеженим.

3.3. Комплекснозначний солітонний многовид розв'язків стаціонарного загального рівняння Кортевеґа – де Фріза. Поняття Шредінґер-аналізу над солітонним многовидом

Нагадаємо, що стаціонарний аналог загального рівняння Кортевеґа – де Фріза у термінах пар Лакса має вигляд (3.8):

$$[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1] = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Означення 3.8. S-многовидом (або стаціонарним солітонним многовидом) називається многовид розв'язків загального рівняння КдФ (3.8), що належить до простору

$$X=\left\{f(x):\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left|f^{(n)}(x)\right|dx<\infty,\ n=0,1,...,m\right\},\qquad(3.43)$$

де m – порядок рівняння (3.8).

Зауваження щодо коректності означення S-многовиду. Теорема 3.4 і приклад з підрозділу 3.2 показують, що означення S-многовиду (стаціонарного солітонного многовиду КдФ) стає коректним, якщо вектор комплексних параметрів $(c_0,c_1,...,c_n)$, $c_n\neq 0$, з рівняння КдФ (3.8) такий, що рівняння (3.10) не має дійсних коренів, тобто виконується умова (3.10а).

Означення 3.9. Означимо *простір S^l формальних операторів Шредінґера l над S-многовидом:*

$$S^l=\left\{l:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R});\ l=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x),\ V(x)\in S\right\}.\qquad(3.44)$$

Означення 3.10 (простору *S^L операторів Шредінґера L над S-многовидом*). До простору S^L належать оператори Шредінґера L, що задовольняють умови Означення 3.1.

Основна задача Шредінґер-аналізу над S-многовидом полягає в з'ясуванні умов, за яких простір S^L є простором спектральних за Данфордом – Бейдом (див. Означення 3.4) операторів Шредінґера в просторі $L_2(\mathbb{R})$ і відповідні спектральні міри $\Delta\to P(\Delta)$ для кожного оператора L обмежені.

З доведення Теореми 3.4 випливає більш загальна теорема.

Теорема 3.5. *Припустимо, що вектор комплексних параметрів $(c_0,c_1,...,c_n)$, $c_n\neq 0$, з рівняння КдФ* (3.8) *змінюється таким чином, що для кожного вектора $(c_0,c_1,...,c_n)$ існує число $a>0$ таке, що*

$$\operatorname{dist}(AL,\mathbb{R})=a>0\qquad(3.45)$$

для многовиду AL коренів рівняння

$$c_0\lambda^{2n}+c_1\lambda^{2(n-1)}+\ldots+c_{n-1}\lambda^2+c_n=0.\qquad(3.46)$$

Тоді відповідний простір S^L операторів Шредінґера L над S-многовидом ***є простором спектральних за Данфордом – Бейдом операторів Шредінґера*** *і для кожного $L\in S^L$ відповідна спектральна міра $P(\Delta)$ одностайно обмежена за нормою.*

Теорема 3.6. *Припустимо, що для вектора комплексних параметрів* $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння* (3.8) *існує число* $a > 0$ *таке, що виконується умова* (3.45).

Тоді з того, що відповідний вектору $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *розв'язок* $V(x)$ *рівняння* (3.8) *належить до простору* X (*див.* (3.43)) *випливає, що* $V(x)$ *належить до простору*

$$G_\varepsilon = \left\{ g(x) : \exists \varepsilon > 0 \quad \text{і} \quad \int_R e^{\varepsilon x} |g(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.6. Тоді відповідний вектору $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, розв'язок $V(x)$ рівняння (3.8) є безвідбивним потенціалом для одновимірного оператора Шредінґера $L \in S^L$. Твердження Теореми 3.6 випливає з безвідбивної властивості потенціалу $V(x)$ згідно з Лемою 3.2. ◊

3.4. Приклади, що стосуються масштабування розв'язуваних потенціалів

Припустимо, що оператор L такий, як в означенні 3.1.

Означення 3.11. Потенціал $V(x)$ оператора L назвемо *розв'язуваним потенціалом*, якщо спектральна задача для L розв'язується у явній формі і при цьому оператор L є спектральним за Данфордом − Бейдом.

Теорема 3.7. *Припустимо, що* $V(x)$ − *розв'язуваний потенціал, а* v − *число.*

Тоді потенціал $\tilde{V}(x)$, *отриманий перетворенням*

$$\tilde{V}(x) = v^2 V(vx),$$

також є розв'язуваним.

Теорема 3.7 має багато застосувань. Запропонуємо приклади в наступних теоремах.

Теорема 3.8. *Припустимо, що* $v \neq ib$, *де* $i^2 = -1$. *Тоді потенціал*

$$\tilde{V}(x) = -12v^2 \frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2vx - 8t) + \mathrm{ch}(4vx - 64t)}{(3\,\mathrm{ch}(vx - 28t) + \mathrm{ch}(3vx - 36t))^2} \qquad (3.47)$$

є розв'язуваним для кожного фіксованого $t \geq 0$.

Д о в е д е н н я. Приклад стосується випадку $c_n = 0$ в загальному рівнянні КдФ (3.8). Конкретніше, приклад стосується **рівняння Кортевеґа – де Фріза**

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 6VV' - V'''. \tag{3.48}$$

Задамо початкову функцію

$$V_0(x) = -\frac{6}{\mathrm{ch}^2(x)}. \tag{3.49}$$

У просторі дійсних функцій задача (3.48), (3.49) розв'язана в [1], де також доведено, що потенціал

$$V(x) = -12\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2x - 8t) + \mathrm{ch}(4x - 64t)}{(3\,\mathrm{ch}(x - 28t) + \mathrm{ch}(3x - 36t))^2} \tag{3.50}$$

є 2-солітонним розв'язком цієї задачі. Твердження Теореми 3.8 випливає із застосування Теореми 3.7 до потенціалу (3.50). ◊

Приклад 3.2. *Припустимо, що* $v = d + iu$, $d \neq 0$. *Тоді оператор Шредінґера* $L(t)$, *що породжується диференціальним виразом*

$$l(y) = -y'' - 12v^2\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2vx - 8t) + \mathrm{ch}(4vx - 64t)}{(3\,\mathrm{ch}(vx - 28t) + \mathrm{ch}(3vx - 36t))^2}y$$

для кожного фіксованого t *є спектральним за Данфордом – Бейдом оператором*

$$L(t) : L_2(-\infty, \infty) \to L_2(-\infty, \infty).$$

Умова $d \neq 0$ в прикладі 3.2 є істотною. Це випливає з наступного прикладу.

Приклад 3.3. *Припустимо, що оператор* $L(0)$ *є замиканням оператора* L_0, *що породжується в просторі* $L_2(-\infty, \infty)$ *диференціальним виразом*

$$h(0)f = -f'' - 12v^2\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2vx) + \mathrm{ch}(4vx)}{(3\,\mathrm{ch}(vx) + \mathrm{ch}(3vx))^2}f$$

і областю визначення $D(L_0) = C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Оператор $h(0)$ *при* $v = ip$, $i^2 = -1$, *має осцилюючий потенціал і при цьому амплітуда осциляцій стає необмеженою в точках, де функції* $\cos(px)$ *і* $\cos(3px)$ *одночасно перетворюються в нуль.*

РОЗДІЛ 4

КОМПЛЕКСНИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ЗАГАЛЬНОЇ СИСТЕМИ КОРТЕВЕҐА – ДЕ ФРІЗА

4.1. Вступ і необхідні означення

Запишемо комплексне рівняння Кортевеґа – де Фріза (КдФ)

$$V_t = 6VV_x - V_{xxx}. \tag{4.1}$$

Систему Кортевеґа – де Фріза

$$\begin{aligned} u_t &= 6uu_x - 6zz_x - u_{xxx}, \\ z_t &= 6zu_x + 6z_x u - z_{xxx} \end{aligned} \tag{4.2}$$

запропонував автор [254].

Система (4.2) еквівалентна комплексному рівнянню (4.1) КдФ. Щоб переконатися в цьому, досить підставити в (4.1) наступне зображення комплексної функції $V(x,t)$:

$$V(x,t) = u(x,t) + iz(x,t).$$

Параметризуємо рівняння (4.1) таким чином:

$$V_t = c_0(6VV_x - V_{xxx}) + 4c_1V_x, \tag{4.3}$$

де c_0 і c_1 – параметри, які можуть приймати комплексні або дійсні значення. Зрозуміло, що рівняння (4.3) є загальнішим, ніж рівняння (4.1). При $c_0 = 1$ і $c_1 = 0$ рівняння (4.3) перетворюється в рівняння (4.1).

Наступний крок полягає в тому, щоб використати пари Лакса [7]. Ідучи за алгоритмом, запропонованим у Розділі 2, і використовуючи комплексифікацію пар Лакса, отримуємо загальне комплексифіковане рівняння КдФ:

$$V_t = i\left[l,\ c_0M_{2n+1} + c_1M_{2n-1} + \ldots + c_nM_1\right], \tag{4.4}$$

де $V_t = \dfrac{\partial l}{\partial t}$; $l = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ – формальний одновимірний оператор Шредінґера на всій осі, що параметрично залежить від t; $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ – вектор комплексних параметрів. Множину операторів $\{M_i\}$ називаємо ієрархією Лакса для моделі КдФ і задамо ці оператори наступним чином:

$$M_{2i+1} = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k \right),$$

де $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$; $a_k = a_k(V, V_x, V_{xx}, \ldots; t)$ – многочлени від функції $V(x,t)$ і її похідних за змінною x.

Позначимо

$$M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1. \tag{4.5}$$

Комплексне параметричне узагальнення МОЗР полягає в розв'язанні задачі Коші для загального параметричного рівняння КдФ (4.4) з початковою умовою

$$V(x,0) = V_0(x) \tag{4.6}$$

у просторі комплекснозначних функцій, тобто реалізації описаного у вступі алгоритму.

4.2. Розв'язання несамоспряженої прямої задачі розсіяння для оператора L

Припустимо, що $V_0(x)$ – комплекснозначна функція, визначена на всій осі згідно з (4.6), і ця функція задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + x^2) \, | V(x) | \, dx < \infty. \tag{4.7}$$

Означення 4.1. Означимо оператор L. Несамоспряжений оператор Шредінґера L породжується в комплексному гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, диференціальним виразом

$$l(y)(x) = -y''(x) + V_0(x) y(x) \tag{4.8}$$

та областю визначення $D(L)$, до якої належать всі $y \in \in L_2(\mathbb{R})$, для яких похідна y' існує, абсолютно неперервна в кожному скінченному проміжку і $l(y) \in L_2(\mathbb{R})$.

Рівняння Шредінґера

$$l(y) = \lambda^2 y \tag{4.9}$$

має (див. [83, 84]) розв'язки $e_+(x,\lambda)$ і $e_-(x,\lambda)$ з асимптотиками

$$e_+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1), \qquad x \to \infty,$$

$$e_-(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + o(1), \qquad x \to -\infty, \tag{4.10}$$

де $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$.

Зауважимо, що для доведення існування розв'язків, замість умови (4.7) можна використати слабшу умову Л.Д. Фаддєєва (3.3).

Крім того, в Розділі 4 ми змінюємо позначення на такі, що зручніші для нас з огляду на КПМОЗР.

Розв'язки $e_+(x,\lambda)$ і $e_-(x,\lambda)$ аналітичні за λ в півплощині $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, неперервні аж до межі $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

Розв'язки (4.10) мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна (4.11) і (4.12):

$$e_+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \mathcal{K}_+(x,y) e^{i\lambda y} dy, \tag{4.11}$$

де ядро $\mathcal{K}_+(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A \leq x \leq y < \infty$ і

$$\int_A^{\infty}\int_x^{\infty} |\mathcal{K}_+(x,y)|\, dy\, dx < \infty,$$

$$e_-(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} \mathcal{K}_-(x,y) e^{-i\lambda y} dy, \tag{4.12}$$

де ядро $\mathcal{K}_-(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \leq x \leq B$. Функція $|\mathcal{K}_-(x,y)|$ сумовна в області $-\infty < y \leq x \leq B$.

Для дійсних $\lambda \neq 0$ пари

$$e_+(x,\lambda),\ e_+(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad e_-(x,\lambda),\ e_-(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння (4.9). Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\{e_+(x,\lambda),\ e_+(x,-\lambda)\} = 2i\lambda,$$

$$\{e_-(x,\lambda),\ e_-(x,-\lambda)\} = -2i\lambda. \tag{4.13}$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами:

$$e_-(x,\lambda) = -b(-\lambda)e_+(x,\lambda) + a(\lambda)e_+(x,-\lambda),\ \ \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0, \tag{4.14}$$

$$e_+(x,\lambda) = b(\lambda)e_-(x,\lambda) + a(\lambda)e_-(x,-\lambda),\ \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0, \tag{4.15}$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \{e_+(x,\lambda), e_-(x,\lambda)\},$$

$$w_1(\lambda) = \{e_+(x,\lambda), e_-(x,-\lambda)\} \tag{4.16}$$

таким чином:

$$a(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w_1(\lambda). \tag{4.17}$$

За аналогією зі самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ ***назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію*** $w_1(\lambda)$ ***назвемо коефіцієнтом відбиття.***

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані формулою

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0. \tag{4.18}$$

Означення 4.2. Припустимо, що виконується умова (3.1) і задано рівняння

$$a(\lambda) = 0. \tag{4.19}$$

Якщо $\lambda \neq 0$ − дійсний корінь рівняння (4.19), то число λ^2 називається *спектральною особливістю* оператора L.

Якщо λ_k − недійсний ($\operatorname{Im}\lambda_k > 0$) корінь рівняння (4.19), то число $s_k = \lambda_k^2$ належить до *дискретного спектра* власних значень оператора L.

Зауважимо при цьому, що за умови (4.7) додатна піввісь належить *неперервному спектру* оператора L, а нуль не належить до власних значень оператора L.

Далі припускатимемо (з метою знаходження комплексних аналогів солітонних і N-солітонних розв'язків загального рівняння КдФ), що ***оператор*** L ***не має спектральних особливостей*** (сингулярних точок за М.А. Наймарком) на неперервному спектрі, тобто

$$w(\lambda) \neq 0 \tag{4.20}$$

для всіх дійсних λ. Це означає, що ***оператор L припускаємо спектральним за Данфордом − Бейдом, а спектральна міра оператора L існує і є одностайно обмежена за нормою***.

Ідучи за статею Б.Я. Левіна [5], для оператора L можна довести ще сильніший результат.

***Лема* (Про спектральність).** *Припустимо, що для потенціалу оператора L виконується умова* (4.7).

Тоді:

1°) *відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора L є необхідною і достатньою умовою спектральності в сенсі Данфорда − Бейда оператора L;*

2°) *за умови відсутності спектральних особливостей в оператора L для всякої функції $y \in L_2(-\infty,\infty)$ має місце рівність Парсеваля* (*див. Розділ* 3), *що гарантує розвинення функції $y \in L_2(-\infty,\infty)$ за власними і приєднаними функціями оператора L;*

3°) *за відсутності спектральних особливостей в оператора L спектральна міра, що комутує з одновимірним оператором Шредінґера L на всій осі існує і зображується формулою* (3.23).

Припущення про відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора L зумовлене тією обставиною, що комплекснозначним аналогам солітонних і N-солітонних розв'язків рівняння Кортевеґа − де Фріза відповідають безвідбивні потенціали. Оператор Шредінґера з безвідбивним потенціалом не має спектральних особливостей на неперервному спектрі (доведення − див. Розділ 3). Ця обставина пов'язана з властивостями стійкості солітонних многовидів моделі Кортевеґа − де Фріза і добре погоджується з твердженням Б.Б. Кадомцева і В.І. Петвіашвілі [6] стосовно стійкості моделі Кортевеґа − де Фріза.

При виконанні умови (4.20) функція $w(\lambda)$ має скінченну множину нулів у півплощині $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Позначимо їх через $\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha$ і назвемо сингулярними числами оператора L. Кратність кореня λ_p рівняння $w(\lambda)=0$ називаємо кратністю сингулярного числа λ_p і позначимо її через m_p.

Припустимо, що λ_p − сингулярне число оператора L. Оскільки вронскіан функцій $e_+(x,\lambda_p)$ і $e_-(x,\lambda_p)$ дорівнює нулеві, ці функції лінійно залежні. Існують такі ланцюжки чисел

Зі статті [7] випливає, що рівняння (2.7) можна зобразити у вигляді

$$V_t = [-D^2 + V,\, c_0 M_3 + c_1 M_1], \qquad (2.10)$$

де M_1, M_3 – оператори з ієрархії Лакса – див. [7].

Для знаходження солітонних і N-солітонних розв'язків рівняння (2.10) досліджується простір початкових даних за допомогою стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза

$$[-D^2 + V,\, c_0 M_3 + c_1 M_1] = 0,$$

яке можна звести до вигляду

$$V''' + 6VV' - 4zV' = 0. \qquad (2.11)$$

Відповідні обчислення зроблені в статті І.-П.П. Сироїд [252].

Сформулюємо теорему про зв'язок теорії М.О. Лаврентьєва [ГД 1] зі стаціонарними солітонами (точніше, їх модулями) рівняння Кортевеґа – де Фріза.

***Теорема* 2.3.** *Припустимо, що справджуються умови Теореми* 2.1, *зокрема, згадані вище умови М. О. Лаврентьєва.*

Тоді для значень параметрів $h = \sqrt[3]{1.5}$ *і* $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ *рівняння* (2.6) *збігається з рівнянням*

$$V'' = -\,3V^2 + 4zV + d, \qquad (2.12)$$

яке отримано зі стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза (2.11) *шляхом взяття первісної.*

Зауваження 2.1. *Зі зміною масштабування рівняння Кортевеґа – де Фріза параметри h і z в Теоремі* 2.3 *слід також відповідно масштабувати. Критерієм при цьому має бути досягнення рівноваги між нелінійністю і дисперсією* (*між нелінійним членом і дисперсними лінійними членами рівняння Кортевеґа – де Фріза з урахуванням величини відповідних коефіцієнтів*).

Доведення ***Теореми 2.3.*** Припустимо, що виконуються умови Теореми 2.3. Рівняння (2.6) отримується з умови (2.1) сталого тиску на поверхні хвилі, яка формулюється через комплексний потенціал рухомої рідини. При цьому виконуються умови М.О. Лаврентьєва і додаткові умови, наведені вище. Пояснимо, що рівняння (2.6) є джерелом розв'язків, наближених до точного розв'язку задачі М.О. Лаврентьєва. По-

кажемо, що рівняння (2.6) можна отримати з стаціонарного рівняння КдФ з параметром (2.11) при вказаних у формулюванні теореми значеннях параметрів h і z. Для цього застосуємо до рівняння (2.11) операцію інтегрування і дістаємо рівняння (2.12). Припустимо, що $h = \sqrt[3]{1.5}$. Тоді при $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ рівняння (2.6) є частковим випадком рівняння (2.12). Зрозуміло, що всякий тричі диференційовний розв'язок рівняння (2.12) є розв'язком стаціонарного рівняння КдФ (2.11). ◊

Висновок з Теореми 2.3. *Нехай* $h = \sqrt[3]{1.5}$. *Тоді при* $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$ *побудовану М.О. Лаврентьєвим ізольовану хвилю* $y(x,\infty)$ *можна наблизити стаціонарним розв'язком рівняння з параметром* (2.12), *використавши оцінку*

$$|\, y(x,\omega) - y(x,\infty)\,| < \frac{K_5 h^2}{\log \frac{1}{h}} \tag{2.13}$$

з Теореми Лаврентьєва. При цьому замість $y(x,\infty)$ *слід підставити розв'язок (стаціонарного) рівняння* (2.12), *а потім зробити граничний перехід при* $\omega \to \infty$. *Тобто стаціонарний солітонний розв'язок рівняння КдФ при конкретних значеннях параметрів* ($h = \sqrt[3]{1.5}$, $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$), *вказаних у доведенні Теореми* 2.3, *є наближенням розв'язку* $y(x,\infty)$, *отриманого методом М.О. Лаврентьєва.*

Доведення ***висновку з Теореми 2.3.*** Зафіксуємо значення параметрів відповідно до умов Теореми 2.3: $h = \sqrt[3]{1.5}$ і $z = 1.5\sqrt[3]{1.5}$. Тоді за Теоремою 2.3 рівняння (2.6) і (2.12) збігаються, а за Теоремою 2.2 М.О. Лаврентьєва має місце оцінка (2.13). Твердження висновку випливає при цьому з методу М.О. Лаврентьєва. Розв'язок $y(x,\infty)$ є стаціонарним солітоном КдФ за єдиністю розв'язку з умовою анулювання на $\pm\infty$. ◊

Теорема 2.4. *Припустимо, що виконуються умови Теореми* 2.3. *Тоді*:

1°) *має місце оцінка*

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x)} \right| < 0.014841 \frac{h^2}{\left|\log \frac{1}{h}\right|} \tag{2.14}$$

для відхилення розв'язку $y(x,\infty)$ *від функції* $\dfrac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2\, 2\mu x}$, *яку при* $\psi = 0$ *отримуємо з розв'язку*

$$y(x,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

рівняння (2.11), *якщо* $z = 4\mu^2$, *а* $\mu^2 = \frac{3}{8}\sqrt[3]{1.5}$ *і* $h = \sqrt[3]{1.5}$;

2°) *при* $x \to \infty$ *має місце співвідношення*

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)} \right| \to 0$$

для скінченного фіксованого числа ψ;

3°) $$\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313.$$

(Зауважимо, що оцінки в Теоремі 2.4 відповідають значенням параметрів, для яких досягається рівновага нелінійності і дисперсії. При зміні масштабування рівняння Кортевеґа – де Фріза значення параметрів слід поміняти так, щоб знову досягнути рівноваги нелінійності і дисперсії в рівнянні КдФ – див. Зауваження 2.1.)

Д о в е д е н н я. Твердження ***1°*** теореми випливає з оцінки (2.13), якщо обчислити сталу K_5. Для цього спочатку знайдемо максимальне значення розв'язку $y(x,\infty)$, яке досягається при $x = 0$. З методу М.О. Лаврентьєва випливає, що $y(0,\infty) = h + 2h^2$ – див. [ГД 1]. При $h = \sqrt[3]{1.5}$ обчислюємо висоту хвилі Лаврентьєва

$$y(0,\infty) = 3.7654556367.$$

При цьому має місце $\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313$. Ми довели твердження ***3°*** теореми, якщо врахувати, що при $x = 0$ і $\psi = 0$ маємо

$$y(0,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)} = 8\mu^2,$$

а

$$8\mu^2 = 2z = 3\sqrt[3]{1.5}.$$

Але при $h = \sqrt[3]{1.5}$ маємо оцінку

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x)} \right| < 22.3242886\, K_5, \tag{2.15}$$

яка випливає з висновку з Теореми 2.3, а саме, з оцінки (2.13), якщо скористатися виразом для стаціонарного солітона КдФ. Стаціонарний солітон КдФ

$$y(x,\infty) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

отримується явно при розв'язуванні наведеного вище стаціонарного рівняння Кортевеґа − де Фріза.

З оцінки (2.15) і доведеної вище рівності

$$\left| y(0,\infty) - 3\sqrt[3]{1.5} \right| = 0.331313$$

випливає, що $K_5 \geq 0.014841$. Ми довели твердження ***1°*** теореми.

Твердження ***2°*** випливає з властивостей хвилі М.О. Лаврентьєва $y(x,\infty)$ при $x \to \pm\infty$ при виконанні умов теореми. Теорему 2.4 доведено. ◊

З оцінки (2.14) при виконанні умов Теореми 2.4 отримуємо

$$\left| y(x,\infty) - \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x)} \right| < 0.331313. \tag{2.16}$$

2.4. Випадок загального параметричного стаціонарного рівняння Кортевеґа − де Фріза

Запишемо стаціонарний аналог загального рівняння Кортевеґа − де Фріза (КдФ) у термінах пар Лакса:

$$[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_0] = 0, \tag{2.17}$$

де $l = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$ − формальний оператор Шредінґера з потенціалом $V(x)$, а ієрархію Лакса $\{M_i\}$ задаємо у вигляді

$$M_i = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k \right), \tag{2.18}$$

де $c_0, c_1, ..., c_n$ − параметри, а функції a_k залежать від функції $V(x)$ і її похідних, $a_k = a_k(V, V', V'', \ldots)$.

Припустимо, що функція $q(x)$ має похідні до третього порядку включно і виконується умова

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left|q^{(k)}(x)\right|dx<\infty, \qquad k=0,1,2,3.$$

Означимо оператор L таким чином:

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x) \qquad \text{і} \qquad L: L_2(-\infty,\infty)\to L_2(-\infty,\infty).$$

Областю визначення $D(L)$ оператора L є множина всіх функцій f, що мають похідну f', абсолютно неперервну в кожному скінченному інтервалі дійсної осі, таких, що f і Lf належать до $L_2(-\infty,\infty)$.

Функцію $q(x)$ називають *потенціалом* оператора L.

Означення безвідбивних потенціалів для оператора L − див. [1, 4, 66, 239, 240]. Відновимо це означення в цьому місці. За виконання наших припущень стосовно потенціалу $q(x)$ одновимірне рівняння Шредінґера

$$l(y)=\lambda^2 y$$

має (див. Л.Д. Фаддєєв [83, 84]) розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ з асимптотиками

$$f_1(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+o(1) \qquad \text{при} \qquad x\to\infty,$$

$$f_2(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+o(1) \qquad \text{при} \qquad x\to-\infty.$$

Розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна:

$$f_1(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int_x^{\infty}\mathcal{K}_1(x,y)e^{i\lambda y}\,dy,$$

де ядро $\mathcal{K}_1(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A\le x\le y<\infty$ і

$$\int_A^{\infty}\int_x^{\infty}\left|\mathcal{K}_1(x,y)\right|dy\,dx<\infty,$$

$$f_2(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+\int_{-\infty}^{x}\mathcal{K}_2(x,y)e^{-i\lambda y}\,dy,$$

а ядро $\mathcal{K}_2(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \le x \le B$. Функція $\left|\mathcal{K}_2(x,y)\right|$ сумовна в області $-\infty < y \le$ $\le x \le B$.

Для дійсних $\lambda \ne 0$ пари

$$f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння Шредінґера. Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\{f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda)\} = 2i\lambda,$$

$$\{f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)\} = -2i\lambda.$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)f_1(x,\lambda) + a(\lambda)f_1(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0,$$

$$f_1(x,\lambda) = -b(-\lambda)f_2(x,\lambda) + a(\lambda)f_2(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0,$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \{f_1(x,\lambda), f_2(x,\lambda)\},$$

$$w_1(\lambda) = \{f_2(x,\lambda), f_1(x,-\lambda)\}$$

таким чином:

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w_1(\lambda).$$

За аналогією з самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію $w_1(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом відбиття.

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані формулою

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0.$$

Потенціал $q(x)$ називають безвідбивним, якщо коефіцієнт відбиття анулюється:

$$w_1(\lambda) \equiv 0.$$

***Теорема* 2.5 (див. також І.-П.П. Сироїд [240, 252]).** *Припустимо, що:*

(***i***) *вектор параметрів* $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *у стаціонарному рівнянні КдФ* (2.17) *такий, що рівняння вигляду*

$$c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n = 0 \tag{2.19}$$

не має дійсних коренів, тобто для многовиду AL *коренів рівняння* (2.19) *виконується умова*

$$\operatorname{dist}(AL, \mathbb{R}) = d > 0; \tag{2.20}$$

(***ii***) $V(x)$ – *дійсний розв'язок загального рівняння КдФ* (2.17), *що задовольняє умову*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2) \, |V(x)| dx < \infty$$

та умови на похідні:

$$\left| V^{(i)}(x) \right| \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m - 1, \tag{2.21}$$

де m – *порядок рівняння КдФ* (2.17).

Тоді:

1°) *самоспряжений одновимірний оператор Шредінґера* L *з потенціалом* $V(x)$ *відповідає безвідбивному випадку, тобто* $V(x)$ – *безвідбивний потенціал;*

2°) *якщо* z – *недійсний* (*уявний*) *корінь рівняння* (2.19), *то* z^2 *належить до дискретного спектра оператора* L.

***Теорема* 2.6 (І.-П.П. Сироїд [240]).** *Припустимо, що* $V(x)$ – *безвідбивний потенціал оператора* L. *Тоді*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon |x|} \, |V(x)| \, dx < \infty.$$

Зауваження 2.2. Змінимо масштабування стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза:

$$u_{xxx} + 12uu_x + cu_x = 0. \tag{2.22}$$

Порівняємо рівняння (2.22) з рівнянням (2.6). Рівняння (2.22) має розв'язок

$$Y(x) = \frac{a^2}{4\,\mathrm{ch}^2\,0.5\,(ax + f)}.$$

При $h = \sqrt[3]{0.75} = 0.90856$ отримуємо

$$|\,y(x,\infty) - Y(x)\,| < 19.82128\,C.$$

Параметр C можна обчислити аналогічно до обчислень, зроблених в Теоремі 2.4.

Зауваження 2.3 (щодо нестаціонарного випадку). Досягненням МОЗР є можливість досліджувати динаміку розвитку солітонних і N-солітонних розв'язків (нестаціонарного) рівняння Кортевеґа − де Фріза. З Теореми 2.4 випливає можливість отримати також динаміку відхилення модуля поодинокого солітона (отриманого за допомогою МОЗР) при значеннях $t > 0$ від розв'язку $y(x,\infty)$.

Початковій функції

$$V(x,0) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x + \psi)}$$

відповідає розв'язок задачі Коші

$$V(x,t) = \frac{8\mu^2}{\mathrm{ch}^2(2\mu x - vt + \psi)}$$

для рівняння Кортевеґа − де Фріза.

Зафіксуємо t так, щоб виконувалося співвідношення $2\mu x + \psi = vt$. Тоді функція $V(x,t)$ досягає максимуму: $\max V(x,t) = 8\mu^2$. Але

$$\max V(x,0) = 8\mu^2 \qquad (\text{при } 2\mu x + \psi = 0).$$

Це означає, що має місце оцінка

$$|\,y(x,\infty) - V(x,t)\,| < 0.014841\frac{h^2}{\left|\log\frac{1}{h}\right|}$$

принаймні для $2\mu x + \psi = vt$ і $h = \sqrt[3]{1.5}$. Тобто

$$|\,y(x,\infty) - V(x,t)\,| < 0.331313$$

при запропонованих обмеженнях.

РОЗДІЛ 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО СПЕКТРАЛЬНІСТЬ ЗА ДАНФОРДОМ – БЕЙДОМ ОДНОВИМІРНОГО НЕСАМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДІНҐЕРА НА ВСІЙ ОСІ В ТЕРМІНАХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

3.1. Необхідні означення

Припустимо, що комплекснозначна функція $V(x)$ задовольняє умову

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)\,|\,V(x)\,|\,dx < \infty. \tag{3.1}$$

Означення 3.1. Означимо оператор L. Несамоспряжений оператор Шредінґера L породжується в комплексному гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, диференціальним виразом

$$l(y)(x) = y''(x) + V(x)y(x) \tag{3.2}$$

і областю визначення $D(L)$, до якої належать усі $y \in L_2(\mathbb{R})$, для яких похідна y' існує, абсолютно неперервна в кожному скінченному проміжку і $l(y) \in L_2(\mathbb{R})$.

Комплекснозначну функцію $V(x)$ в означенні 3.1 називають потенціалом оператора Шредінґера L за формальною аналогією з самоспряженим випадком.

У випадку півосі аналогічну до (3.1) умову Б.Я. Левін [5] використав для узагальнення перетворень Фур'є і Лапласа. При цьому він істотно узагальнив оператори перетворення (оператори узагальненого зсуву Дельсарта – Левітана) для випадку операторів Штурма – Ліувілля на півосі і на всій осі (див. додатково [107]).

Зауваження. За аналогією до статті [5] можна довести, що за умови відсутності на неперервному спектрі несамоспряженого оператора L (з комплекснозначним потенціалом) спектральних особливостей в сенсі М.А. Наймарка [174], умова (3.1) гарантує спектральність в сенсі Данфорда − Бейда цього оператора і для довільної функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ має місце розвинення за власними і приєднаними функціями оператора L.

Зазначимо, що в низці випадків умову (3.1) можна замінити такою:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)\, |V(x)|\, dx < \infty. \tag{3.3}$$

При потребі використання умови (3.3) робитимемо відповідні зауваження.

Зробимо пояснення щодо теорії оператора L зі спектральними особливостями.

Несамоспряжений оператор Шредінґера L з огляду на припущення комплексності потенціалу за умови (3.1) не є спектральним оператором у сенсі В.Е. Лянце (і тим більше, не є спектральним у сенсі Н. Данфорда). Це випливає з результатів М.А. Наймарка [174], а також з праць Б.С. Павлова [176−178]. Щоправда, М.А. Наймарк [174] і Б.С. Павлов [176−178] дослідили лише випадок півосі $[0,\infty)$. Проте ситуація для несамоспряженого оператора Шредінґера L на всій осі аналогічна до випадку півосі $[0,\infty)$. Наявність спектральних особливостей в оператора L означає, що в цього оператора без додаткових обмежень на потенціал $V(x)$ спектральна міра або не існує, або існує лише в сенсі узагальнення, даного В.Е. Лянце [158] у випадку скінченного числа спектральних особливостей.

У Розділі 3 автор розв'язує задачу: які додаткові обмеження на комплексний потенціал оператора Шредінґера L слід накладати, щоб оператор L став спектральним в сенсі Данфорда − Бейда і мав спектральну міру в сенсі Данфорда?

Розв'язана в цьому Розділі задача вважалася проблемною (важкою) − див., наприклад, передмову А.Г. Костюченка [173] до монографії Н. Данфорда і Дж.Т. Шварца [172]. Щоправда, А.Г. Костюченко торкається лише крайової задачі на півосі. Відразу зазначимо, що задачу на всій осі розв'язувати важче, бо немає переваги наявності крайової умови в початку координат (яка є у випадку задачі на півосі). Поняття спектральності за Данфордом − Бейдом − основне в цьому Розділі. Для зручності відтворимо і доповнимо означення, анонсовані в попередніх підрозділах щодо спектральності за Данфордом − Бейдом.

Наступне означення спектральної міри оператора і подальші теореми подамо за статею Н. Данфорда [171] і працею В.Е. Лянце [158].

Означення 3.2 (Спектральна міра в сенсі Данфорда). Спектральною мірою в гільбертовому просторі H називається операторнозначна функція множини $P : \Delta \to P(\Delta)$, яка має такі властивості:

A) Функція P визначена на класі (B) всіх борелівських підмножин комплексної площини $\mathbb{C}$;

B) Значеннями функції P є лінійні обмежені оператори $P(\Delta)$, що відображають весь простір H у себе і мають такі властивості:

1) $P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2), \qquad \Delta_1, \Delta_2 \in (B)$;

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(P(\Delta_k)f, g\right) = \left(P(\Delta)f, g\right)$ для всякого розбиття множини $\Delta \in (B)$ на частини $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \in (B)$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$ при $i \neq j$, де $\varnothing$ – порожня множина;

3) $P(\mathbb{C}) = I$ де I – оператор тотожного перетворення в просторі H, а $\mathbb{C}$ – комплексна площина.

З умов ***A***) і ***B***) випливає (див. В.Е. Лянце [158]), що для спектральної міри P існує таке число $K, 1 \leq K < \infty$, що має місце властивість

C) $\| P(\Delta) \| \leq K$ для всіх $\Delta \in (B)$;

4) якщо для деякого $\Delta \in (B)$ виконується $\| P(\Delta) \| = 1$, то оператор $P(\Delta)$ є самоспряженим ортопроектором.

З умови ***2***) випливає, що $P(\varnothing) = 0$, тому

$$P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 0, \text{ якщо } \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing.$$

Ця властивість означає, що множинам, які не перетинаються, відповідають лінійно незалежні простори $P(\Delta_1)H$ і $P(\Delta_2)H$.

За означенням, міра P вважається зчисленно-адитивною у слабкому сенсі, проте зі слабкої зчисленної адитивності міри P випливає сильна адитивність P (див. [158]).

Означення 1.4 (Розвинення одиниці обмеженого оператора T). Припустимо, що H – комплексний гільбертів простір, T – обмежений оператор в H, а P – спектральна міра. Ідучи за Н. Данфордом, розглянемо такі властивості:

U) оператор T комутує зі спектральною мірою P, тобто для кожної множини $P(\Delta)H$ справджується $TP(\Delta) = P(\Delta)T$;

V) спектр $\mathrm{sp}\,(T \mid P(\Delta)H)$ звуження оператора T на інваріантний підпростір $P(\Delta)H$ міститься в замиканні $\overline{\Delta}$ множини $\Delta \in (B)$:

$$\mathrm{sp}\,(T \mid P(\Delta)H) \in \overline{\Delta}.$$

Спектральну міру P, що має разом з оператором T властивості ***U***) і ***V***), називають *розвиненням одиниці оператора* T.

З метою дослідити умови спектральності необмеженого одновимірного оператора Шредінґера L (див. Означення 3.1) через потенціал подамо за книгою [172, Ф 7, т. 3] необхідні означення і теореми теорії необмежених спектральних операторів.

Означення 3.4. Припустимо, що (B) − клас (поле) борелівських підмножин комплексної площини, а T − лінійний оператор, область визначення $D(T)$ і область значень $R(T)$ якого належать до комплексного банахового простору X. Тоді оператор T називають *спектральним в сенсі Данфорда − Бейда*, якщо він замкнений та існує така зчисленно-адитивна спектральна міра E, визначена на (B), що:

$$E(\sigma)X \subseteq D(T), \qquad E(\sigma)D(T) \subseteq D(T) \tag{3.4}$$

і

$$TE(\sigma)x = E(\sigma)Tx, \qquad x \in D(T), \qquad \sigma \in (B), \tag{3.5}$$

спектр $\mathrm{sp}(T \mid E(\sigma)X)$ звуження $T \mid E(\sigma)X$ оператора T, визначеного на перетині $D(T) \bigcap E(\sigma)X$, задовольняє умову

$$\mathrm{sp}(T \mid E(\sigma)X) \subseteq \overline{\sigma}, \qquad \sigma \in (B). \tag{3.6}$$

Тут $\overline{\sigma}$ − замикання множини σ.

Спектральну міру E називають розвиненням одиниці необмеженого оператора T.

З цього означення випливає, що область визначення спектрального оператора щільна в просторі X.

***Теорема* 3.1 (В. Бейд, В.Е. Лянце).** *Припустимо, що $\Delta \in (B)$, T − спектральний оператор і E − його розвинення одиниці.*

Тоді:

1°) *звуження $T \mid E(\Delta)X$ оператора T на $E(\Delta)X$ є спектральним оператором, а його розвинення одиниці є звуженням E на підпростір $E(\Delta)X$. Якщо множина $\Delta \in (B)$ обмежена, то оператор $T \mid E(\Delta)X$ є обмеженим оператором;*

2°) розвинення одиниці замкненого спектрального оператора визначається однозначно.

*Оператор A, що має властивість (**W**) за умови комутування операторів S і N, є спектральним за Данфордом оператором.*

Теорема 3.2 (В. Бейд). *Припустимо, що T − замкнений оператор, а λ − точка резольвентної множини цього оператора. Оператор T є спектральним тоді й тільки тоді, коли його резольвента $(T-\lambda)^{-1}$ є спектральним оператором, а його спектральна міра E задовольняє умову $E(\{0\})=0$.*

Якщо припустити лише виконання умови (3.1) на комплекснозначний потенціал оператора L, то оператор L не матиме властивості спектральності за Данфордом − Бейдом. Це випливає з результатів М.А. Наймарка [174] і Б.С. Павлова [176−178].

Теорема 3.3 (Б.С. Павлов [178]). *Припустимо, що комплекснозначний потенціал $V(x)$ одновимірного оператора Шредінґера L на півосі задовольняє умову*

$$\int_0^\infty (1+x^2)|V(x)|\,dx<\infty.$$

Тоді множина спектральних особливостей оператора L обмежена, замкнена та має міру нуль. Крім того, для множини спектральних особливостей виконується умова

$$\sum \ln|l_v|\,|l_v|>-\infty, \tag{3.7}$$

де l_v − інтервали суміжності з множиною спектральних особливостей, $|l_v|$ − довжина інтервалу l_v. Підсумовування здійснюється за всіма скінченними l_v.

Власні значення оператора L, що занумеровані з урахуванням кратності, задовольняють умову

$$\sum \operatorname{Im}\sqrt{\lambda_v}<\infty.$$

3.2. Розв'язок задачі про спектральність у сенсі Данфорда − Бейда несамоспряженого оператора L у термінах комплекснозначного потенціалу $V(x)$

У цьому підрозділі отримано умови на комплекснозначний потенціал $V(x)$ оператора L (див. Означення 3.1), при яких цей оператор є спектральним за Данфордом − Бейдом у (комплексному) гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$. Доведено теореми, що розв'язують цю задачу.

Сформульована задача виникла в зв'язку з працями М.А. Наймарка, Б.С. Павлова, В.Е. Лянце, Н. Данфорда, Дж.Т. Шварца, В. Бейда. Праці згаданих вчених привели до розуміння того, що оператор L при умові (3.1) на комплекснозначний потенціал може не мати спектральної міри і навіть узагальненої спектральної міри в сенсі В.Е. Лянце − див. Теорему 3.3.

Для розв'язання сформульованої задачі автор запропонував параметричний метод, що ґрунтується на комутаційних властивостях пар Лакса загального рівняння Кортевеґа − де Фріза (КдФ).

Запишемо стаціонарний аналог загального рівняння КдФ у термінах пар Лакса:

$$\left[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1\right] = 0, \tag{3.8}$$

де $l = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$ − формальний одновимірний оператор Шредінґера з комплекснозначним потенціалом $V(x)$, а ієрархію Лакса $\{M_i\}$ задаємо у вигляді

$$M_{2i+1} = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i}\left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k\right), \tag{3.9}$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_n$ − комплексні параметри; a_k − многочлени від комплекснозначної функції $V(x)$ і її похідних, $a_k = a_k(V, V', V'', \ldots)$, які мають властивість

$$\left|a_k(V, V', V'', \ldots)\right| \to 0$$

$$\text{при} \quad \left|V^{(j)}(x)\right| \underset{|x|\to\infty}{\to} 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.9a}$$

***Теорема* 3.4 (Основна теорема, І.-П.П. Сироїд [239, 240, 252]).** *Припустимо, що*:

(***і***) *вектор комплексних параметрів* $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння КдФ* (3.8) *такий, що рівняння*:

$$c_0 \lambda^{2n} + c_1 \lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n = 0 \tag{3.10}$$

не має дійсних коренів, тобто для многовиду AL *коренів рівняння* (3.10) *справджується умова*

$$\operatorname{dist}(AL, \mathbb{R}) = d > 0; \tag{3.10a}$$

(***ii***) $V(x)$ – *комплекснозначний розв'язок загального рівняння КдФ* (3.8), *що задовольняє умову* (3.1) *та умови на похідні*

$$\left|V^{(i)}(x)\right| \underset{|x|\to\infty}{\to} 0, \quad i = 1,2,\ldots,m\,, \tag{3.11}$$

де m – *порядок рівняння КдФ* (3.8).

Тоді:

1°) *несамоспряжений оператор Шредінґера* L *з комплекснозначним потенціалом* $V(x)$ (*див. Означення* 3.1) *не має спектральних особливостей (сингулярних точок в сенсі М.А. Наймарка* [174]) *на неперервному спектрі і є спектральним у сенсі Данфорда – Бейда оператором;*

2°) *якщо* z – *недійсний корінь рівняння* (3.10), *то* z^2 *належить до дискретного спектра оператора* L.

Зауваження. Випадок $c_n = 0$ також можна дослідити, запровадивши корекції в доведення Теореми 3.4. Проте обмежимося лише прикладами для випадку $c_n = 0$ у кінці цього Розділу.

Висновок 1 з Теореми 3.4. *Припустимо, що виконуються умови Теореми* 3.4. *Тоді несамоспряжений оператор Шредінґера* L *з комплекснозначним потенціалом* $V(x)$ *має спектральну міру* (*обмежену за нормою*), *що задовольняє Означення* 3.2 (*див. також Означення* 3.4).

Висновок 2 з Теореми 3.4. *Потенціали* $V(x)$, *що задовольняють умови Теореми* 3.4, *є комплекснозначними аналогами* N*-солітонних розв'язків рівняння Кортевеґа де – Фріза.*

Перед доведенням Теореми 3.4 подамо відомі формули теорії одновимірного рівняння Шредінґера. У припущенні (3.1) одновимірне рівняння Шредінґера

$$l(y) = \lambda^2 y \tag{3.12}$$

має (див. Л.Д. Фаддєєв [83, 84]) розв'язки $f_1(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ з асимптотиками:

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty\,,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + o(1) \qquad \text{при} \qquad x \to -\infty. \tag{3.13}$$

Розв'язки (3.13) мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \mathcal{K}_1(x,y)e^{i\lambda y}\,dy, \tag{3.14}$$

де ядро $\mathcal{K}_1(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A \le x \le y < \infty$ і

$$\int_A^{\infty}\int_x^{\infty} \left|\mathcal{K}_1(x,y)\right| dy\,dx < \infty,$$

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} \mathcal{K}_2(x,y)e^{-i\lambda y}\,dy, \tag{3.15}$$

а ядро $\mathcal{K}_2(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \le x \le B$. Функція $\left|\mathcal{K}_2(x,y)\right|$ сумовна в області $-\infty < y \le$ $\le x \le B$.

Для дійсних $\lambda \ne 0$ пари

$$f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння Шредінґера. Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\left\{f_1(x,\lambda),\ f_1(x,-\lambda)\right\} = 2i\lambda, \quad \left\{f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)\right\} = -2i\lambda. \tag{3.16}$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами:

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)f_1(x,\lambda) + a(\lambda)f_1(x,-\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0, \tag{3.17}$$

$$f_1(x,\lambda) = -b(-\lambda)f_2(x,\lambda) + a(\lambda)f_2(x,-\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,\ \lambda \ne 0, \tag{3.18}$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \left\{f_1(x,\lambda), f_2(x,\lambda)\right\},$$

$$w_1(\lambda) = \left\{f_2(x,\lambda), f_1(x,-\lambda)\right\} \tag{3.19}$$

таким чином:

$$a(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w_1(\lambda). \tag{3.20}$$

За аналогією зі самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію $w_1(\lambda)$ назвемо коефіцієнтом відбиття.

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані наступною формулою:

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0. \tag{3.21}$$

Означення 3.5. Припустимо, що виконується умова (3.1) і задано рівняння

$$a(\lambda) = 0. \tag{3.22}$$

Якщо $\lambda \neq 0$ – дійсний корінь рівняння (3.22), то число λ^2 називається *спектральною особливістю* оператора L.

Якщо λ_k – недійсний ($\operatorname{Im}\lambda_k > 0$) корінь рівняння (3.22), то число $s_k = \lambda_k^2$ належить до *дискретного спектра* оператора L.

Зауважимо при цьому, що за умови (3.1) додатна піввісь належить *неперервному спектру* оператора L, а число 0 не належить до множини власних значень дискретного спектра оператора L.

Якщо оператор L має спектральні особливості (сингулярні точки) на неперервному спектрі, то спектральна міра в сенсі Данфорда не існує.

Наведемо формулу для спектральної міри оператора L ***в припущенні, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі***. Ми йдемо за працями М.А. Наймарка і Б.Я. Левіна. Припустимо, що Δ – борелівська множина комплексної площини. Задамо операторну функцію $\Delta \to P(\Delta)$:

$$P(\Delta)y(x) = \sum_{j,n=1,2} \int_{\Delta \cap (0,\infty)} \frac{V_{jn}(s)\sqrt{s}}{w(\sqrt{s})w(-\sqrt{s})} \omega_j(y,s)\omega_n(x,s)\,ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \left\{ \left(\frac{d}{ds}\right)^{\nu_k - 1} M_k(s) f_2(y,\sqrt{s}) f_1(x,\sqrt{s}) \right\}_{s=s_k}. \tag{3.23}$$

Пояснимо значення виразів, що входять до формули (3.23). Позначимо через $\omega_j(x,s)$ ті розв'язки рівняння Шредінґера (3.12), які задовольняють початкові дані

$$\omega_1(0,s) = 1, D_x\omega_1(0,s) = 0, \qquad \omega_2(0,s) = 0,\ D_x\omega_2(0,s) = 1.$$

Крім того, позначаємо $s = \lambda^2$ і $s_k = \lambda_k^2$; D_x – похідна за x.

Означення 3.6. Припустимо, що виконується умова (3.1) і оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі. L-перетворенням Фур'є функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ називається пара функцій

$$\omega_j(f,s), \qquad j = 1,2,$$

заданих на неперервному спектрі оператора L такими перетвореннями:

$$\omega_j(f,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\omega_j(x,s)\,dx, \qquad j = 1,2, \tag{3.24}$$

де в перетвореннях (3.24) збіжність інтегралів розуміємо в середньому квадратичному, і система векторів

$$f_j^{(i)}(f,\lambda_k),\ j = 0,1,\ldots,m_k - 1,\ k = 1,\ldots,N, \tag{3.25}$$

на дискретному спектрі оператора L. Система векторів (3.25) відповідає власним і приєднаним функціям дискретного спектра оператора L, що відповідають власним значенням $s_k = \lambda_k^2$.

Функції $V_{jn}(s)$ означені на дійсній осі формулами

$$V_{jn}(s) = f_1^{v}(0,\lambda)f_1^{æ}(0,-\lambda) + f_2^{v}(0,\lambda)f_2^{æ}(0,-\lambda), \quad s = \lambda^2,$$

де $v = \left[\dfrac{j+n}{4}\right]$, $æ = \left[\dfrac{j+n-1}{2}\right]$ означають порядок диференціювання за x. Крім того,

$$M_{æ}(s) = \frac{(s - s_{æ})^{v_{æ}}}{w(\sqrt{s})\,(v_{æ} - 1)!}.$$

У формулі (3.23) інтеграл збігається в середньому квадратичному, якщо $w(\sqrt{s}) \neq 0$ на неперервному спектрі оператора L. Припущення $w(\sqrt{s}) \neq 0$ відповідає випадку відсутності спектральних особливостей (сингулярностей) в сенсі М.А. Наймарка на неперервному спектрі оператора L.

***Висновок 3 з Теореми* 3.4.** Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.4. Тоді кожна функція $y \in L_2(-\infty,\infty)$ однозначно визначається (за виконання умови (3.1) своїм *L-перетворенням Фур'є* і має місце рівність Парсеваля

$$y(x) = \sum_{j,n=1,2} \int_0^\infty \frac{V_{jn}(s)\sqrt{s}}{w(\sqrt{s})w(-\sqrt{s})} \omega_j(y,s)\omega_n(x,s)\,ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \left\{ \left(\frac{d}{ds}\right)^{\nu_k - 1} M_k(s) f_2(y,\sqrt{s}) f_1(x,\sqrt{s}) \right\}_{s=s_k}.$$

Цей результат є аналогічним до результату Б.Я. Левіна [5], отриманого ним для випадку півосі.

Ця рівність дозволяє врахувати внесок неперервного і дискретного спектра в задачу розвинення за власними і приєднаними функціями оператора L.

Випадок наявності спектральної особливості на неперервному спектрі оператора ми змушені виключити з розгляду (в цьому випадку функція $w(\lambda)$ перетворюється у нуль на спектральній особливості і інтеграл в (3.23) стає розбіжним).

Покажемо, що з умов Теореми 3.4 випливає, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі.

Означення 3.7. Комплекснозначний потенціал V оператора L за аналогією з самоспряженим випадком назвемо *безвідбивним*, якщо коефіцієнт відбиття $w_1(\lambda) \equiv 0$.

Означення коефіцієнта відбиття $w_1(\lambda)$ − формула (3.19).

***Лема* 3.1.** *Припустимо, що V − безвідбивний комплекснозначний потенціал оператора L. Тоді:*

1°) *оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі і має місце рівність*

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 \tag{3.26}$$

на дійсній осі;

2°) *множина власних значень оператора L скінченна, а оператор L є спектральним у сенсі Данфорда − Бейда. Спектральну міру $\Delta \to P(\Delta)$ оператора L можна реалізувати формулами* (3.23)−(3.25), *заданими за допомогою L-перетворення Фур'є згідно з Означенням* 3.4.

3°) *функція $a(\lambda)$ має вигляд*

$$a(\lambda) = \prod_{l=1}^{N} \frac{(\lambda + \lambda_l)^{m_l}}{(\lambda - \lambda_l)^{m_l}}. \tag{3.27}$$

Д о в е д е н н я *Леми* 3.1. З того, що коефіцієнт відбиття $w_1(\lambda)$ тотожно дорівнює нулеві, випливає, що розв'язки $f_2(x,\lambda)$ і $f_1(x,-\lambda)$ лінійно залежні:

$$f_2(x,\lambda) = a(\lambda) f_1(x,-\lambda),$$

і, крім того, (див. (3.21)) має місце формула (3.26)

$$a(\lambda) = 1$$

для всіх дійсних λ в нашому безвідбивному випадку. Тобто $a(\lambda) \neq 0$ для всіх дійсних λ. Ми довели, що оператор L не має спектральних особливостей на неперервному спектрі. Тому оператор L не має точок скупчення власних значень дискретного спектра на неперервному спектрі.

З безвідбивної властивості потенціалу випливає, що функція $a(\lambda)$ неперервна у півплощині $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ і має в цій півплощині асимптотику

$$a(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{при} \qquad |\lambda| \to \infty.$$

Ми довели, що оператор L має скінченну кількість власних значень. Крім того, з (3.26) випливає формула (3.27).

З формули (3.26) випливає також, що

$$w(\lambda) w(-\lambda) = 4\lambda^2,$$

тобто функція $w(\lambda)w(-\lambda)$ обертається в нуль при $\lambda = 0$. Проте з цієї обставини не випливає розбіжність інтеграла в рівності Парсеваля для оператора L.

Спектральність в сенсі Данфорда − Бейда оператора L (твердження ***2°***) випливає з праці Б.Я. Левіна [5] або зі статті Г.М. Кесельмана [175] за умови відсутності спектральних особливостей на неперервному спектрі.

Основні твердження Леми 3.1 опубліковані в статті І.-.П.П. Сироїд [240].

***Лема* 3.2 (І.-П.П. Сироїд [240, 252]).** *Припустимо, що V − безвідбивний комплекснозначний потенціал оператора L. Тоді існує число $\varepsilon > 0$ таке, що функція $V(x)$ задовольняє умову*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon|x|} |V(x)| dx < \infty. \tag{3.28}$$

Доведення *Теореми* 3.4. Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.4. Основний тягар доведення Теореми 3.4 падає на доведення тієї обставини, що з умов цієї теореми випливає відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора L. Проте відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі випливає з Леми 3.1.

Щоб скористатися Лемою 3.1, доведемо, що потенціал $V(x)$ оператора L є безвідбивним потенціалом. Припустимо, що

$$M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \cdots + c_n M_1. \tag{3.29}$$

З огляду на рівняння КдФ (3.8) оператори L і M комутують. Тому оператор M переводить розв'язки одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) знову в розв'язки цього рівняння. Мають місце асимптотичні формули:

$$Mf_1(x,\lambda) = -\lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)e^{i\lambda x} + o(1),$$
$$x \to \infty, \tag{3.30}$$

$$Mf_1(x,-\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)e^{-i\lambda x} + o(1),$$
$$x \to \infty. \tag{3.31}$$

Достатньо довести (3.30). Розв'язок $f_1(x,\lambda)$ одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) має зображення у вигляді тотожності

$$f_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} V(t) f_1(t,\lambda)\, dt. \tag{3.32}$$

Діємо оператором M на $f_1(x,\lambda)$ в зображенні (3.32) і, враховуючи асимптотику (3.11), отримуємо (3.30).

Порівнюючи асимптотики (3.30) і (3.14) при $x \to \infty$, зауважуємо, що асимптотики розв'язків $M f_1(x,\lambda)$ і $f_1(x,\lambda)$ відрізняються на множник, що залежить лише від λ. Ця обставина відповідає умові комутування операторів L і M.

Для розв'язку $f_2(x,\lambda)$ одновимірного рівняння Шредінґера (3.12) має місце тотожність

$$f_2(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} - \int_{-\infty}^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} V(t) f_2(t,\lambda)\, dt. \tag{3.33}$$

Використовуючи тотожність (3.33) і асимтотику (3.15), при $x \to -\infty$, отримуємо, що асимптотики розв'язків $Mf_2(x,\lambda)$ і $f_2(x,\lambda)$ відрізняються на множник, що залежить лише від λ.

Асимптотика розв'язку $f_2(x,\lambda)$ при $x \to \infty$ має вигляд

$$f_2(x,\lambda) = b(\lambda)e^{i\lambda x} + a(\lambda)e^{-i\lambda x} + o(1). \tag{3.34}$$

Асимптотика розв'язку $Mf_2(x,\lambda)$ при $x \to \infty$ має вигляд

$$Mf_2(x,\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n) \times$$

$$\times (-b(\lambda)e^{i\lambda x} + a(\lambda)e^{-i\lambda x}) + o(1). \qquad (3.35)$$

З вимоги, щоб асимптотики (3.34) і (3.35) збігалися з точністю до множника, що залежить лише від λ, випливає рівність

$$\lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)b(\lambda) = 0.$$

За умовою Теореми 3.4

$$c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n \neq 0$$

на дійсній осі. Тому

$$\lambda b(\lambda) = 0, \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0. \qquad (3.36)$$

Враховуючи (3.20), отримуємо, що $w_1(\lambda) \equiv 0$. Твердження ***1°*** доведено.

Доведемо твердження ***2°***. З цією метою поряд з фундаментальною системою $f_1(x,\lambda)$, $f_1(x,-\lambda)$ задамо пару розв'язків

$$Mf_1(x,\lambda), \qquad Mf_1(x,-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0.$$

Вронскіан цієї пари розв'язків дорівнює

$$\{Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda)\} =$$

$$= 2i\lambda^2(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n)^2 \qquad (3.37)$$

і обчислюється за допомогою асимптотик (3.30) і (3.31).

З умов Теореми 3.4 випливає, що

$$\{Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda)\} \neq 0 \text{ при } \lambda \neq 0.$$

Позначимо коефіцієнти переходу між фундаментальними системами

$$Mf_1(x,\lambda),\ Mf_1(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad f_2(x,\lambda),\ f_2(x,-\lambda)$$

через $a^M(\lambda)$ і $b^M(\lambda)$:

$$f_2(x,\lambda) = b^M(\lambda) M f_1(x,\lambda) + a^M(\lambda) M f_1(x,-\lambda),$$

$$M f_1(x,\lambda) = -\, b^M(-\lambda) f_2(x,\lambda) + a^M(\lambda) f_2(x,-\lambda).$$

При цьому

$$a^M(\lambda) = \lambda(c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n) a(\lambda)$$

і

$$a^M(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}\{M f_1(x,\lambda), f_2(x,-\lambda)\}. \tag{3.38}$$

Якщо z − недійсний корінь рівняння $a^M(\lambda) = 0$, то z^2 належить до дискретного спектра оператора L.

Припустимо, що z − недійсний корінь рівняння (3.10). Тоді з формули (3.38) випливає, що z є коренем рівняння $a^M(\lambda) = 0$, а z^2 належить до дискретного спектра оператора L. Твердження ***2***° Теореми 3.4 доведено. Теорему 3.4 доведено. ◊

Зауваження до Теореми 3.4. З доведення Теореми 3.4 випливає, що у випадку нового припущення $c_n = 0$ аналог цієї теореми також можна сформулювати, запровадивши деякі корекції у формули. Можна припустити, що $c_{n-1} \neq 0$ і провести аналогічне доведення.

***Приклад* 3.1.** Рівняння

$$[\, l,\ M_3 + cM_1] = 0,\ c \neq 0, \tag{3.39}$$

є частковим випадком рівняння (3.8). Припустимо, що $a_1 = \frac{3}{4}V$ і $V(x),\ V'(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. У формулі (3.39)

$$M_3 = -iD^3 + i\frac{3}{2}VD + i\frac{3}{4}VD, \qquad M_1 = iD,$$

де $D = \frac{d}{dx}$, $i^2 = -1$. Нагадаємо, що $l = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, і обчислимо комутатор

$$[\, l,\ M_3 + cM_1] = i\left(\frac{1}{4}V''' - \frac{3}{2}VV' - cV'\right). \tag{3.40}$$

З формул (3.39) і (3.40) отримуємо стаціонарне рівняння Кортевеґа − де Фріза з параметром:

$$V''' - 6VV' - 4cV' = 0. \tag{3.39a}$$

При $c = 4h^2$, $\operatorname{Re} h \neq 0$ функція

$$V(x) = -\frac{8h^2}{\operatorname{ch}^2(2hx + i)} \tag{3.41}$$

є спадним на $\pm\infty$ розв'язком рівняння (3.39а).

Оператор Шредінґера L, що породжується диференціальним виразом

$$l(y) = -\frac{d^2}{dx^2} y - \frac{8h^2}{\operatorname{ch}^2(2hx + i)} y$$

з потенціалом $V(x)$ і областю визначення $D(L)$, не має спектральних особливостей на неперервному спектрі і є спектральним у сенсі Данфорда – Бейда оператором.

Згідно з Теоремою 3.4 необхідно розглянути розв'язки рівняння

$$\lambda^2 + c = 0 \qquad \text{або} \qquad \lambda^2 + 4h^2 = 0. \tag{3.42}$$

При $\operatorname{Re} h \neq 0$ корені рівняння (3.42) недійсні. Крім того, отримуємо, що існує функція f з $L_2(\mathbb{R})$ така, що

$$Lf = -4h^2 f.$$

Власна функція f, що відповідає власному значенню $-4h^2$, має вигляд

$$f(x) = -\frac{8h^2}{\operatorname{ch}(2hx + i)}, \qquad \operatorname{Re} h \neq 0.$$

Умова $\operatorname{Re} h \neq 0$ істотна. Якщо $h = iy$, де y – дійсне число, то потенціал $V(x)$ (див. (3.41)) стає періодичним і необмеженим.

3.3. Комплекснозначний солітонний многовид розв'язків стаціонарного загального рівняння Кортевеґа – де Фріза. Поняття Шредінґер-аналізу над солітонним многовидом

Нагадаємо, що стаціонарний аналог загального рівняння Кортевеґа – де Фріза у термінах пар Лакса має вигляд (3.8):

$$[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1] = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Означення 3.8. S-многовидом (або стаціонарним солітонним многовидом) називається многовид розв'язків загального рівняння КдФ (3.8), що належить до простору

$$X = \left\{ f(x) : \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) \left| f^{(n)}(x) \right| dx < \infty,\ n = 0,1,\ldots,m \right\}, \qquad (3.43)$$

де m − порядок рівняння (3.8).

Зауваження щодо коректності означення S-многовиду. Теорема 3.4 і приклад з підрозділу 3.2 показують, що означення S-многовиду (стаціонарного солітонного многовиду КдФ) стає коректним, якщо вектор комплексних параметрів $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, з рівняння КдФ (3.8) такий, що рівняння (3.10) не має дійсних коренів, тобто виконується умова (3.10a).

Означення 3.9. Означимо *простір S^l формальних операторів Шредінґера l над S-многовидом:*

$$S^l = \left\{ l : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R});\ l = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x),\ V(x) \in S \right\}. \qquad (3.44)$$

Означення 3.10 (простору *S^L операторів Шредінґера L над S-многовидом*). До простору S^L належать оператори Шредінґера L, що задовольняють умови Означення 3.1.

Основна задача Шредінґер-аналізу над S-многовидом полягає в з'ясуванні умов, за яких простір S^L є простором спектральних за Данфордом − Бейдом (див. Означення 3.4) операторів Шредінґера в просторі $L_2(\mathbb{R})$ і відповідні спектральні міри $\Delta \to P(\Delta)$ для кожного оператора L обмежені.

З доведення Теореми 3.4 випливає більш загальна теорема.

Теорема 3.5. *Припустимо, що вектор комплексних параметрів* $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння КдФ* (3.8) *змінюється таким чином, що для кожного вектора* $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ *існує число* $a > 0$ *таке, що*

$$\operatorname{dist}(AL, \mathbb{R}) = a > 0 \qquad (3.45)$$

для многовиду AL коренів рівняння

$$c_0 \lambda^{2n} + c_1 \lambda^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1} \lambda^2 + c_n = 0. \qquad (3.46)$$

Тоді відповідний простір S^L операторів Шредінґера L над S-многовидом ***є простором спектральних за Данфордом − Бейдом операторів Шредінґера*** *і для кожного $L \in S^L$ відповідна спектральна міра $P(\Delta)$ одностайно обмежена за нормою.*

***Теорема* 3.6.** *Припустимо, що для вектора комплексних параметрів* $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння* (3.8) *існує число* $a > 0$ *таке, що виконується умова* (3.45).

Тоді з того, що відповідний вектору $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *розв'язок* $V(x)$ *рівняння* (3.8) *належить до простору* X (*див.* (3.43)) *випливає, що* $V(x)$ *належить до простору*

$$G_\varepsilon = \left\{ g(x) : \exists \varepsilon > 0 \quad \text{і} \quad \int_R e^{\varepsilon x} |g(x)| \, dx < \infty \right\}.$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що виконуються умови Теореми 3.6. Тоді відповідний вектору $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, розв'язок $V(x)$ рівняння (3.8) є безвідбивним потенціалом для одновимірного оператора Шредінґера $L \in S^L$. Твердження Теореми 3.6 випливає з безвідбивної властивості потенціалу $V(x)$ згідно з Лемою 3.2. ◊

3.4. Приклади, що стосуються масштабування розв'язуваних потенціалів

Припустимо, що оператор L такий, як в означенні 3.1.

Означення 3.11. Потенціал $V(x)$ оператора L назвемо *розв'язуваним потенціалом*, якщо спектральна задача для L розв'язується у явній формі і при цьому оператор L є спектральним за Данфордом − Бейдом.

***Теорема* 3.7.** *Припустимо, що* $V(x)$ − *розв'язуваний потенціал, а* v − *число.*

Тоді потенціал $\tilde{V}(x)$, *отриманий перетворенням*

$$\tilde{V}(x) = v^2 V(vx),$$

також є розв'язуваним.

Теорема 3.7 має багато застосувань. Запропонуємо приклади в наступних теоремах.

***Теорема* 3.8.** *Припустимо, що* $v \neq ib$, *де* $i^2 = -1$. *Тоді потенціал*

$$\tilde{V}(x) = -12v^2 \frac{3 + 4\,\mathrm{ch}(2vx - 8t) + \mathrm{ch}(4vx - 64t)}{(3\,\mathrm{ch}(vx - 28t) + \mathrm{ch}(3vx - 36t))^2} \qquad (3.47)$$

є розв'язуваним для кожного фіксованого $t \geq 0$.

Д о в е д е н н я. Приклад стосується випадку $c_n = 0$ в загальному рівнянні КдФ (3.8). Конкретніше, приклад стосується **рівняння Кортевеґа – де Фріза**

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 6VV' - V'''. \tag{3.48}$$

Задамо початкову функцію

$$V_0(x) = -\frac{6}{\mathrm{ch}^2(x)}. \tag{3.49}$$

У просторі дійсних функцій задача (3.48), (3.49) розв'язана в [1], де також доведено, що потенціал

$$V(x) = -12\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}\,(2x - 8t) + \mathrm{ch}\,(4x - 64t)}{(3\,\mathrm{ch}\,(x - 28t) + \mathrm{ch}\,(3x - 36t))^2} \tag{3.50}$$

є 2-солітонним розв'язком цієї задачі. Твердження Теореми 3.8 випливає із застосування Теореми 3.7 до потенціалу (3.50). ◊

Приклад 3.2. *Припустимо, що* $v = d + iu$, $d \neq 0$. *Тоді оператор Шредінґера* $L(t)$, *що породжується диференціальним виразом*

$$l(y) = -y'' - 12v^2\,\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}\,(2vx - 8t) + \mathrm{ch}\,(4vx - 64t)}{(3\,\mathrm{ch}\,(vx - 28t) + \mathrm{ch}\,(3vx - 36t))^2}\,y$$

для кожного фіксованого t *є спектральним за Данфордом – Бейдом оператором*

$$L(t) : L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty).$$

Умова $d \neq 0$ в прикладі 3.2 є істотною. Це випливає з наступного прикладу.

Приклад 3.3. *Припустимо, що оператор* $L(0)$ *є замиканням оператора* L_0, *що породжується в просторі* $L_2(-\infty,\infty)$ *диференціальним виразом*

$$h(0)f = -f'' - 12v^2\,\frac{3 + 4\,\mathrm{ch}\,(2vx) + \mathrm{ch}\,(4vx)}{(3\,\mathrm{ch}\,(vx) + \mathrm{ch}\,(3vx))^2}\,f$$

і областю визначення $D(L_0) = C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Оператор $h(0)$ *при* $v = ip$, $i^2 = -1$, *має осцилюючий потенціал і при цьому амплітуда осциляцій стає необмеженою в точках, де функції* $\cos(px)$ *і* $\cos(3px)$ *одночасно перетворюються в нуль.*

РОЗДІЛ 4

КОМПЛЕКСНИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ЗАГАЛЬНОЇ СИСТЕМИ КОРТЕВЕҐА – ДЕ ФРІЗА

4.1. Вступ і необхідні означення

Запишемо комплексне рівняння Кортевеґа – де Фріза (КдФ)

$$V_t = 6VV_x - V_{xxx}. \tag{4.1}$$

Систему Кортевеґа – де Фріза

$$\begin{aligned} u_t &= 6uu_x - 6zz_x - u_{xxx}, \\ z_t &= 6zu_x + 6z_x u - z_{xxx} \end{aligned} \tag{4.2}$$

запропонував автор [254].

Система (4.2) еквівалентна комплексному рівнянню (4.1) КдФ. Щоб переконатися в цьому, досить підставити в (4.1) наступне зображення комплексної функції $V(x,t)$:

$$V(x,t) = u(x,t) + iz(x,t).$$

Параметризуємо рівняння (4.1) таким чином:

$$V_t = c_0(6VV_x - V_{xxx}) + 4c_1 V_x, \tag{4.3}$$

де c_0 і c_1 – параметри, які можуть приймати комплексні або дійсні значення. Зрозуміло, що рівняння (4.3) є загальнішим, ніж рівняння (4.1). При $c_0 = 1$ і $c_1 = 0$ рівняння (4.3) перетворюється в рівняння (4.1).

Наступний крок полягає в тому, щоб використати пари Лакса [7]. Ідучи за алгоритмом, запропонованим у Розділі 2, і використовуючи комплексифікацію пар Лакса, отримуємо загальне комплексифіковане рівняння КдФ:

$$V_t = i[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1], \tag{4.4}$$

де $V_t = \dfrac{\partial l}{\partial t}$; $l = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ – формальний одновимірний оператор Шредінґера на всій осі, що параметрично залежить від t; $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ – вектор комплексних параметрів. Множину операторів $\{M_i\}$ називаємо ієрархією Лакса для моделі КдФ і задамо ці оператори наступним чином:

$$M_{2i+1} = (iD)^{2i+1} + \sum_{k=1}^{i} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k \right),$$

де $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$; $a_k = a_k(V, V_x, V_{xx}, \ldots; t)$ – многочлени від функції $V(x,t)$ і її похідних за змінною x.

Позначимо

$$M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1. \tag{4.5}$$

Комплексне параметричне узагальнення МОЗР полягає в розв'язанні задачі Коші для загального параметричного рівняння КдФ (4.4) з початковою умовою

$$V(x,0) = V_0(x) \tag{4.6}$$

у просторі комплекснозначних функцій, тобто реалізації описаного у вступі алгоритму.

4.2. Розв'язання несамоспряженої прямої задачі розсіяння для оператора L

Припустимо, що $V_0(x)$ – комплекснозначна функція, визначена на всій осі згідно з (4.6), і ця функція задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + x^2)\,|\,V(x)\,|\,dx < \infty. \tag{4.7}$$

Означення 4.1. Означимо оператор L. Несамоспряжений оператор Шредінґера L породжується в комплексному гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, диференціальним виразом

$$l(y)(x) = -y''(x) + V_0(x) y(x) \tag{4.8}$$

та областю визначення $D(L)$, до якої належать всі $y \in \in L_2(\mathbb{R})$, для яких похідна y' існує, абсолютно неперервна в кожному скінченному проміжку і $l(y) \in L_2(\mathbb{R})$.

Рівняння Шредінґера

$$l(y) = \lambda^2 y \tag{4.9}$$

має (див. [83, 84]) розв'язки $e_+(x,\lambda)$ і $e_-(x,\lambda)$ з асимптотиками

$$e_+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1), \qquad x \to \infty,$$

$$e_-(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + o(1), \qquad x \to -\infty, \tag{4.10}$$

де $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$.

Зауважимо, що для доведення існування розв'язків, замість умови (4.7) можна використати слабшу умову Л.Д. Фаддєєва (3.3).

Крім того, в Розділі 4 ми змінюємо позначення на такі, що зручніші для нас з огляду на КПМОЗР.

Розв'язки $e_+(x,\lambda)$ і $e_-(x,\lambda)$ аналітичні за λ в півплощині $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, неперервні аж до межі $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

Розв'язки (4.10) мають зображення через (інтегральні) оператори перетворення Б.Я. Левіна (4.11) і (4.12):

$$e_+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \mathcal{K}_+(x,y)e^{i\lambda y}dy, \tag{4.11}$$

де ядро $\mathcal{K}_+(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $A \leq x \leq y < \infty$ і

$$\int_A^\infty \int_x^\infty |\mathcal{K}_+(x,y)|\,dy\,dx < \infty,$$

$$e_-(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^x \mathcal{K}_-(x,y)e^{-i\lambda y}dy, \tag{4.12}$$

де ядро $\mathcal{K}_-(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $-\infty < y \leq x \leq B$. Функція $|\mathcal{K}_-(x,y)|$ сумовна в області $-\infty < y \leq x \leq B$.

Для дійсних $\lambda \neq 0$ пари

$$e_+(x,\lambda),\ e_+(x,-\lambda) \qquad \text{і} \qquad e_-(x,\lambda),\ e_-(x,-\lambda)$$

утворюють дві фундаментальні системи розв'язків рівняння (4.9). Відповідні вронскіани дорівнюють

$$\{e_+(x,\lambda),\ e_+(x,-\lambda)\} = 2i\lambda,$$

$$\{e_-(x,\lambda),\ e_-(x,-\lambda)\} = -2i\lambda. \tag{4.13}$$

Перехід від однієї фундаментальної системи до іншої здійснюється за формулами:

$$e_-(x,\lambda) = -b(-\lambda)e_+(x,\lambda) + a(\lambda)e_+(x,-\lambda),\ \ \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0, \quad (4.14)$$

$$e_+(x,\lambda) = b(\lambda)e_-(x,\lambda) + a(\lambda)e_-(x,-\lambda),\ \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0, \quad (4.15)$$

де коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ зображаються через вронскіани

$$w(\lambda) = \{e_+(x,\lambda), e_-(x,\lambda)\},$$

$$w_1(\lambda) = \{e_+(x,\lambda), e_-(x,-\lambda)\} \quad (4.16)$$

таким чином:

$$a(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}w(\lambda), \qquad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}w_1(\lambda). \quad (4.17)$$

За аналогією зі самоспряженим випадком функцію $w(\lambda)$ ***назвемо коефіцієнтом проходження, а функцію*** $w_1(\lambda)$ ***назвемо коефіцієнтом відбиття.***

Коефіцієнти переходу $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ пов'язані формулою

$$a(\lambda)a(-\lambda) = 1 + b(\lambda)b(-\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda \neq 0. \quad (4.18)$$

Означення 4.2. Припустимо, що виконується умова (3.1) і задано рівняння

$$a(\lambda) = 0. \quad (4.19)$$

Якщо $\lambda \neq 0$ – дійсний корінь рівняння (4.19), то число λ^2 називається *спектральною особливістю* оператора L.

Якщо λ_k – недійсний ($\operatorname{Im}\lambda_k > 0$) корінь рівняння (4.19), то число $s_k = \lambda_k^2$ належить до *дискретного спектра* власних значень оператора L.

Зауважимо при цьому, що за умови (4.7) додатна піввісь належить *неперервному спектру* оператора L, а нуль не належить до власних значень оператора L.

Далі припускатимемо (з метою знаходження комплексних аналогів солітонних і N-солітонних розв'язків загального рівняння КдФ), що ***оператор*** L ***не має спектральних особливостей*** (сингулярних точок за М.А. Наймарком) на неперервному спектрі, тобто

$$w(\lambda) \neq 0 \quad (4.20)$$

для всіх дійсних λ. Це означає, що ***оператор*** L ***припускаємо спектральним за Данфордом − Бейдом, а спектральна міра оператора*** L ***існує і є одностайно обмежена за нормою***.

Ідучи за статею Б.Я. Левіна [5], для оператора L можна довести ще сильніший результат.

***Лема* (Про спектральність).** *Припустимо, що для потенціалу оператора* L *виконується умова* (4.7).

Тоді:

1°) *відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора* L *є необхідною і достатньою умовою спектральності в сенсі Данфорда − Бейда оператора* L*;*

2°) *за умови відсутності спектральних особливостей в оператора* L *для всякої функції* $y \in L_2(-\infty,\infty)$ *має місце рівність Парсеваля* (*див. Розділ* 3), *що гарантує розвинення функції* $y \in L_2(-\infty,\infty)$ *за власними і приєднаними функціями оператора* L*;*

3°) *за відсутності спектральних особливостей в оператора* L *спектральна міра, що комутує з одновимірним оператором Шредінґера* L *на всій осі існує і зображується формулою* (3.23).

Припущення про відсутність спектральних особливостей на неперервному спектрі оператора L ***зумовлене тією обставиною, що комплекснозначним аналогам солітонних і*** N***-солітонних розв'язків рівняння Кортевеґа − де Фріза відповідають безвідбивні потенціали. Оператор Шредінґера з безвідбивним потенціалом не має спектральних особливостей на неперервному спектрі (доведення − див. Розділ 3).*** Ця обставина пов'язана з властивостями стійкості солітонних многовидів моделі Кортевеґа − де Фріза і добре погоджується з твердженням Б.Б. Кадомцева і В.І. Петвіашвілі [6] стосовно стійкості моделі Кортевеґа − де Фріза.

При виконанні умови (4.20) функція $w(\lambda)$ має скінченну множину нулів у півплощині $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Позначимо їх через $\lambda_1,\dots,\lambda_\alpha$ і назвемо сингулярними числами оператора L. Кратність кореня λ_p рівняння $w(\lambda)=0$ називаємо кратністю сингулярного числа λ_p і позначимо її через m_p.

Припустимо, що λ_p − сингулярне число оператора L. Оскільки вронскіан функцій $e_+(x,\lambda_p)$ і $e_-(x,\lambda_p)$ дорівнює нулеві, ці функції лінійно залежні. Існують такі ланцюжки чисел і задамо початкову функцію

$$V_0(x) = -\frac{6}{\mathrm{ch}^2(x-z)},$$

де z – комплексний параметр.

Зауваження. У просторі дійсних функцій (при $z=0$) цю початкову задачу Коші розв'язано в [1]. Ми розглядаємо розв'язок $V(x,t)$ задачі Коші для рівняння Кортевеґа – де Фріза (8.38) вигляду

$$V(x,t) = -12\frac{3+4\,\mathrm{ch}(2x-8t-z)+\mathrm{ch}(4x-64t-z)}{\left(3\,\mathrm{ch}(x-28t-z)+\mathrm{ch}(3x-36t-z)\right)^2}.$$

Нехай $m=|x|$ і розглянемо одновимірну крайову задачу на півосі

$$l(y) = -y'' + V(m)y = \lambda^2 y, \qquad 0 \le m < \infty,$$

$$y(0) = 0.$$

Припустимо, що оператор $L(t)$ породжується диференціальним виразом

$$l(t) =$$

$$= -y'' - 12\frac{3+4\,\mathrm{ch}(2m-8t-m_0)+\mathrm{ch}(4m-64t-m_0)}{\left(3\,\mathrm{ch}(m-28t-m_0)+\mathrm{ch}(3m-36t-m_0)\right)^2}y,$$

$$0 \le m < \infty,$$

і крайовою умовою $y(0)=0$ в просторі $L_2[0,\infty)$. Далі вважаємо, що $m_0 = z$.

Ми стверджуємо, що оператор $L(t)$ є спектральним у сенсі Данфорда – Бейда оператором. Наше твердження випливає з того, що потенціал цього оператора $L(t)$ можна продовжити (за побудовою) на всю вісь до безвідбивного потенціалу в розумінні праць [66, 240]. Продовження будується за аналогією з Теоремою 8.6.

Далі використовуємо метод відокремлення змінних і будуємо оператор A у вигляді (8.36). До операторів $L(t)$ і A застосовуємо Теорему 8.5 і отримуємо, що замикання $H(t)$ оператора $L(t)\otimes I_2 + I_1 \otimes A$ є спектральним за Данфордом – Бейдом.

***Приклад* 8.4.** Припустимо, що оператор L побудований за методом В.Е. Лянце [159], який подав приклад оператора з фінітним комплекснозначним потенціалом такий, що оператор L має спектральну особливість на неперервному спектрі і тому не є спектральним в сенсі Данфорда – Бейда, проте має узагальнену спектральну міру в сенсі статті В.Е. Лянце [158]. Сформулюємо цей приклад.

Припустимо, що оператор L породжується диференціальним виразом

$$l(y) = -y'' + p(x)y, \qquad 0 \le x < \infty,$$

і крайовою умовою $y(0) = 0$. Припустимо, що $q \neq 0$ – довільне скінченне дійсне число, а $f(x)$ – функція, двічі неперервно диференційовна при $0 \le x \le b < \infty$ і

$$f(0) = 0, \qquad f(b) = e^{iqb}, \qquad f'(b) = iqe^{iqb}.$$

Задамо потенціал $p(x)$:

$$p(x) = \frac{f''(x)}{f(x)} + q^2 \qquad \text{при} \qquad 0 \le x \le b,$$

$$p(x) = 0 \qquad \text{при} \qquad b < x < \infty.$$

Оператор L з так означеним потенціалом $p(x)$ має число q своєю спектральною особливістю.

Припустимо, що оператор A заданий згідно з формулою (8.23). Задамо оператор

$$H = L \otimes I_2 + I_1 \otimes A, \qquad D(H) = D(L) \otimes D(A).$$

Тому що оператор L має спектральну особливість на неперервному спектрі, оператори L і H не є спектральними за Данфордом – Бейдом. Проте **замикання оператора H є спектральним у сенсі В.Е. Лянце [158].**

8.7. Приклади, що стосуються масштабування розв'язуваних потенціалів

Розв'язувані потенціали. Припустимо, що оператор

$$L : L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty)$$

породжується крайовою задачею на півосі

$$l(y) = -y'' + V(x)y = \lambda^2 y, \qquad 0 \le x < \infty,$$

$$f(0) = 0.$$

Означення 8.6. Потенціал $V(m)$ оператора L назвемо *розв'язуваним* потенціалом, якщо спектральна задача для L розв'язується в явній формі і при цьому оператор L є спектральним за Данфордом – Бейдом (див. також [58]).

***Теорема* 8.11.** *Припустимо, що $V(m)$ – розв'язуваний потенціал, а v – число. Тоді потенціал $\tilde{V}(m)$, отриманий перетворенням*

$$\tilde{V}(m) = v^2 V(vm),$$

також є розв'язуваним.

Теорема 8.11 має багато застосувань. Запропонуємо приклади в наступних теоремах.

***Теорема* 8.12**. *Припустимо, що* $v \neq ib$, де $i^2 = -1$. *Тоді потенціал*

$$-12v^2 \frac{3 + 4\operatorname{ch}(2vm - 8t) + \operatorname{ch}(4vm - 64t)}{(3\operatorname{ch}(vm - 28t) + \operatorname{ch}(3vm - 36t))^2}$$

є розв'язуваним для кожного фіксованого t.

Наступний оператор $H(t)$ є замиканням оператора H_0, що породжується в просторі $L_2(E_3)$ диференціальним виразом

$$h(t)f =$$

$$= -\Delta f - 12v^2 \frac{3 + 4\operatorname{ch}(2v|x| - 8t) + \operatorname{ch}(4v|x| - 64t)}{(3\operatorname{ch}(v|x| - 28t) + \operatorname{ch}(3v|x| - 36t))^2} f$$

і областю визначення $D(H_0) = C_0^\infty(E_3)$.

***Теорема* 8.13.** *Припустимо, що* $v = d + iu$, $d \neq 0$, $i^2 = -1$; d, u *– дійсні.*

Тоді для кожного фіксованого $t \ge 0$ *оператор* $H(t)$ *є спектральним в сенсі Данфорда – Бейда у просторі* $L_2(E_3)$.

Припустимо, що оператор $H(0)$ є замиканням оператора H_0, що породжується в просторі $L_2(E_3)$ диференціальним виразом

$$h(0)f = -\Delta f - 12v^2 \frac{3 + 4\operatorname{ch}(2v|x|) + \operatorname{ch}(4v|x|)}{(3\operatorname{ch}(v|x|) + \operatorname{ch}(3v|x|))^2} f$$

і областю визначення $D(H_0) = C_0^\infty(E_3)$.

***Теорема* 8.14**. *Оператор* $H(0)$ *при* $v = ip$, $i^2 = -1$, *має осцилюючий потенціал і при цьому амплітуда осциляцій стає необмеженою в точках, де функції* $\cos(p|x|)$ *і* $\cos(3p|x|)$ *одночасно перетворюються в нуль.*

Сформульовані у цьому розділі приклади можна вважати доповненням до монографії Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц [172].

РОЗДІЛ 9

ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕҐА – ДЕ ФРІЗА У ПІВПРОСТОРІ

9.1. Попередні зауваження

У задачі поширення гравітаційних хвиль (на мілкій воді) для рівняння Кортевеґа – де Фріза автори статті [1] запропонували розв'язок початкової задачі Коші відразу на всій осі $-\infty < x < \infty$. Цей розв'язок називають солітоном (soliton). Йдеться про розв'язок

$$u(x,t) = -\frac{2k^2}{\mathrm{ch}^2[k(x-4k^2t)]}$$

рівняння Кортевеґа – де Фріза (КдФ)

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}.$$

Тут солітон $u(x,t)$ рухається зі швидкістю $4k^2$ і має вигляд впадини (знак «–»).

Зауважимо принагідно, що солітон в цьому вигляді є безвідбивним потенціалом одновимірного оператора Шредінґера на всій осі. У праці [1] показано також, що МОЗР застосовний до знаходження загальних безвідбивних розв'язків рівняння Кортевеґа – де Фріза (так званих N-солітонних розв'язків) і обчислення їх асимтотик при $t \to \infty$.

Масштабним перетворенням

$$u \to -\frac{u}{6}$$

отримуємо рівняння КдФ у формі

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

з розв'язком – солітоном (див. [52])

$$u(x,t) = \frac{3a^2}{\mathrm{ch}^2[0.5a(x - a^2 t)]},$$

де $a = 2k$, і солітон є додатною функцією.

Нелінійна хвиля переносу в каналі на мілкій воді описана в праці [ГД 13].

Спостереження за хвилею переносу (відкриття цієї нелінійної хвилі) Дж.С. Рассел зробив на десять років раніше – у серпні 1834 року.

У світовій математичній літературі, присвяченій МОЗР, ця хвиля більше відома за назвою *поодинока хвиля* (*Solitary wave*). Назва *поодинока хвиля* поширена також в літературі з гідродинаміки – див. Дж. Стокер [32]. Автор дотримується термінології, запровадженої в [1].

Ми не наводимо опису хвилі Дж.С. Рассела (цей опис подано в доступних працях [52, 61]), а обмежимося лише формулюванням мети дослідження.

Мета цього Розділу – поширити МОЗР [1] на хвилі, що зароджуються в обмеженій області (наприклад, в околі скінченної точки) і рухаються до $+\infty$ або зароджуються у півпросторі і рухаються до $+\infty$. До таких хвиль належить, зокрема, поодинока хвиля в гідродинаміці, яка виникає в каналі на мілкій воді. Просто кажучи, йдеться про взаємодію нелінійності і дисперсії для нелінійних хвиль, що поширюються у півпросторі. Оскільки ми вводимо параметри в формули Методу, то вживаємо назву параметричний МОЗР (ПМОЗР).

9.2. Формулювання задачі

Ми досліджуємо задачу в просторі дійсних функцій, визначених на півосі $0 \le x < \infty$ і швидкоспадних [2, 4] на нескінченності.

Сформулюємо задачу.

Запишемо загальне рівняння КдФ у термінах пар Лакса:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = i\left[l,\ c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1\right], \qquad (9.1)$$

де $l = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ – формальний одновимірний оператор Шредінґера з дійсним потенціалом $V(x,t)$, $i^2 = -1$, а ієрархія Лакса $\{M_n\}$ має вигляд [7]

$$M_{2j+1} = (iD)^{2j+1} + \sum_{k=1}^{2j-1} \left(a_k (iD)^{2k-1} + (iD)^{2k-1} a_k\right), \qquad (9.2)$$

де параметри $c_0, c_1, ..., c_n$ – дійсні; $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$; a_k – многочлени від дійсної функції $V(x,t)$ і її похідних: $a_k = a_k(V, V', V'', \ldots)$. Многочлени $a_k(V, V', V'', ...)$ мають властивість

$$\left| a_k(V, V', V'', ...) \right| \to 0 \qquad \text{при} \qquad \left| V^{(j)}(x,t) \right| \underset{x\to\infty}{\to} 0$$

для кожного фіксованого t і $0 \le x < \infty$.

Задачу Коші для загального рівняння КдФ (9.1) з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{9.3}$$

будемо розв'язувати параметричним методом оберненої задачі розсіяння (ПМОЗР) у випадку півосі $0 \le x < \infty$ і $t \ge 0$. Нагадаємо, що ПМОЗР полягає в реалізації певного алгоритму, описаного у Вступі.

9.3. Відомості з прямої задачі розсіяння для одновимірного оператора Шредінґера на півосі

Припустимо, що дійсна функція $u(x,0) = u_0(x)$ задовольняє умову

$$\int_0^\infty x \left| u_0(x) \right| dx < \infty . \tag{9.4}$$

Означення 9.1. *Означимо оператор* $L : L_2[0,\infty) \to \to L_2[0,\infty)$. *Оператор* L *породжується диференціальним виразом*

$$l(y)(x) = -y''(x) + u_0(x)y(x), \qquad 0 \le x < \infty ,$$

і областю визначення $D(L)$, *яка є множиною всіх функцій* y, *що мають похідну* y', *абсолютно неперервну в кожному інтервалі* $[0,a]$, $a > 0$, *таких, що* y, $l(y) \in L_2[0,\infty)$ *і*

$$y(0) = 0 . \tag{9.5}$$

Оператор L має неперервний спектр на півосі $0 \le x < \infty$ і не має спектральних особливостей на неперервному спектрі. Оператор L має спектральну міру. Множина власних значень цього оператора скінченна.

Подамо відомі формули теорії одновимірного рівняння Шредінґера на півосі. У припущенні (9.4) *одновимірне рівняння Шредінґера*

$$-y''(x)+u_0(x)y(x)=\lambda^2 y, \qquad 0\le x<\infty, \qquad (9.6)$$

має розв'язок $e(x,\lambda)$, що задовольняє наступну граничну умову на ∞:

$$\lim_{x\to+\infty}\left|e(x,\lambda)-e^{i\lambda x}\right|=0.$$

Розв'язок $e(x,\lambda)$ має зображення через (інтегральні) оператори перетворення (див., наприклад, [3–5]):

$$e(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int_x^\infty \mathcal{K}(x,y)e^{i\lambda y}\,dy,$$

де ядро $\mathcal{K}(x,y)$ є обмеженою і неперервною функцією в області $0\le x\le y<\infty$ і

$$\int_0^\infty\int_x^\infty |\mathcal{K}(x,y)|\,dy\,dx<\infty.$$

У припущенні (9.4) *одновимірне рівняння Шредінґера* (9.6) *має обмежений розв'язок* $v_0(\lambda,x)$ *при* $\lambda^2>0$ *з асимптотикою*

$$v_0(\lambda,x)=e^{-i\lambda x}-s(\lambda)e^{i\lambda x}+o(x) \qquad \text{при} \qquad x\to\infty. \qquad (9.7)$$

Функція $v_0(\lambda,x)$ за умови $\lambda^2>0$ є власною функцією (функціоналом) неперервного спектра оператора L.

Якщо $e(0,\lambda_k)=e(\lambda_k)=0$, то числа $(\lambda_k)^2=-\ell_k^2$ є власними значеннями дискретного спектра оператора L, де $\lambda_k=i\,\ell_k$, а $\ell_k>0$. Кількість власних значень скінченна, $k=1,2,\dots,n$. Розв'язок $v_0(\lambda_k,x)$ крайової задачі (9.6), (9.5) з асимптотикою

$$v_0(\lambda_k,x)=m_k e^{-i\lambda_k x}(1+o(1)) \qquad \text{при} \qquad x\to\infty \qquad (9.8)$$

є власною функцією дискретного спектра, що відповідає власному значенню $(\lambda_k)^2=-\ell_k^2$ оператора L, тобто

$$Lv_0(\lambda_k,x)=\lambda_k^2 v_0(\lambda_k,x), \qquad k=1,2,\dots,n.$$

Властивості операторів перетворення і подальші формули їх використання – див. [3–5].

Означення 9.2. Сукупність величин

$$\{s(\lambda),\ -\infty < \lambda < \infty;\ \lambda_k^2,\ m_k\}, \tag{9.9}$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$, а $\lambda_k = i\,\ell_k$, $\ell_k > 0$, називається *даними розсіяння оператора* L.

Зауважимо, що нормувальні множники m_k визначаються з асимптотики (9.8) для власної функції $v_0(\lambda_k, x)$.

Приклад* 9.1.** Отримаємо приклад на **побудову *даних розсіяння оператора L, виділяючи з доведення Теореми 7.1 дійсний випадок. Для оператора L з Означення 9.1 задамо дійсний потенціал

$$V(x) = -\frac{8K^2}{\mathrm{ch}^2[2K(x - x_0)]}. \tag{A}$$

Цей потенціал є розв'язком наступного стаціонарного рівняння Кортевеґа – де Фріза з параметром

$$V''' - 6VV' - 4cV' = 0, \qquad c = 4K^2.$$

Припустимо, що K і x_0 – **дійсні числа (параметри).** Випадок, коли обидва параметри K і x_0 є дійсними, відноситься до теорії дійсного спектрального потенціалу Барґмана [66].

Оператор L з потенціалом (**A**) задовольняє умови Теореми 7.1 і є скалярним у сенсі Данфорда – Бейда оператором. Зауважимо також, що стаціонарне рівняння Кортевеґа – де Фріза (КдФ) можна зобразити у вигляді

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x),\ c_0 M_2 + c M_1\right] = 0,$$

де $c_0 = 1$. Згідно з Теоремою 7.1 необхідно розв'язати рівняння

$$\lambda^2 + c = 0 \qquad \text{або} \qquad \lambda^2 + 4K^2 = 0.$$

За умови, що $K \neq 0$ – дійсний параметр, корені цього рівняння комплексні. Запишемо формули, що випливають з методу Барґмана:

$$e(x, \lambda) = e^{ix\lambda} + \frac{\lambda + i2K\,\mathrm{th}(2K(x - x_0))}{\lambda + i2K}, \qquad i^2 = -1,$$

і

$$e(\lambda) = e(0,\lambda) = \frac{\lambda - i2K\,\mathrm{th}\,(2Kx_0)}{\lambda + i2K}.$$

Аналогічно до праці [159, с. 456] отримуємо, що в нашому прикладі має місце формула

$$s(x,\lambda^2) = \frac{e(-\lambda)e(x,\lambda) - e(\lambda)e(x,-\lambda)}{2i\lambda}, \qquad |\,\mathrm{Im}\,\lambda\,| < \frac{\varepsilon}{2},\ \varepsilon > 0\,.$$

Зокрема, якщо λ_k^2 – власне значення, то $e(\lambda_k) = 0$ і отримуємо

$$\lambda_k^2 = -\,4K^2\,\mathrm{th}^2(2Kx_0)\,.$$

При цьому для дійсного потенціалу (**A**) виконується $e(-\lambda) = = \overline{e(\lambda)}$. Крім того,

$$s(x,\lambda_k^2) = \frac{e(-\lambda_k)\,e(x,\lambda_k)}{2i\lambda_k}.$$

При $x = 0$ $s(0,\lambda_k^2) = 0$, тому що $e(0,\lambda_k) = e(\lambda_k) = 0$, де $\lambda_k = 2K\,\mathrm{th}(2Kx_0)\,i$. Крім того, ми можемо вказати конкретний вигляд власної функції $s(x,\lambda_k^2)$, що відповідає власному значенню λ_k^2:

$$s(x,\lambda_k^2) = \frac{\lambda_k + 2iK\,\mathrm{th}\,(2Kx_0)}{2i\lambda_k(4K^2 + \lambda_k^2)}\,e^{ix\lambda_k}\left(\lambda_k + 2iK\,\mathrm{th}\,(2K(x - x_0))\right).$$

Враховуючи, що $\lambda_k = 2K\,\mathrm{th}(2Kx_0)\,i$, вираз $s(x,\lambda_k^2)$ зводимо до вигляду

$$s(x,\lambda_k^2) = e^{ix\lambda_k}\,\frac{\mathrm{th}\,(2Kx_0) + \mathrm{th}\,(2K(x - x_0))}{2K(1 - \mathrm{th}^2(2Kx_0))}.$$

Крім того,

$$S(\lambda) = \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)} = \frac{\lambda + 2iK}{\lambda - 2iK}\;\frac{\lambda + 2iK\,\mathrm{th}\,(2Kx_0)}{\lambda - 2iK\,\mathrm{th}\,(2Kx_0)}, \quad \mathrm{Im}\,\lambda = 0\,.$$

Сукупність величин

$$\left\{S(\lambda),\ \ -\infty < \lambda < \infty\,;\ \lambda_k^2,\ m_k\right\},$$

де $\lambda_k^2 = -4K^2\,\mathrm{th}^2(2Kx_0)$ і $k = 1$, є ***даними розсіяння оператора*** L **з**

***потенціалом* (А).** У цьому випадку є лише одне власне значення

$$\lambda_k^2 = \lambda_1^2 = -4K^2 \operatorname{th}^2(2Kx_0),$$

тобто $k = 1$.

9.4. Еволюція даних розсіяння на підставі загального рівняння КдФ (9.1)

Припустимо, що в просторі $L_2[0,\infty)$ задана параметрична сім'я операторів

$$l(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t;c_0,\dots,c_n). \tag{9.10}$$

Область визначення $D(l(t))$ оператора $l(t)$ визначається умовою $y(0) = 0$ і умовою (швидкого в сенсі [4]) прямування до нуля $y(x)$ при $x \to \infty$.

***Теорема* 9.1 (І.-П.П. Сироїд [279]).** *Припустимо, що:*

(***i***) *вектор дійсних параметрів* $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ *в загальному рівнянні КдФ* (9.1) *зафіксовано таким чином, що рівняння*

$$c_0\lambda^{2n} + c_1\lambda^{2(n-1)} + \dots + c_{n-1}\lambda^2 + c_n = 0 \tag{9.11}$$

не має коренів на дійсній осі;

(***ii***) *потенціал* $u(x,t;c_0,\dots,c_n)$ *оператора*

$$l(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t;c_0,\dots,c_n), \quad l(t) : L_2[0,\infty) \to L_2[0,\infty),$$

є (*майже скрізь*) *розв'язком стаціонарного диференціального рівняння КдФ* (9.1).

Тоді:

1°) *всі власні значення оператора* $l(t)$ (9.10) *в просторі* $L_2[0,\infty)$ *від* t *не залежать і є інтегралами загального рівняння КдФ* (9.1), *при цьому оператори* $l(t)$ *і* L *подібні* (*має місце ізоспектральність*);

2°) *існують числа* z_1, z_2, z_3 *такі, що дані розсіяння оператора* $l(t)$ *мають вигляд*

$$\left\{s(\lambda,t,c),\ -\infty < \lambda < \infty;\ \lambda_k^2,\ m_k(t,c)\right\},$$

де $k = 1,2,\dots,n$*;* $c = (c_0, c_1, ..., c_n)$*;* $m_k(t,c)$ *– нормувальний множник власної функції, що відповідає власному значенню* λ_k^2 *оператора* $l(t)$;

$$s(\lambda,t,c) = s(\lambda,0)\exp\left(-\frac{1}{z_2 - z_3}\left[z_1 + z_3\left(\lambda\sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda^{2n}\right)\right]t\right),$$

де $s(\lambda,0) = s(\lambda)$ *– див.* (9.7), (9.9), *числа* z_1, z_2, z_3 *можуть, загалом кажучи, залежати від параметра* λ;

3°) *нормувальні множники еволюціонують за формулою*

$$m_k(t,c) = m_k(0)\exp\left[\left(2\lambda_k \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_k^{2l}\right)t\right], \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Д о в е д е н н я Теореми 9.1 автор проводить за аналогією з Розділом 4.

Дані розсіяння, описані в Теоремі 9.1, слід обмежити за допомогою параметрів z_1, z_2, z_3 так, щоб при розв'язанні оберненої задачі розсіяння на кроці **III**) шуканий розв'язок $u(x,t)$ задачі Коші (1), (3) задовольнив умову

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^\infty x\left|u_x^{(j)}(x,t)\right|dx < \infty, \quad j = 0,1,\dots,2m+1, \tag{9.12}$$

для всіх скінченних $T \ge 0$.

Необхідні та достатні умови розв'язності оберненої задачі розсіяння встановлено в працях [3, 4].

***Теорема* 9.2 (В.О. Марченко [4, с. 218]).** *Дані розсіяння*

$$\left\{s(\lambda),\ -\infty < \lambda < \infty;\ \lambda_k^2,\ m_k\right\},$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda_k = i\,\ell_k$, $\ell_k > 0$, *задовольняють такі умови*:

I) *функція* $s(\lambda)$ *неперервна на всій осі і*

$$s(\lambda) = \overline{s(-\lambda)} = \left[s(-\lambda)\right]^{-1}.$$

Функція $1 - s(\lambda)$ *є перетворенням Фур'є функції*

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (1 - s(\lambda))\, e^{i\lambda x} d\lambda,$$

причому функція $1 - s(\lambda)$ *прямує до нуля, коли* $|\lambda| \to \infty$. *Функція* $F_s(x)$ *має зображення у вигляді суми двох функцій, одна з яких належить до простору* $L_1(-\infty, \infty)$, *а друга обмежена і належить до простору* $L_2(-\infty, \infty)$. *Функція* $F_s(x)$ *на додатній півосі має похідну* $F_s'(x)$, *яка задовольняє умову*

$$\int_0^{\infty} x\,|F_s'(x)|\,dx < \infty;$$

II) *має місце формула для зміни аргументу функції* $s(\lambda)$

$$n = \frac{\ln s(+0) - \ln s(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - s(0)}{4},$$

де n *– кількість* (*від'ємних*) *власних значень крайової задачі*

$$-y'' + V(x)y = \lambda^2 y,$$

$$y(0) = 0.$$

Умови *I* і *II* є необхідними та достатніми для даних розсіяння цієї крайової задачі з потенціалом $V(x)$, що задовольняє умову

$$\int_0^{\infty} x\,|V(x)|\,dx < \infty.$$

Запровадимо у формули параметри:

$$F_s(x,t,c) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1 - s(\lambda,t,c))e^{i\lambda x}\,d\lambda\,, \tag{9.13}$$

$$F(x,t,c) = F_s(x,t,c) + \sum_{k}^{n} m_k(t,c)^2 e^{-\lambda_k x}\,, \tag{9.14}$$

і запишемо основне рівняння В.О. Марченка

$$F(x+y,t,c) + \mathcal{K}(x,y,t) + \int\limits_{x}^{\infty}\mathcal{K}(x,\xi,t)\;F(\xi+y,t,c)\,d\xi = 0\,,$$

$$0 < x \le y\,. \tag{9.15}$$

Теорема* 9.3 (В.О. Марченко [4]).** *Якщо функція* $s(\lambda)$ *задовольняє умову* (i***) *з Теореми* 9.1, *то при всіх* $a > 0$ *функції*

$$s(\lambda) = s(\lambda)\frac{\lambda + ia}{\lambda - ia}$$

також задовольняють цю умову.

***Теорема* 9.4 (І.-П.П. Сироїд [279]).** *Припустимо, що:*

(***i***) *початкова функція* $u(x,0) = u_0(x)$ *задачі Коші* (9.1), (9.3) *задовольняє умову*

$$\int\limits_{0}^{\infty} x\left|\,u_0^j(x)\,\right|dx < \infty\,, \qquad j = 0,1,\dots,2m+1, \tag{9.16}$$

де $2m+1$ *– порядок загального рівняння* КдФ (9.1), *а функція* $s(\lambda,0)$, *що відповідає оператору* L *з потенціалом* $u(x,0) = \; = u_0(x)$, *задовольняє умови* (***i***), (***ii***) *з Теореми* 9.1;

(***ii***) *вектор параметрів* $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ *з рівняння* (9.1) *задовольняє умову* (8.13) (*див. Теорему* 8.1).

Тоді:

1°) *існують дійсні числа* h *і* a *такі, що функція* $s(\lambda,t,c)$ *еволюціонує за змінною* t *таким чином:*

$$s(\lambda,t,c) = s(\lambda,0)\exp\left[ih\lambda\left(1 + a\sum_{l=0}^{n}c_{n-l}\lambda^{2l}\right)t\right];$$

2°) *потенціал* $u(x,t;c_0,\dots,c_n)$ *оператора*

$$l(t,c) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t;c_0,\ldots,c_n),$$

відновлений за даними розсіяння

$$\{s(\lambda,t,c),\ -\infty < \lambda < \infty;\ \lambda_k^2,\ m_k(t,c)\},\quad k = 1,2,\ldots,n, \quad (9.17)$$

є розв'язком задачі Коші (1), (3) *у просторі функцій, що задовольняють* (9.12) *для всіх скінченних* $T \geq 0$.

9.5. Алгоритм розв'язання оберненої задачі розсіяння

За даними розсіяння (9.17), що задовольняють умови Теореми 9.4, будуємо функції $F_s(x,t,c)$ і $F(x,t,c)$ – див. (9.13), (9.14). Підставляємо функцію $F(x,t,c)$ в рівняння В.О. Марченка (9.15) і застосовуємо для розв'язання цього рівняння формули оберненої задачі розсіяння – див. [3, 4].

Ідучи за В.О. Марченком [4, с. 203], означимо оператор

$$F_a^+ f = \int_0^\infty F(x+y+2a)f(x)\,dx.$$

Припустимо, що виконується умова **I** з Теореми 9.2. Тоді основне рівняння (9.15) має при кожному $x > 0$ єдиний розв'язок $\mathcal{K}(x,y) \in L_1[x,\infty)$, і функція

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \mathcal{K}(x,y)e^{i\lambda y}\,dy, \qquad \operatorname{Im}\lambda \geq 0,$$

задовольняє рівняння

$$-y'' + V(x)y = \lambda^2 y, \qquad 0 < x < \infty,$$

де $V(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x)$ і для всіх $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty x|V(x)|dx < \infty.$$

Крім того, якщо оператор $1 + F_a^+$ є оборотним при $a = 0$, то

$$\int_0^\infty x|V(x)|dx < \infty.$$

(див. [4, с. 208]).

***Теорема* 9.5 (Про продовження, [279]).** *Припустимо, що:*

(***i***) *початкова функція* $u_0(x)$ *задачі Коші* (9.1), (9.3) *допускає гладке продовження* $\hat{u}_0(x)$ *на всю вісь* $-\infty < x < \infty$ *таке, що виконується умова*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\left|\hat{u}^{(k)}(x)\right|dx < \infty\,, \quad k = 0,1,\ldots,2m+1\,, \tag{9.18}$$

де $2m+1$ *– порядок загального рівняння КдФ* (9.1);

(***ii***) *продовження* $\hat{u}_0(x)$ *є безвідбивним потенціалом для одновимірного самоспряженого оператора Шредінґера*

$$\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + \hat{u}_0(x)\,, \qquad \hat{L} : L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)\,.$$

Тоді для знаходження розв'язків загального рівняння КдФ можна застосувати наступний аналог формул Кея – Мозеса:

$$\hat{u}(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Delta(x,t)\,, \tag{9.19}$$

де

$$\Delta(x,t) = \mathrm{Det}\left\{\delta_{kl} + \frac{m_k^2(0)}{\lambda_k + \lambda_l}\exp\left[-(\lambda_k + \lambda_l)x + 2\lambda_k \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_k^{2l}t\right]\right\},$$

$\lambda_k^2 = -h$, $h > 0$, – k*-те власне значення оператора* $\hat{L}$: $L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$, *а* $m_k^2(0)$ *– нормувальний множник відповідної власної функції оператора* $\hat{L}$.

Розв'язок (9.19) завжди можна звузити (локалізувати) з усієї осі на піввісь за змінною x. При цьому враховуємо таку теорему.

***Теорема* 9.6 (І.-П.П. Сироїд).** *Припустимо, що*:

(***i***) *для вектора параметрів* $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння* (9.1) *існує число* $a > 0$ *таке, що для множини* AL *коренів рівняння* (9.11) *справджується умова* $\mathrm{dist}(AL, \mathbb{R}) = a > 0$;

(***ii***) *відповідний вектору* $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, *стаціонарний розв'язок* $V(x)$ *рівняння* (9.1) *має продовження на всю вісь* $-\infty < x < \infty$ *до безвідбивного потенціалу оператора Шредінґера в просторі* $L_2(-\infty,\infty)$.

Тоді з того, що відповідний вектору $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, *розв'язок* $V(x)$ *рівняння* (9.1) *задовольняє умову*

$$\int_0^\infty (1+x)\left|V^{(k)}(x)\right|dx < \infty, \qquad k = 0,1,\ldots,2m+1,$$

де $2m+1$ *– порядок рівняння КдФ* (9.1), *випливає, що* $V(x)$ *належить до простору*

$$G_\varepsilon = \left\{ g(x) : \exists\varepsilon > 0, \quad \int_{(0,\infty)} e^{\varepsilon x}\,|\,g(x)\,|\,dx < \infty \right\}. \tag{9.20}$$

Д о в е д е н н я. Якщо виконуються умови Теореми 9.6, то відповідний вектору $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $c_n \neq 0$, стаціонарний розв'язок $V(x)$ рівняння (9.1) можна продовжити на всю вісь до безвідбивного потенціалу одновимірного оператора Шредінґера L у просторі $L_2(-\infty,\infty)$. Твердження Теореми 9.6 випливає з безвідбивної властивості потенціалу $V(x)$ згідно з лемою автора [240].

Зауважимо, що при застосуванні Теореми 9.5 (про продовження) слід врахувати, що солітони моделі КдФ, початково отримані у всьому просторі, можна зсувати за фазою аргументу і масштабувати за допомогою параметрів $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$. Тобто параметричний підхід до МОЗР в поєднанні з Теоремою 9.5 дає змогу локалізувати (зосередити) взаємодію нелінійності і дисперсії (що відповідає солітону) у півпросторі.

Висновок. *Припустимо, що виконуються умови Теореми* 9.5. *Тоді розв'язок задачі Коші* (9.1), (9.3) *задовольняє умову*

$$\max_{0\le t\le T} \int_0^\infty e^{\varepsilon x}\left|\,u_x^{(j)}(x,t)\right|dx < \infty, \quad j = 0,1,\ldots,2m+1,$$

для всіх скінченних $T \ge 0$.

Д о в е д е н н я висновку випливає з Теорем 9.4–9.6.

9.6. Опис простору початкових функцій для задачі Коші (9.1), (9.3)

Запишемо рівняння комутування пари Лакса для моделі Кортевеґа – де Фріза (стаціонарне рівняння КдФ) на півосі $[0,\infty)$:

$$[l,\; c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1] = 0, \tag{9.21}$$

де диференціальні вирази

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad \text{і} \quad M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1$$

утворюють пари Лакса [7] щодо дужки $[T, S] = TS - ST$; $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – дійсні параметри; функція $V(x)$ дійсна. Оператори M_{2j+1} можна зобразити у вигляді

$$M_{2j+1} = i^{\,2j+1} \frac{d^{2j+1}}{dx^{2j+1}} + \sum_{k=0}^{2j-1} P_k(V, V', \ldots) \frac{d^k}{dx^k}, \tag{9.22}$$

де $i^2 = -1$, а $P_k(V, V', ...)$ – поліноми від функції $V(x)$ і її похідних.

Позначимо через $\hat{S}$ многовид розв'язків рівняння КдФ (9.21) (далі $\hat{S}$***-многовид***), що належать до простору X:

$$X = \left\{ f(x) : \int_0^{\infty} (1 + x^2) \left| f^{(\nu)}(x) \right| dx < \infty, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n \right\}, \tag{9.23}$$

де $2n + 1$ – порядок рівняння (9.21).

Означення 9.3. Означимо простір S^l *формальних операторів Шредінґера* l *над* $\hat{S}$*-многовидом*:

$$S^l = \left\{ l : L_2(0, \infty) \to L_2(0, \infty);\ l = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x),\ V(x) \in S \right\}. \tag{9.24}$$

Означення 9.4. Означимо простір S^L *операторів Шредінґера* L *над* $\hat{S}$*-многовидом***.** До простору S^L за означенням належать оператори Шредінґера L, що задовольняють наступне означення. А саме: одновимірний оператор Шредінґера L породжується в просторі $L_2[0, \infty)$ диференціальним виразом

$$l(y)(x) = -y''(x) + V(x)y(x)$$

і областю визначення $D(L)$ – множиною всіх функцій y, що мають похідну y', абсолютно неперервну в кожному інтервалі $[0, a]$, $a > 0$, таких, що

$$y,\ l(y) \in L_2[0, \infty) \quad \text{і} \quad y(0) = 0\,.$$

***Теорема* 9.7 (І.-П.П. Сироїд [286]).** *Припустимо, що вектор дійсних параметрів* $(c_0, c_1, ..., c_n)$, $c_n \neq 0$, *з рівняння КдФ* (9.21) *зміню-*

ється таким чином, що для кожного вектора $(c_0, c_1, ..., c_n)$ *існує число* $a > 0$, *таке, що умова* $\mathrm{dist}(AL, \mathbb{R}) = a > 0$ *виконується для многовиду* AL *коренів рівняння* (9.11).

Тоді основна задача спектрального аналізу над $\hat{S}$*-многовидом є розв'язною, тобто відповідний простір* S^L *операторів Шредінґера* L *над* $\hat{S}$*-многовидом можна реалізувати як* ***простір самоспряжених операторів Шредінґера*** *і для кожного* $L \in S^L$ *відповідна спектральна міра* $P(\Delta)$ *існує і є самоспряженою.*

Щоб описати область визначення $D(L)$ оператора $L \in S^L$, зафіксуємо відповідний до оператора L вектор параметрів $(c_0, c_1, ..., c_n)$ так, щоб виконувалася умова $\mathrm{dist}(AL, \mathbb{R}) = a > 0$. Тоді область $D(L)$ задаємо згідно з означенням 9.4. Потенціал $V(x)$ належить до $\hat{S}$*-многовиду*. При $f \in D(L)$ ми визначаємо $Lf = lf$. Так визначений самоспряжений в $L_2[0, \infty)$ оператор L є замиканням оператора L', заданого формулою $L'f = lf$ на нескінченно диференційовних функціях, що перетворюються в нуль в околі точок $x = 0$ і $x = \infty$, тобто на $C_0^\infty(0, \infty)$.

Приєднаємо до простору S^L оператор M:

$$M = c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1$$

з областю визначення $D(M) = C_0^\infty(0, \infty)$. Оператор M з крайовою умовою $y(0) = 0$ є симетричним в просторі $L_2[0, \infty)$.

Досліджуємо пару Лакса $L^1 f = -f'' + Vf$ і M, *задану на просторі* $C_0^\infty(0, \infty)$. Тому що виконується крайова умова $f(0) = \; = 0$, оператори L^1 і M є симетричними в просторі $L_2[0, \infty)$.

Теорема* 9.8 [286]**. *Зафіксуємо число* $c_0 \neq 0$. *Тоді існують вектор* $(c_0, c_1, ..., c_n)$ і *відповідне цьому вектору число* $a > 0$ *такі, що з умови* $\mathrm{dist}(AL, \mathbb{R}) = a > 0$ *для рівняння КдФ* (9.21) *і побудови операторів* L^1 і M *випливає, що* ***спектральні міри самоспряжених замикань L^1 *і* $\tilde{M}$ *симетричних операторів* L^1 і M ***комутують*** *у просторі* $L_2[0, \infty)$.

На підставі комутування спектральних мір $\Delta \to P_L(\Delta)$ і $\Delta \to P_{\tilde{M}}(\Delta)$ відповідно до операторів L і $\tilde{M}$ має місце наступна спектральна теорема.

***Теорема* 9.9 (Спектральна теорема над $\hat{S}$-многовидом, [286]).** *Припустимо, що виконуються умови Теореми* 9.8**.** *Тоді для самоспряженої за побудовою пари Лакса* L *і* $\tilde{\mathrm{M}}$ *існує невід'ємна міра* m *і унітарне відображення* U з $\mathrm{L}_2[0,\infty)$ *у прямий інтеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \oplus H(\lambda)\, dm(\lambda)$$

гільбертових просторів $H(\lambda)$ *такі, що відображення* U *здійснює спільну діагоналізацію самоспряжених операторів* L *і* $\tilde{\mathrm{M}}$.

РОЗДІЛ 10

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАД ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ МНОГОВИДАМИ

10.1. Вступ

У попередніх розділах ми запровадили математичне поняття Шредінґер-аналізу над солітонними многовидами Кортевеґа – де Фріза на всій осі і на півосі. Це поняття виявилось дуже плідним у розв’язанні задач для обґрунтування МОЗР. Виникає таке питання: якщо продовжити математичну концепцію Шредінґер-аналізу до задач квантової механіки, то чи ця математична модель буде погоджуватися з математичним формулюванням постулатів квантової механіки? Ми пропонуємо позитивну відповідь на це питання в операторному підході до квантової механіки.

Спектральний аналіз над функціональними просторами та многовидами (СпАФП і СпАФМ) можна формулювати над дуже загальними одновимірними та багатовимірними (за кількістю незалежних змінних) функціональними многовидами. Проте в цьому розділі ми обмежимось лише однією моделлю СпАФП: Шредінґер-аналізом над функціональними просторами та многовидами.

10.2. Шредінґер-аналіз над функціональними многовидами КдФ

Відновимо у розширеному вигляді основні поняття Шредінґер-аналізу над функціональними швидкоспадними на $\pm\infty$ многовидами, які запропоновано в Розділі 3.

Сформулюємо поняття Шредінґер-аналізу над функціональними многовидами. Обмежимося спочатку одновимірними моделями.

Означення 10.1. Означимо простори M і G_{z_d} комплексно-значних функцій:

$$M = \left\{ u(x) : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2) |\, u(x) \,| dx < \infty \right\}, \tag{10.1}$$

$$G_{z_d} = \left\{ u(x) : \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\varepsilon_d |x|) |u(x)| dx < \infty, \right.$$

$$\left. \varepsilon_d > 0 \quad \text{фікс.} \right\}. \qquad (10.2)$$

Означення 10.2. *Простір* (*многовид*) M^l *формальних операторів Шредінґера над* M (простір диференціальних виразів Шредінґера над M):

$$M^l \overset{\text{def}}{=} \left\{ l = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) : v \in M \right\}.$$

При цьому, якщо $l \in M^l$, то говоримо, що задано оператор l над M у точці v простору (многовиду) M.

Означення 10.3 (*Простір* (*многовид*) M^L *операторів Шредінґера* L *над* M). Припустимо, що $v \in M$. Оператор L задамо в просторі $L_2(-\infty, \infty)$ диференціальним виразом (формальним оператором l)

$$l(y)(x) = -y''(x) + v(x)y(x)$$

і областю визначення

$$D(L) = \{ y \in L_2(-\infty, \infty); \quad y' \text{ існує, абсолютно неперервна на всякому скінченному проміжку і } l(y) \in L_2(-\infty, \infty) \}.$$

Назвемо оператор L *оператором Шредінґера* L *над функцією* $v \in M$. Множину всіх операторів

$$L : L_2(-\infty, \infty) \to L_2(-\infty, \infty)$$

над M назвемо простором M^L операторів Шредінґера над M.

Шредінґер-аналіз можна формулювати над доволі загальними одновимірними і багатовимірними (за кількістю незалежних змінних) функціональними просторами і многовидами. У цьому підрозділі обмежимось Шредінґер-аналізом, що стосується просторів M^l та M^L.

Шредінґер-аналіз над простором M *полягає* у дослідженні просторів M^l та M^L над M і з'ясуванні обмежень на підмноговиди $\mathfrak{M}$ простору M, при яких простір $\mathfrak{M}^L$ над $\mathfrak{M}$ є простором спектральних у сенсі Данфорда – Бейда операторів Шредінґера L або

$\mathfrak{M}^L$ є простором спектральних у сенсі В.Е. Лянце операторів у просторі $L_2(-\infty,\infty)$.

Щоб зрозуміти задачі, що виникають у Шредінґер-аналізі над M, пояснимо, що з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)|u(x)|dx<\infty$$

при комплекснозначному потенціалі $v(x)$ не випливає спектральність у сенсі Данфорда і навіть спектральність у сенсі Лянце операторів $L \in M^L$. Це випливає з досліджень Б.С. Павлова (акуратні пояснення див. Розділ 3). Проте побудова підпросторів $\mathfrak{M} \subset M$, над якими простір $\mathfrak{M}^L$ має зазначені спектральні властивості, є задачею прийнятною.

***Теорема* 10.1 [274, 280]**. *Над підмноговидом G_{z_d} простору M при фіксованому $\varepsilon_d > 0$ задамо простір $G_{z_d}^L$ операторів Шредінгера і нехай $L \in G_{z_d}$. Тоді оператор*

$$L: L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$$

є спектральним у сенсі Лянце [158–160] *оператором і елементами відповідного простору спектральних мір є узагальнені спектральні міри в сенсі* [158].

Сформулюємо основну задачу Шредінґер-аналізу. Основна *задача Шредінгер-аналізу* над функціональним простором M *полягає* у знаходженні підпросторів $\mathfrak{M} \subset M$ таких, що над $\mathfrak{M}$ існує простір $\mathfrak{M}^L$ операторів Шредінґера, спектральних у сенсі Данфорда, і відповідний простір обмежених за нормою спектральних мір. При цьому до основної задачі відноситься також знаходження умов комутування у певному розширенні простору $\mathfrak{M}^L$, яке ми позначимо через $\{\mathfrak{M}^L,[\cdot,\cdot]\}$. Це розширення простору $\mathfrak{M}^L$ реалізуємо таким чином. До простору $\mathfrak{M}^L$ приєднуємо оператори-комутанти: B – комутант оператора $L \in \mathfrak{M}^L$, якщо $LB = BL$.

Узагальнена основна задача Шредінґер-аналізу над функціональним простором M полягає у *знаходженні* підмноговидів $N \subset M$ таких, що над N існує простір узагальнених спектральних мір у сенсі Лянце [158], і *дослідженні* комутаційних властивостей операторів у певному розширенні простору N^L. Розширення $\{N^L, [\cdot,\cdot]\}$ простору N^L операторів, спектральних у сенсі Лянце, будується шляхом приєднання комутантів у сенсі комутування відповідних спектральних мір.

Теорема 10.1 розв'язує узагальнену основну задачу Шредінґер-аналізу над $G_{z_d} \subset M$ щодо існування над G_{z_d} простору узагальнених спектральних мір (у сенсі В.Е. Лянце) і відповідного простору $G^L_{z_d}$ операторів L, спектральних у сенсі В.Е. Лянце.

10.3. Шредінґер-аналіз над простором потенціалів Сірса

Означення 10.4 (Простір потенціалів Сірса). Нехай $Q(x)$ – додатна парна, неспадна при $x \geq 0$, неперервна на всій осі функція, що задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}} = \infty .$$

Дійсна вимірна та локально обмежена функція $v(x)$ належить до простору потенціалів Сірса, якщо

$$v(x) \geq -Q(x), \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Простір потенціалів Сірса позначимо через S.

***Теорема* 10.2 [108].** *Нехай $v \in S$. Оператор H_0 породжується у просторі $L_2(-\infty,\infty)$ диференціальним виразом*

$$h_0(y)(x) = -y''(x) + v(x)y(x), \qquad v \in S, \tag{10.3}$$

та областю визначення $D(H_0) = C_0^{\infty}(\mathbb{R})$. Тоді оператор H_0 є істотно самоспряженим, тобто самоспряженим є його замикання H_0^{**}.

Д о в е д е н н я Теореми 10.2 можна знайти у доступній праці [Ф 56].

Дослідимо лише такі потенціали Сірса, які є стаціонарними проекціями солітонних розв'язків загального рівняння Кортевеґа – де Фріза (КдФ).

Означення 10.5. Припустимо, що

$$[\hat{l},\ \mu_0 B_{2n+1} + \mu_1 B_{2n-1} + \ldots + \mu_n B_1] = 0 \qquad (10.4)$$

– зображення Лакса [7] стаціонарного загального рівняння КдФ. Тут $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ – дійсні параметри; $\hat{l} = -\dfrac{d^2}{dx^2} + v(x)$ – формальний одновимірний оператор Шредінґера на всій осі; $\{B_{2q+1}\}$ – ієрархія Лакса кососиметричних формальних операторів (диференціальних виразів)

$$B_{2q+1} = (-1)^q \left(\frac{d}{dx}\right)^{2q+1} \sum_{j=1}^{q} \left\{ a_j \left(\frac{d}{dx}\right)^{2j-1} + \left(\frac{d}{dx}\right)^{2j-1} a_j \right\}.$$

Вирази $\{B_{2q+1}\}$ називаються комутантами рівняння (10.4).

Означення 10.6. Означимо простір

$$X_s = \left\{ f(x) : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2) \left| f^{(j)}(x) \right| dx < \infty \right\}, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

де m – порядок рівняння КдФ (10.4) (припускаємо існування похідних $f^{(j)}(x)$). Означимо солітонний многовид S_μ як многовид розв'язків рівняння КдФ (10.4), що належать до X_s.

Щоб зробити коректним Означення 10.6, сформулюємо умову на вектор параметрів $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, при яких має місце включення $S_\mu \in X_s$. Скрізь надалі припускатимемо, що вектор дійсних параметрів $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ є таким, що функція (коли λ задано на комплексній площині)

$$(\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) \to \mu_0 \lambda^{2n} + \mu_1 \lambda^{2(n-1)} + \ldots + \mu_{n-1} \lambda^2 + \mu_n$$

не має нулів за змінною λ на дійсній осі. Означимо алгебричний многовид Al_μ як множину коренів рівняння

$$\mu_0 \lambda^{2n} + \mu_1 \lambda^{2(n-1)} + \ldots + \mu_{n-1} \lambda^2 + \mu_n = 0, \qquad \mu_n \neq 0.$$

Означимо простір

$$G_\varepsilon = \left\{ f \in X_s : \exists \varepsilon > 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\varepsilon |x|) |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

***Теорема* 10.3 (І.-П.П. Сироїд [274, 280])**. *Припустимо, що вектор параметрів* $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ *у рівнянні КдФ* (10.4) *змінюється так, що для кожного вектора* $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ *існує число* $d > 0$ *таке, що виконується умова*

$$\operatorname{dist}(Al_\mu, \mathbb{R}) = d > 0.$$

Тоді, якщо $v \in S_\mu$, *то* $v \in G_\varepsilon$.

Теорема 10.3 доводиться методом, запропонованим у Розділі 3.

Задамо над солітонним многовидом S_μ простори S_μ^l та S_μ^L операторів Шредінґера. При цьому оператор $L \in S_\mu^L$ визначимо як самоспряжене замикання відповідного симетричного оператора l з потенціалом $v \in S_\mu \subset S$ (таке замикання виконуємо за Теоремою 10.2). Включення $S_\mu \subset S$ випливає з Теореми 10.3 і того факту, що функції з S_μ є безвідбивними гладкими на всій осі потенціалами [66].

***Теорема* 10.4 (І.-П.П. Сироїд [280]).** *Солітонний* (*стаціонарний*) *многовид* S_μ *розв'язків рівняння КдФ* (10.4) *належить до простору Сірса* S. *Основна задача Шредінґер-аналізу над* S_μ *є розв'язною. При цьому простір* S_μ^l *симетричних в* $L_2(-\infty, \infty)$ *операторів* l (*заданих на* $C_0^\infty(-\infty, \infty)$ *допускає замикання у вигляді простору самоспряжених операторів Шредінґера* S_μ^L *у гільбертовому просторі* $L_2(-\infty, \infty)$ *над* S_μ. *Процедуру замикання здійснюємо так: кожний оператор* $L \in S_\mu^L$ *отримуємо як самоспряжене замикання відповідного симетричного оператора* $l \in S_\mu^l$.

Приєднаємо до простору S_μ^l кососиметричні комутанти B_{2q+1} загального рівняння КдФ (10.4) з ієрархії диференціальних виразів Лакса [7] (див. Означення 10.5). Позначимо отриманий простір через $\{S_\mu^l, [\cdot,\cdot]\}$ і зауважимо, що з кососиметричної властивості виразів B_{2q+1}: $B_{2q+1}^* = -B_{2q+1}$ випливає кососиметричність диференціального виразу

$$B = \mu_0 B_{2n+1} + \mu_1 B_{2n-1} + \ldots + \mu_n B_1$$

при дійсних $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$. Опишемо приєднання до простору S_μ^L самоспряжених замикань $i\tilde{B}$ симетричних операторів iB, заданих на просторі $C_0^\infty(\mathbb{R})$ при дійсних параметрах $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$. Диференціальні вирази

$$iB = \mu_0 iB_{2n+1} + \mu_1 iB_{2n-1} + \ldots + \mu_n iB_1, \qquad l = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$$

при $v \in S_\mu$ породжують симетричні оператори, задані на $C_0^\infty(-\infty, \infty)$, з властивістю комутування $l(iB) = (iB)l$ на $C_0^\infty(-\infty, \infty)$. Пояснимо при цьому: на підставі того, що порядок загального рівняння КдФ може бути як завгодно великим і функції $v \in S_\mu$ є проекціями N-солітонних розв'язків КдФ або звичайних солітонів, функції $v \in S_\mu$ є нескінченно диференційовними.

Позначимо $D = C_0^\infty(\mathbb{R})$. Область значень

$$R(l \mid ((iB - iI)D) - iI)$$

оператора $l \mid ((iB - iI)D) - iI)$ щільна в $L_2(\mathbb{R})$, а оператор $l \mid ((iB - iI)D) - iI)$ є істотно самоспряженим. Застосуємо до симетричних операторів l та iB теорему 1.15 з [Ф 9, с. 413]. З цієї теореми випливає, що замикання $L = \tilde{l}$ та $i\tilde{B}$ самоспряжені і комутують у сенсі комутування відповідних спектральних мір (розвинень одиниці). Описаною побудовою приєднання отримуємо простір $\{S_\mu^l, [\cdot,\cdot]\}$. Висновком із цієї побудови є наступна Теорема 10.5.

***Теорема* 10.5 (І.-П.П. Сироїд [274, 280]).** *Нехай*:

(***i***) *симетричні оператори*

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x), \qquad iB = \mu_0 iB_{2n+1} + \mu_1 iB_{2n-1} + \ldots + \mu_n iB_1$$

у просторі $L_2(\mathbb{R})$ *мають спільну область визначення* $C_0^\infty(\mathbb{R})$;

(***ii***) *для кожного фіксованого вибору вектора дійсних параметрів* $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ *з рівняння КдФ* (10.4) *існує* $d > 0$ *таке, що*

$$\operatorname{dist}(Al_\mu, \mathbb{R}) = d > 0.$$

Тоді замикання $L = \tilde{l}$ *та* $i\tilde{B}$ *операторів* l *та* iB *самоспряжені та комутують у сенсі комутування відповідних спектральних мір* (*розвинень одиниці*).

Позначимо через E_{λ_0} проектор з розвинення одиниці оператора $L = \tilde{l}$ і через E_{λ_0} – проектор з розвинення одиниці оператора $i\tilde{B}$. З Теореми 10.5 випливає, що в стані φ їх спільна функція розподілу $P_\varphi(\lambda_0, \lambda_1)$ має вигляд

$$P_\varphi(\lambda_0, \lambda_1) = \left\| E_{\lambda_0} E_{\lambda_1} \varphi \right\|^2 = \left\| E_{\lambda_1} E_{\lambda_0} \varphi \right\|^2, \qquad \| \varphi \| = 1,$$

$$E(\lambda) = E_{\lambda_0} \times E_{\lambda_1}(\lambda).$$

Щоб записати формули спільного спектрального зображення, запровадимо нові позначення: $T_0 = L = \tilde{l}$, $T_1 = iB$, $E(\lambda) = E_{\lambda_0} \times E_{\lambda_1}(\lambda)$ – спільна спектральна міра операторів T_0 і T_1.

***Теорема* 10.6 (І.-П.П. Сироїд [274, 280])**. *Нехай виконуються умови Теореми* 10.5. *Тоді мають місце спільні спектральні зображення самоспряжених операторів* T_0 *і* T_1:

$$T_i = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \lambda_i \, dE(\lambda), \qquad i = 0, 1,$$

$$D(T_i) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |\lambda_i|^2 \, d(E(\lambda)f, f)_{L_2(\mathbb{R})} < \infty \right\}, \; i = 0, 1,$$

тут $\lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *а* $\lambda_i \in \mathbb{R})$.

Зауваження. З Теореми 10.5 випливає, що самоспряженим операторам L та $i\tilde{B}$ можна надати сенс спостережуваних у гільбертовому просторі станів $L_2(\mathbb{R})$. Умова комутативності спостережуваних L та $i\tilde{B}$ реалізується над стаціонарним солітонним многовидом S_μ. Фізичні тлумачення комутативності полягають у можливості одночасно виміряти спостережувані L та $i\tilde{B}$ над стаціонарним солітонним многовидом S_μ. При цьому S_μ належить до простору потенціалів Сірса.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Phys. Rev. Letters. – 1967. – **19**, No. 19. – P. 1095–1097.
2. *Теория* солитонов: Метод обратной задачи / Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., под ред. С.П. Новикова. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. *Агранович З.С., Марченко В.А.* Обратная задача теории рассеяния. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1960. – 268 с.
4. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
5. *Левин Б.Я.* Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. – 1956. – **106**, № 2. – С. 187–190.
6. *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. – 1970. – **192**, № 4. – С. 753–756.
7. *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**, No. 2. – P. 467–490.
8. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерная автомодуляция волн в нелинейных средах // Журн. экспер. и теорет. физики. – 1971. – **61**, № 1. – С. 118–134.
9. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // Журн. экспер. и теорет. физики. – 1973. – **64**, № 5. – С. 1627–1639.
10. *Новиков С.П.* Периодическая задача Кортевега – де Фриза. 1 // Функц. анализ и его прилож. – 1974. – **8**, № 3. – С. 54–66.
11. *Марченко В.А.* Периодическая задача Кортевега – де Фриза // Докл. АН СССР. – 1974. – **217**, № 2. – С. 276–279.
12. *Марченко В.А.* Периодическая задача Кортевега – де Фриза // Мат. сб. – 1974. – **95**, № 3. – С. 351–356.
13. *Lax P.D.* Periodic solutions of the Korteweg – de Vries equation // Lect. Appl. Math. – 1974. – **15**. – P. 85–96.

14. *Хруслов Е.Я.* Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Мат. сб. – 1976. – **99**(141). – С. 261–281.
15. *Захаров В.Е.* Метод обратной задачи рассеяния // В кн.: Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. – М.: Наука, 1975. – С. 226–273.
16. *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.* Уравнение Кортевега – де Фриза – вполне интегрируемая гамильтонова система // Функц. анализ и его прилож. – 1971. – **5**, № 4. – С. 18–27.
17. *Боголюбов Н.Н. (мл.), Курбатов А.М., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Нелинейная модель типа Шредингера. Законы сохранения, гамильтоновы структуры и полная интегрируемость // Теорет. и мат. физика. – 1985. – **65**, № 2. – С. 271–284.
18. *Марченко В.А.* Нелинейные уравнения и операторные алгебры. – Киев: Наук. думка, 1986. – 153 с.
19. *Нижник Л.П.* Интегрирование многомерных нелинейных уравнений методом обратной задачи // Докл. АН СССР. – 1980. – **254**, № 2. – С. 332–335.
20. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функц. анализ и его прилож. – 1974. – **8**, № 3. – С. 43–53.
21. *Захаров В.Е.* Метод обратной задачи рассеяния // Солитоны: Сб. / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – С. 270–309.
22. *Новиков С.П.* Метод решения периодической задачи для уравнения КдФ и его обобщений // Солитоны: Сб. / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – С. 348–362.
23. *Дубровин Б.А.* Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. анализ и его прилож. – 1975. – **9**, № 3. – С. 41–51.
24. *Дубровин Б.А.* Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов // Функц. анализ и его прилож. – 1975. – **9**, № 1. – С. 65–66.
25. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Периодическая задача для уравнений Кортевега – де Фриза и Штурма – Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией // Докл. АН СССР. – 1974. – **219,** № 3. – С. 19–22.
26. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Периодический и условно-периодический аналоги многосолитонных решений уравнения КдФ // Журн. экспер. и теорет. физики. – 1974. – С. 2131–2144.
27. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* Об операторах Хилла с конечным числом лакун // Функц. анализ и его прилож. – 1975. – **9**, № 1. – С. 69–70.
28. *Белоколос Е.Д., Энольский В.З.* О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 7. – С. 89–120.

29. *Белоколос Е.Д., Бобенко А.И., Матвеев В.Б., Энольский В.З.* Алгебро-геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 2. – С. 3–42.
30. *Miura R., Gardner C., Kruskal M.* Korteveg – de Vries equation and generalisations // J. Math. Phys. – 1968. – **9**, No. 8. – P. 1202–1209.
31. *Захаров В.Е.* Кинетическое уравнение для солитонов // Журн. экспер. и теорет. физики. – 1971. – **60**, № 3. – С. 993–1000.
32. *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 617 с.
33. *Вадати М.* Обобщенная матричная форма метода обратной задачи рассеяния // Солитоны: Сб. / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – С. 310–322.
34. *Шабат А.Б.* Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его прилож. – 1975. – **9**, № 3. – С. 75–78.
35. *Михайлов А.В., Шабат А.Б., Соколов В.В.* Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов: Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 213–279.
36. *Петрина Д.Я., Иванов С.С., Ребенко А.Л.* Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
37. *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега – де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 1. – С. 107–136.
38. *Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.* Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. – 1976. – **229**, № 1. – С. 15–18.
39. *Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.* Интегрируемые системы // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1984. – **24**. – С. 81–180.
40. *Новиков С.П.* Двумерные операторы Шредингера в периодических полях // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. – М.: ВИНИТИ, 1983. – **23**. – С. 3–32.
41. *Новиков С.П., Гриневич П.Г.* О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами // Функц. анализ и его прилож. – 1982. – **16**, № 1. – С. 25–26.
42. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. – М.: Наука, 1984. – 240 с.
43. *Горбачук М.Л., Горбачук В.И.* Задача рассеяния для дифференциальных уравнений первого порядка с операторными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 4. – С. 452–461.

44. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. – Киев: Наук. думка, 1972. – 220 с.
45. *Нижник Л.П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. – Киев: Наук. думка, 1973. – 183 с.
46. *Нижник Л.П.* Обратная задача рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
47. *Лакс П.Д., Филлипс Р.С.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
48. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
49. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
50. *Sjoberg A.* On the Korteweg – de Vries equation; existence and uniqueness // J. Math. Anal. Appl. – 1970. – **29**. – P. 569–579.
51. *Кричевер И.М.* Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прилож. – 1978. – **12**, № 3. – С. 20–31.
52. *Солитоны* / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
53. *Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М.* Спектральный анализ дифференциальных операторов, связь спектральных и осцилляционных свойств. – Маріуполь: Вид-во Приазовського держ. техн. ун-ту, 2001. – 332 с.
54. *Фаддеев Л.Д.* Гамильтонова интерпретация метода обратного преобразования рассеяния // Солитоны: Сб. / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – С. 363–379.
55. *Лэм Дж.* (*мл.*)*, Маклафлин Д.* Аспекты солитонной физики // Солитоны: Сб. / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – С. 78–121.
56. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Нелинейные уравнения, интегрируемые обратным спектральным преобразованием, ассоциированным с матричным уравнением Шредингера // Солитоны: Сб. / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – С. 323–347.
57. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 326 с.
58. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. – М.: Мир, 1985. – 470 с.
59. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. − М.: Мир, 1987. − 480 с.
60. *Интегрируемость* и кинетические уравнения для солитонов: Сб. науч. тр. − Киев: Наук. думка, 1990. − 472 с.
61. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. − М.: Мир, 1988. − 695 с.
62. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves // The London, Edinburgh and Dublin Philo-

sophical Magazine and Journal of Science. Series 5. – June 1895. – **39**, No. 241. – P. 422–443.

63. *Буллаф Р., Кодри Ф.* Солитон и его история // Солитоны: Сб. / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – С. 11–77.
64. *Марченко В.А.* Задача Коши для уравнения Кортевега – де Фриза с неубывающими начальными данными // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов: Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 168–212.
65. *Лундина Д.Ш.* Компактность множества безотражательных потенциалов // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1985. – Вып. 44. – С. 57–66.
66. *Bargmann V.* On the connection between phase shifts and scattering potential // Rev. Mod. Phys. – 1949. **– 21**. – P. 30–45.
67. *Bargmann V.* Remarks on the determination of the central field of forse the elastic scattering phase shifts // Phys. Rev. – 1949. – **75**. – P. 301–303.
68. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm – Liouvillschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. – 1946. – **78**, No. 1. – P. 1–96.
69. *Kay J., Moses H.* The determination of the scattering potential from the spectral measure function // 1) Nuovo Cimento. – 1955. – **2**, No. 5. – P. 917–961; 2) Nuovo Cimento. – 1956. – **3**, No. 1. – P. 56–84.; 3) Nuovo Cimento. – 1956. – **3**, No. 2. – P. 276–304.
70. *Kay J. and Moses H.* Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials // J. Appl. Phys. – 1956. – **27**. – P. 1503–1508.
71. *Боголюбов Н.Н.* Предисловие к переводу книги // Рид М., Саймон Б. Методы математической физики / Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – С. 5–6.
72. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 5. – С. 109–151.
73. *Тахтаджан Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. –528 с.
74. *Самойленко Ю.С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1984. – 296 с.
75. *Khruslov E.Ya., Shepelsky D.* Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory // Inverse Problems. – 1994. – **10**, No. 1. – P. 1–38.
76. *Khruslov E.Ya., Stephan Holder.* Splitting of some non-localized solutions of the Korteweg – de Vries equation into solitons // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1998. – **5**, № 1/2. – С. 49–67.
77. *Уизем Дж.* (*Whitham G.*) Линейные и нелинейные волны / Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 624 с.
78. *Лэм Дж.* Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983. – 294 с.

79. *Рофе-Бекетов Ф.С.* Признак конечности дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала // Докл. АН СССР. – 1964. – **156**, № 3. – С. 515–518.

80. *Фирсова Н.Е.* О решении задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными, являющимися суммой периодической и быстроубывающей функций // Мат. сб. – 1988. – **135**(177), № 2. – С. 261–268.

81. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. – Т. 1. – Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 359 с.; Т. 2. – Гармонический анализ. Самосопряженность. – М.: Мир,1978. – 395 с.; Т. 3. – Теория рассеяния. – М.: Мир, 1982. – 443 с.; Т. 4. – Анализ операторов. – М.: Мир, 1982. – 430 с.

82. *Фаддеев Л.Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 4. – С. 57–119.

83. *Фаддеев Л.Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния II // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1974. – **3**. – С. 93–180.

84. *Фаддеев Л.Д.* Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. – 1964. – **73**. – С. 314–336.

85. *Марченко В.А.* Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеяных волн // Докл. АН СССР. – 1955. – **104**, № 5. – С. 695–698.

86. *Лундіна Д.Ш., Марченко В.О.* Границі багатосолітонних розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера // Доп. АН України. – 1992. – № 8. – С. 21–24.

87. *Фаддеев Л.Д.* Единственность решения обратной задачи рассеяния // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1956. – № 7. – С. 126–130.

88. *Лундина Д.Ш.* Ограниченные решения уравнения Кортевега – де Фриза // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1988. – Вып. 49. – С. 59–70.

89. *Березанский Ю.М.* Об однозначности определения уравнения Шредингера по его спектральной функции // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 4. – С. 591–594.

90. *Березанский Ю.М.* О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1958. – **7**. – С. 3–62.

91. *Березанский Ю.М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР. –1985. – **281**, № 1. – С. 16–19.

92. *Крейн М.Г.* Решение обратной задачи Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**, № 1. – С. 21–24; Об определении потенциала частицы по ее S-функции // Докл. АН СССР. – 1955. – **105**, № 3. – С. 433–436.

93. *Адамян В.М.* К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1968. – **178**, № 1. – С. 9–12.
94. *Дубровин Б.А.* Тэта-функция и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 2. – С. 11–80.
95. *Котляров В.П., Хруслов Е.Я.* О солитонах нелинейного уравнения Шредингера, порожденных непрерывным спектром // Теор. и мат. физика. – 1986. – **68**, № 2. – С. 172–186.
96. *Kotlyarov V.P., Khruslov E.Ya.* Asymptotic solitons of the modified KdV equation // Inverse Problems. – 1989. – **5,** No. 6. – P. 1074–1082.
97. *Boutet de Monvel A., Marchenko A., Pastur L.* The multistability in the stationary scattering problem for nonlinear mean-field model // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1995. – **2**, № 3/4. – С. 296–305.
98. *Tanaka Sh.* Korteweg – de Vries equation asymptotic behaviour of solitons // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1975. – No. 10. – P. 367–369.
99. *Levinson N.* On the uniqueness of the potention in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase // Danske Kgl. Vid. Selskab. Mat. Fys. medd. – 1949. – **25**, No. 9. – P. 25.
100. *Левитан Б.М.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных операторов // Междунар. конгресс математиков в Ницце-1970: Сб. – М.: Наука, 1972. – С. 145–157.
101. *Левитан Б.М.* Применения операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка // Успехи мат. наук. – 1949. – **4**, № 1. – С. 3–111.
102. *Delsarte J.* Sur une extension de la formule de Taylor // J. Math. Pure et Appl. – 1938. – **17**. – P. 213–230.
103. *Левитан Б.М.* Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. – М.: Физматгиз, 1962. – 324 с.
104. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
105. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. – М.: Мир, 1980. – 408 с.
106. *Ньютон Р.* Предисловие к монографии // Шадан К. и Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. – М.: Мир, 1980. – С. 7–14.
107. *Марченко В.А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – **1**. – С. 327–420.
108. *Sears D.B.* Note on the uniqueness of Green's functions with certain differential equations // Canadian J. Math. – 1950. – No. 2. – P. 314–325.

109. *Ambarzumjan V.A.* Uber eine Frage der Eigenwertheorie // Z. Phys. – 1929. – **53**. – P. 690–695.

110. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Математика. – 1951. – **15**. – С. 309–360.

111. *Newton R.G., Jost R.* The construction of potentials from the S-matrix for systems of differentials equations. II // Nuovo Cimento. – 1955. – **1**, No. 4. – P. 590–622.

112. *Newton R.G.* Connection between the S-matrix and the tensor force // Phys. Rev. – 1955. – **100**, No. 1. – P. 412–428.

113. *Крейн М.Г.* К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем // Докл. АН СССР. – 1956. – **111**, № 6. – С. 1167–1170.

114. *Гельфанд И.М., Дикий Л.А.* Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега – де Фриза // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 5. – С. 67–100.

115. *Гельфанд И.М., Дикий Л.А.* Интегрируемые нелинейные уравнения и теорема Лиувилля // Функ. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 1. – С. 8–20.

116. *Атья М., Хитчин Н.* Геометрия и динамика магнитных монополей. – М.: Мир, 1991. – 150 с.

117. *Захаров В.Е., Манаков С.В.* Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Функц. анализ и его прил. – 1988. – **19**, № 2. – С. 11–25.

118. *Kaup D.J.* On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$ // Stud. in Appl. Math. – 1980. – **62**. – P. 189–216.

119. *Kaup D.J.* Closure of the squared Zakharov – Shabat eigenstates // J. of Math. Anal. and Appl. – 1976. – **54**, No. 3. – P. 849–864.

120. *Ablowitz M., Kaup D., Newell A., Segur H.* The inverse scattering transform – Fourier analysis for non-linear problems // Stud. in Appl. Math. – 1974. – **53**, No. 4. – P. 249–315.

121. *Schauder J.P.* Über lineare elliptishe Differentialgleichungen zweiter Ordnung // Math. Z. – 1934. – **38**. – P. 257–282.

122. *De Castro H.M.A., Wreszinski W.F.* Inverse scattering theory for systems of the Zakharov – Shabat type // J. Math. Phys. – 1983. – **24**, No. 6. – P. 1502–1508.

123. *Von Neumann J.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitesher Funktional operatoren // Math. Annalen. – 1929-1930. – **102**. – P. 49–131.

124. *Stone M.* Linear trasformations in Hilbert spaces and their applications to Analysis // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. – 1932. – **15**.

125. *Von Neuman J.* Über Adjungierte Funktionaloperatoren // Ann. Math. – 1936. – **33**, No. 2. – P. 294–310.

126. *Riesz F.* Über die Linearen Transformation des Komplexen Hilbertschen Raumes // Acta Sci. Math. – 1930–1932. – **5**. – P. 23–54.

127. *Крейн М.Г.* Избранные труды. – Кн. 2. – Банаховы пространства и теория операторов. – Киев, 1996. – 348 с.

128. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – **70**. – P. 572–614.

129. *Лившиц М.С.* Операторы, колебания, волны. Открытые системы. – М.: Наука, 1966. – 298 с.

130. *Рофе-Бекетов Ф.С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1969. – № 8. – С. 3–24.

131. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

132. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. – 166 с.

133. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.

134. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука, 1973. – 176 с.

135. *Мотовилов А.К.* Переформулировка схемы Лакса – Филлипса в терминах стационарной теории рассеяния // Теор. и мат. физика. – 1994. – **98**, № 2. – С. 248–266.

136. *Burchnall J.L., Chaundy T.W.* Commutative ordinary differential operators. I // Proc. London Math. Soc. – 1922. – **21**. – P. 420–440.

137. *Burchnall J.L., Chaundy T.W.* Commutative ordinary differential operators. II // Proc. Royal Soc. London. – 1928. – **118**. – P. 557–583.

138. *Baker H.F.* Note on the foregoing paper «Commutative ordinary differential operators» by J.L. Burchnal and T.W. Chaundy // Proc. Royal Soc. London. – 1928. – **A118.** – P. 584–593.

139. *Притула М.М., Прикарпатський А.К.* Про параметричний градієнтно-голономний алгоритм інтегровності неоднорідних динамічних систем // Тези доп. Всеукр. конф. «Диференц.-функц. рівняння та їх застосування» (Чернівці, 15–18 тр. 1996). – С. 158–159.

140. *Матвеев В.Б.* Метод преобразования Дарбу в теории солитонов // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5 (245). – С. 195.

141. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* Об одном классе решений уравнения КдФ // Проблемы мат. физики. – 1976. – № 8. – С. 70–91.

142. *Итс А.Р.* О связи между солитонными и конечнозонными решениями нелинейного уравнения Шредингера // Проблемы мат. физики. – 1982. – № 10. – (Спектр. теория и волновые процессы). – С. 118–136.

143. *Нижник І.* Л. Закон притягання солітонів // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 686–688.

144. *Гельфанд И.М., Захаревич И.С.* Спектральная теория пучка косо-симметрических дифференциальных операторов 3-го порядка на S^1 // Функ. анализ и его прил. – 1989. – **23**, № 2. – С. 1–11.

145. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1531–1550.

146. *Фущич В.И., Жданов Р.З.* Симметрия и точные решения нелинейного уравнения Дирака // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1988. – **19**, № 5. – С. 1154–1196.

147. *Hirota R.* Exact N-soliton solution of the wave equation of long waves // J. Math. Phys. – 1973. – **14**. – P. 810–815.

148. *Хирота Р.* Прямые методы в теории солитонов // Солитоны: Сб. / Пер. с англ. под ред. С.П. Новикова. – М.: Мир, 1983. – С. 175–192.

149. *Mochizuki K.* Eigenfunction Expantions Associated with the Schrödinger Operator with a Complex Potential and the Scattering Theory // Publ. RIMS Kioto Univ. Ser. A. – 1968. – **4**. – P. 419–466.

150. *Бондаренко Е.И., Рофе-Бекетов Ф.С.* Обратная задача рассеяния с треугольным матричным потенциалом // Int. Conf. «Inverse Problems and Nonlinear Equations» (Kharkiv, Aug. 12–16, 2002): Book of Abstracts. – P. 11–13.

151. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. – М.: Мир, 1973. – 265 с.

152. *Березанский Ю.М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 4(238). – С. 3–52.

153. *Лопатинский Я.Б.* Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.

154. *Лопатинский Я.Б.* Дифференцируемые многообразия. – Донецк: ДонГУ, 1971. – 146 с.

155. *Лопатинский Я.Б.* Теория общих граничных задач. – Киев: Наук. думка, 1984. – 316 с.

156. *Марченко В.А.* Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка // Мат. сб. – 1960. – **52**(94). – С. 739–788.

157. *Лянце В.Э.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора // Мат. сб. – 1967. – **72**(114), № 4. – С. 537–557.

158. *Лянце В.Э.* Об одном обобщении понятия спектральной меры // Мат. сб. – 1963. – **61**(103), № 1. – С. 80–120.

159. *Лянце В.Э.* Несамосопряженный дифференциальный оператор второго порядка на полуоси // В кн.: Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – С. 443–498.

160. *Лянце В.Э.* О дифференциальном операторе со спектральными особенностями // Мат. сб.: 1) – 1964. – **64**, № 4. – С. 521–561.; 2) – 1964. – **65**, № 1. – С. 47–103.

161. *Лянце В.Э.* Распространение L-преобразования Фурье на функции с локально интегрируемым квадратом // Докл. АН СССР. – 1964. – **158**, № 5. – С. 1026–1029.

162. *Лянце В.Э.* Обратная задача для несамосопряженного оператора // Докл. АН СССР. – 1966. – **166**, № 1. – С. 30–33.

163. *Лянце В.Э.* Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Москва, 1964. – 16 с.

164. *Лянце В. Э.* Разложение по собственным фукциям несамосопряженного оператора // Тез. кратких науч. сообщ. междунар. Конгресса математиков: Секц. 5 (Москва, 1966. – С. 61–62.

165. *Лянце В.Э.* Несамосопряженное одномерное возмущение оператора умножения на независимое переменное // Докл. АН СССР. – 1968. – **182**, № 5. – С. 1010–1014.

166. *Блащак В.А.* Обратная задача теории рассеяния для несамосопряженного оператора Штурма – Лиувилля // Тр. летней школы по спектральной теории операторов и теории представления групп. – Баку: Элм, 1975. – С. 11–19.

167. *Рофе-Бекетов Ф.С.* Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях // Мат. сб. – 1960. – **51** (93). – С. 293–342.

168. *Келдыш М.В., Лидский В.Б.* Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов // Тр. 4 Всесоюз. Мат. съезда. – Т. 1. – Л.: Изд-во АН СССР. – 1963. – С. 101–120; Келдыш М.В. Избранные труды. Математика. – М.: Наука, 1985. – 448 с.

169. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. – 1951. – **77**, № 1. – С. 11–14.

170. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1971. – **27**, № 4. – С. 15–48.

171. *Данфорд Н.* Обзор теории спектральных операторов // Математика: Сб. пер. – М., 1960. – С. 53–100.

172. *Данфорд Н. и Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. – М.: Мир, 1974. – 663 с.

173. *Костюченко А.Г.* Предисловие ред. перевода к книге // Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. – М.: Мир, 1974. – С. 5–6.

174. *Наймарк М.А.* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1954. – **3**. – С. 181–270.

175. *Кесельман Г.М.* Про структуру несамоспряженого диференціального оператора другого порядку на півосі // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 5. – С. 588–591.

176. *Павлов Б.С.* О несамосопряженном операторе $-y'' + q(x)y$ на полуоси // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, № 4. – С. 807–813.

177. *Павлов Б.С.* К спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. – 1962. – **146**, № 6. – С. 1267–1270.

178. *Павлов Б.С.* О несамосопряженном операторе Шредингера // Проблемы математической физики: Ч. 1. – 1966. – Вып. 1. – С. 102–132; Ч. 2. – 1967. – Вып. 2. – С. 133–157; Ч. 3. – 1968. – Вып. 3. – С. 59–80.

179. *Lavine R.* Absolute continuity of positive spectrum for Schrödinger operators with long-range potentials // J. Funct. Anal. – 1973. – **12**, No. 1. – P. 30–54.

180. *Kato T.* Wave operators and similarity for some nonselfadjoint operator // Math. Ann. – 1966. – **162**. – P. 258–279.

181. *Kato T.* Smooth operators and commutators // Studia Math. – 1968. – **31**, No. 5. – P. 535–546.

182. *Kako T., Yajima K.* Scien. papers of Coll. of Gen. Educ. Tokio Univ. – 1976. – **26**, No. 12. – P. 73–89.

183. *Butler J.B.* Almost smooth perturbations of selfadjoint operators // Pacific J. Math. – 1970. – **35**, No. 2. – P. 297–306.

184. *Лянце В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов – Киев: Наук. думка. – 1983. – 211 с.

185. *Лидский В.Б.* Несамосопряженный оператор типа Штурма – Лиувилля с дискретным спектром // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1960. – **9.** – С. 45–79.

186. *Ильин В.А., Мальков К.В., Моисеев Е.И.* Базисность систем корневых фукций несамосопряженных операторов и интегрируемость ассоциированных представлением Лакса нелинейных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1) 1989. – **25,** № 11. – С. 1956–1970; 2) 1989. – **25**, № 12. – С. 2133–2143.

187. *Лянце В.Е., Чуйко Г.І.* Операторні міри // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 7. – С. 7–9.

188. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.
189. *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
190. *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Уравнение Шредингера. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 393 с.
191. *Von Neumann J.* On rings of operators. Reduction theory // Ann. of Math. – 1949. – **50**. – P. 401–485.
192. *Gording L.* Application of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators // Univ. of Maryland. The Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math.: Lect. Ser. – 1954. – **11**.
193. *Gording L., Wightman A.* Representation of (anti)commution relations // Pros. of Nat. Acad. of Sci. USA. – 1954. – **40**. – P. 617–626.
194. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. – М.: Мир, 1965. – 571 с.
195. *Гординг Л.* Разложения по собственным функциям, связанные с эллиптическими дифференциальными операторами // Математика: Сб. пер. – М., 1957. – С. 107–116.
196. *Гординг Л.* Разложения по собственным функциям // Дополнение 1 к книге Берс Л. , Джон Ф. , Шехтер М. Уравнения с частными производными / Пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – С. 309–332.
197. *Кошманенко В.Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 176 с.
198. *Бондаренко Е.И., Рофе-Бекетов Ф.С.* Фазово-эквивалентные матричные потенциалы // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2000. – **5**, № 5. – С. 6–24.
199. *Постников М.М.* Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – 479 с.
200. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – Т. 1. – М.: Наука, 1967. – 486 с.; Т. 2. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
201. *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Уравнение Шредингера. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 392 с.
202. *Фон Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики / Пер. с нем., ред. перевода акад. Н.Н. Боголюбов. – М.: Наука, 1964. – 367 с.
203. *Фок В.А.* Начала квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
204. *Nonlinearity* and Geometry // Proc. 1st Non-Orthodox School. – Warszawa: PWN, 1998. – 386 p.
205. *Рофе-Бекетов Ф.С.* Условия самосопряженности оператора Шредингера // Мат. заметки. – 1970. – **8**, № 6. – С. 741–751.

206. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. – М.: Физматгиз, 1961. – 472 с.

207. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 709 с.

208. *Лопушанський О.В.* Операторне числення від тензорно комутуючих операторів на просторах ультрагладких векторів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 35. – С. 189–194.

209. *Титчмарш Э.Ч.* Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Пер. с англ. – Т. 1. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960; Т. 2. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 556 с.

210. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1970. – 672 с.

211. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 432 с.

212. *Гасымов М.Г.* Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$ // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1968. – **19**. – С. 41–112.

213. *Фролов И.С.* Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Докл. АН СССР. – 1972. – **207**, № 1. – С. 44–47.

214. *Серов М.И.* О некоторых свойствах спектра несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 1. – С. 27–29.

215. *Підстригач Я.С.* Тензорний аналіз на многовидах. – Київ: НМК Вищої освіти. – 1992. – 83 с.

216. *Eckhaus W., van Harten A.* The inverse scattering transformation and the theory of solitons. – Amsterdam: North-Holland, 1981–1983. – 230 p.

217. *Радыно Я.В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9. – С. 1559–1569.

218. *Зерзайхи Т., Радыно Я.В.* Функции от коммутирующих неограниченных операторов // Докл. АН БССР. – 1989. – **38**, № 8. – С. 684–686.

219. *Костюченко А.Г., Саргсян И.С.* Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1979. – 400 с.

220. *Рофе-Бекетов Ф.С., Кальф Х.* О самосопряженности неполуограниченных операторов Шредингера // Мат. студії. – 1997. – **7**, № 1. – С. 53–58.

221. *Rofe-Beketov F.S.* Spectrum perturbations, the Knezer-type constants and the effective masses of zones-tipe potentials //

«Конструктивная теория функций-84». – София, 1984. – С. 757–766.

222. *Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундамент. направления. – М.: ВИНИТИ. – **64**. – С. 5–248.

223. *Бирман М.Ш., Яфаев Д.Р.* Асимптотика спектра S-матрицы при потенциальном рассеянии // Докл. АН СССР. – 1980. – **255**, № 5. – С. 1085–1087.

224. *Кочубей А.Н.* О расширениях операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41–48.

225. *Erovenko V.A.* Invariance of the L^p-essential spectrum for differential operators // Nonlinear partial differential equations: Int. Conf. dedicated to J.P. Schauder: Book of Abstracts, Lviv, Aug. 23–29, 1999. – P. 63.

226. *Рофе-Бекетов Ф.С.* О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1963. – **152**, № 6. – С. 1312–1315.

227. *Вишик М.И.* (К 60-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 4 (226). – С. 213–220.

228. *Костовский О.М.* Локализация по модулях нулей ряда Лорана и его производных: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Львів. – 345 с.

229. *Лянце В.Э.* Кольца линейных неограниченных операторов с разложением единицы и их представления // Докл. АН СССР. –1958. – **121**, № 5. – С. 801–804.

230. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

231. *Дмитрущенков В.А.* О спектральных дифференциальных операторах с периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук. – 1981. – **36,** № 2 (218). – С. 183–184.

232. *Лянце В.Э., Пличко А.М., Сторож О.Г.* Об исследованиях львовских математиков по функциональному анализу после 1945 года. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1992. – 14 с.

233. *Черемных Е.В.* Разделение переменных в уравнении КдФ в классе комплекснозначных функций // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1982. – № 169. – С. 134–136.

234. *Лянце В.Э., Сыроид И.П.* О спектральности возмущенного оператора умножения на независимую переменную // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 2. – С. 289–296.

235. *Сыроид И.-П.П.* О несамосопряженном дифференциальном операторе второго порядка на всей оси // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 201–203.

236. *Сироїд І.-П.П.* Задача про несамоспряжене збурення неперервного спектра для оператора Дірака // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 2. – С. 122–125.
237. *Сыроид И.-П.П.* Несамосопряженное возмущение непрерывного спектра с условиями гладкости и почти-гладкости // В сб.: Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УРСР, 1976. – С. 115–116.
238. *Сыроид И.-П.П.* О симметризаторах для гладко возмущенных в смысле Т.Като операторов // В сб.: Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УРСР, 1976. – С. 112–114.
239. *Сыроид И.-П.П.* Несамосопряженный аналог безотражательных потенциалов // В сб.: Мат. анализ и теория вероятностей. – Киев: Ин-т математики АН УРСР, 1978. – С. 168–172.
240. *Сыроид И.-П.П.* Достаточные условия отсутствия спектральных особенностей у несамосопряженного оператора Шредингера в терминах потенциала // Сиб. мат. журнал. – 1981. – **22**, № 1. – С. 151–157.
241. *Сыроид И.-П.П.* Несамосопряженное возмущение непрерывного спек тра оператора Дирака // Укр. мат. журн. –1983. – **35**, № 1. – С. 115–119.
242. *Сыроид И.-П.П.* Несамосопряженное возмущение непрерывного спектра с условиями гладкости типа Като // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 3. – С. 342–348.
243. *Сироїд І.-П.П.* Спектральність оператора Дірака в термінах потенціалу // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 12. – С. 8–10.
244. *Сыроид И.-П.П.* Условия отсутствия спектральных особенностей у несамосопряженного оператора Дирака в терминах потенциала // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 352–359.
245. *Сыроид И.-П.П.* Несамосопряженный одномерный оператор Дирака на всей оси // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 25. – С. 3–7.
246. *Сыроид И.-П.П.* О дискретном спектре одномерного оператора Дирака // Функц. анализ. –1987. – **27**. – С. 182–187.
247. *Сыроид И.-П.П.* О спектральности оператора Дирака в терминах потенциала // Сб. науч. труд.: Методы исследования дифференц. и интегральных операторов. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 181–186.
248. *Syroid I.-P.P.* Development of the inverse scattering transform for nonselfadjoint Lax's L-A Pairs // Conf. on Integral Equations and Inverse Problems: Varna, Sept. 18–23, 1989. – Program of the Conference.
249. *Сыроид И.-П.П.* О комплексных решениях общего уравнения Кортевега – де Фриза // XIII Всесоюз. школа по теории операторов в функц. пространствах (Куйбышев, 6–13 окт. 1988): Тез. докл. – С. 182–183.

250. *Сыроид И.-П.П.* Эволюция данных рассеяния для несамосопряженных *L-A* пар Лакса // 14 Всесоюз. школа по теории операторов в функц. пространствах (Новгород, 6–14 сент. 1989): Тез. докл. – Ч. 3. – С. 58.

251. *Сыроид И.-П.П.* Преобразование Фурье несамосопряженных операторов // 15 Всесоюз. школа по теории операторов в функц. пространствах (Ульяновск, 5–12 сент. 1990): Тез. докл. – Ч. 2. – С. 86.

252. *Сыроид И.-П.П.* О дискретном спектре оператора Шредингера // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – Вып. 32. – С. 33–37.

253. *Сыроид И.-П.П.* Об одном способе задания преобразования Фурье несамосопряженных операторов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 34. – С. 19–21.

254. *Сыроид И.-П.П.* Комплексные решения общего уравнения Кортевега – де Фриза: метод обратной задачи // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 223–230.

255. *Сыроид И.-П.П.* Карлемановость резольвенты одномерного оператора Дирака с суммируемым потенциалом // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 36. – С. 18–21.

256. *Syroid I.-P.P.* Develepment of the inverse scattering method for nonselfadjoint Lax *L–A* pairs with continuous and discrete spectrum // Міжнар. мат. конф., присвячена 100-річчю від дня народження С. Банаха (Львів, 6–8 тр. 1992): Тези доп. – С. 43–44.

257. *Сироїд І.-П.П.* Комплексні розв'язки загального рівняння Кортевега – де Фріза // Міжнар. конф., присв. пам'яті акад. М.П. Кравчука (Київ–Луцьк, 22–28 вер. 1992): Тези доп. – С. 206.

258. *Сироїд І.-П.П.* Дискретний спектр одновимірного оператора Шредінгера // Всеукр. наук. конф. «Нові підходи до розв'язання диференц. рівнянь» (Дрогобич, 25–27 січня 1994): Тези доп. – С. 151.

259. *Сироїд І.-П.П.* Застосування методів спектральної теорії до розв'язування диференціальних рівнянь // Міжнар. мат. конф., присвячена пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 10–15 жовтня 1994): Тези доп. – С. 133.

260. *Сироїд І.-П.П.* Імерсійний метод в теорії інтегральних многовидів // Всеукр. наук. конф. «Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях», присв. 70-річчю від дня народження проф. П.С. Казімірського (Львів, 5–7 жовтня 1995): Тези доп. – Ч. 1. – С. 86.

261. *Сироїд І.-П.П.* Метод занурення інтегрального многовиду в функціональний простір. Алгебрично-параметричні аспекти методу для солітонного многовиду КдФ // Доп. НАН України. – 1996. – № 2. – С. 35–38.

262. *Сироїд І.-П.П.* Метод динамічного занурення функціональних просторів // 5 Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 16–18 травня 1996): Тези доп. – С. 401.

263. *Сироїд І.-П.П.* Дослідження стійкості многовиду безвідбивних потенціалів загального рівняння КдФ // Всеукр. наук. конф. «Диференц.-функц. рівняння та їх застосування» (Чернівці, травень 1996): Тези доп. – С. 174.

264. *Сироїд І.-П.П.* Аналіз на многовидах з некоректно означеним атласом // Наук. конф. «Нелінійні проблеми аналізу» (Івано-Франківськ, 24–27 вер. 1996). – С. 69.

265. *Сироїд І.-П.П.* Дослідження солітонного многовиду КдФ методом імплікації (занурення) в функціональний простір // 6 Міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 14–17 травня 1997): Матеріали конф. – С. 359.

266. *Сироїд І.-П.П.* Метод динамічного занурення функціональних просторів за допомогою простору-донора і стійкість безвідбивних потенціалів КдФ // Доп. НАН України. – 1997. – № 8. – С. 46–50.

267. *Сироїд І.-П.П.* Задачі спектрального аналізу над функціональними многовидами розв'язків диференціальних рівнянь // Всеукр. наук. конф. «Нові підходи до розв'язання диференц. рівнянь» (Дрогобич, 15–19 вер. 1997): Тези доп. – С. 103.

268. *Сироїд І.-П.П.* Модель спектрального аналізу над функціональними многовидами: прикладні аспекти // Всеукр. конф. «Застосування обчислюв. техніки, мат. моделювання та мат. методів у наук. дослідженнях», присв. 80-літтю проф. ЛДУ О.М. Костовського (Львів, 23–25 вер. 1997): Тези доп. – С. 83.

269. *Сироїд І.-П.П.* Методи імерсії і спектрального аналізу над функціональними просторами і многовидами в теорії солітонів // Сучасні проблеми механіки і математики: Матеріали міжнар. конф., Львів, 25–28 травня 1998. – Львів, 1998. – С. 252–253.

270. *Сироїд І.-П.П.* Спектральна теорема для пар Лакса над солітонним многовидом КдФ // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнар. конф. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Ч. 3. – С. 89-92.

271. *Сироїд І.-П.П.* Шрьодінгер-аналіз і розв'язок проблеми Данфорда – Костюченка на півосі в термінах достатніх умов // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». – 1998. – Вип. 337, № 1. – С. 57–59.

272. *Сироїд І.-П.П.* Спектральний аналіз над солітонними многовидами моделі КдФ // 7 Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 14–16 тр. 1998): Матеріали конф. – С. 462.

273. *Syroid I.-P.P.* Applications spectral measures to studing KdV – Soliton Manifold (with algebraic aspects) // 25 Winter school on Abstract Analysis (Praha, 25–31 Jan., 1997). – Program of the School.

274. *Сироїд І.-П.П.* Спектральний аналіз над функціональними многовидами: Шрьодінгер-аналіз // Доп. НАН України. – 1999. – № 11. – С. 43–48.

275. *Сироїд І.-П.П.* Метод імерсії і його параметрична реалізація для рівняння Кортевега – де Фріза // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 1. – С. 19–24.

276. *Syroid I.-P.P.* Parametric Implications and Immersions for Functional Spaces and Manifolds // Int. Conf. on Approximation Theory and Its Applications Dedicated to the Memory of V.K. Dzjadyk (Kyiv, May 26–31, 1999): Abstracts. – P. 80–81.

277. *Сыроид И.-П.П.* Решение проблемы Данфорда – Костюченко на полуоси и спектральный анализ над солитонными многообразиями в полупространстве // Междунар. конф. «Аналитические методы анализа и дифференц. уравнений» (АМАДЕ-99) (Минск, 14–18 сент. 1999): Тез. докл. – С. 216–218.

278. *Syroid I.-P.P.* Some methods of functional analysis over solutions of KdV-nonlinear differential equation // Int. Conf. on Nonlinear Partial Differential Equations, Dedicated to J.P. Schauder (Lviv, Aug. 23–29, 1999): Book of Abstracts. – P. 199–200.

279. *Сироїд І.-П.П.* Параметричний метод оберненої задачі розсіяння для загального рівняння Кортевега – де Фріза у півпросторі // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 1. – С. 124–128.

280. *Сироїд І.-П.П.* Спектральний аналіз над функціональними просторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 2. – С. 83–89.

281. *Сироїд І.-П.П.* Функціонально-параметричні методи обґрунтування перетворення оберненої задачі розсіяння // 8 Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 11–14 травня 2000): Матеріали конф. – С. 188–189.

282. *Сыроид И.-П.П.* Методы погружения солитонных многообразий в функциональные пространства // 8 Белорус. Мат. конф. (Минск, 19–24 июня 2000): Материалы конф. – Ч. 1. – С. 80.

283. *Syroid I.-P.P.* Schrödinger-Analysis and solutions of some problems for nonselfadjoint operators // Annual Sci. Conf. GAMM-2000 (Göttingen, 2–7 Apr., 2000): Book of Abstracts. – P. 151.

284. *Syroid I.-P.P.* Schrödinger-Analysis over soliton manifolds // Annual Sci. Conf. GAMM-2000 (Göttingen, 2–7 Apr., 2000): Book of Abstracts. – P. 151.

285. *Prytula Ya.H., Lyantse V.E.* Mathematics in Lviv University in the period between the world wars // Int. Conf. on Nonlinear Partial Differential Equations, Dedicated to J.P. Schauder (Lviv, Aug. 23–29, 1999): Sci. Program. – P. 1.

286. *Сироїд І.-П.П.* Метод комутуючих пар Лакса в дослідженні загального рівняння Кортевега – де Фріза у півпросторі // Фіз. зб. Наук. тов-ва ім. Т. Шевченка.– 2001. – **4**. – С. 258–262.

287. *Сыроид И.-П.П.* Шредингер-анализ над функциональными комплексными многообразиями // Междунар. конф. «Аналит. методы анализа и дифференц. уравнений» AMADE-2001 (Минск, 15–19 февр. 2001): Тез. докл. – С. 158–159.
288. *Syroid I.-P.P.* Application of inverse scattering transform to the problems of generalized amplitude modulation of waves // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 3. – P. 399–404.
289. *Syroid I.-P.P.* Cauchy initial problem using condition of generalized amplitude modulation // Int. Conf. «Nonlinear Partial Differential Equations» NPDE-2001 (Kyiv, 22–28 Aug., 2001): Book of Abstracts. – P. 121.
290. *Сироїд І.-П.П.* Розв'язання проблемних задач для несамоспряжених операторів // Укр. Мат. Конгрес-2001: Міжнар. конф. з функц. аналізу (Київ, 21–26 серпня 2001): Тези доп. – С. 93–94.
291. *Сироїд І.-П.П, М'яус О.М.* Задачі Шрьодінгер-аналізу над солітонними многовидами // Укр. Мат. Конгрес-2001: Міжнар. конф. з функц. аналізу (Київ, 21–26 серпня 2001): Тези доп. – С. 93.
292. *М'яус О., Сироїд І.-П.* Застосування пар Лакса в Шредінгер-аналізі // Міжнар. наук. конф. «Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь», Дрогобич, 1–5 жовтня 2001: Тези доп. – С. 100.
293. *Сироїд І.-П.П.* Метод узагальненої амплітудної модуляції осциляцій в теорії солітонів // IX Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 16–19 травня 2002): Матеріали конф. – С. 186–188.
294. *Сироїд І.-П.П. і М'яус О.М.* Застосування параметричного перетворення оберненої задачі розсіяння до задачі локалізації солітонів у півпросторі // Читання, присвячені пам'яті акад. Я.С. Підстригача (Львів, 23–24 травня 2002): Тези. – С. 15–16.
295. *Syroid I.-P.P.* Solution of the Dunford – Bade problem for the nonselfadjoint Schrödinger operator in $L_2(E_3)$ // Int. Conf. on Funct. Analysis and its Applications Dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach (Lviv, May 28–31, 2002): Book of Abstracts. – P. 196.
296. *Syroid I.-P.P.* Functional and parametric aspects of Inverse Scattering Transform // Int. Conf. «Inverse Problems and Nonlinear Equations» (Kharkiv, Aug. 12–16, 2002): Book of Abstracts. – P. 87–88.
297. *Сироїд І.-П.П.* Застосування перетворення оберненої задачі розсіяння до задачі узагальненої амплітудної модуляції хвиль для системи рівнянь Кортевега – де Фріза // Функц. аналіз: Праці Укр. мат. конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 289–299.

298. *Сироїд І.-П.П.* Напрями досліджень в галузі аналізу // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2003. – С. 555–557.

299. *Сироїд І.-П.П.* Комплексні диференціальні рівняння і задача занурення для солітонних многовидів // Міжнар. конф. «Комплексний аналіз і його застосування» (Львів, 26–29 травня 2003). – С. 65–66.

Ф – СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ПРАЦЬ З ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Список виділено для зручності посилань у процесі роботи над монографією. Істотне доповнення до цього списку міститься у Списку використаних джерел.

Взірець посилання на джерела з цього списку:
В.Э. Лянце [Ф 16].

1. *Банах С.* Курс функціонального аналізу (Лінійні операції) / Ред. проф. М. М. Боголюбов і доц. С. І. Зуховицький. – Київ: Рад. шк., 1948. – 216 с.
2. *The Scottish Book.* Mathematics from the Scottish Cafe / Ed. by R. D. Mauldin. – Boston: Birkhauser, 1981. – 268 p.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
4. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces. – Warszawa: PWN, 1972. – 288 p.
5. *Морен К.* Методы гильбертова пространства / Пер. с польс. В. Э. Лянце. – М.: Мир, 1965. – 571 с.
6. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Математика. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы / Пер. с англ.: В 3 т. – Т. 1. – Общая теория. – М.: Мир, 1962. – 896 с.; Т. 2. – Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1966. –1064 с.; Т. 3. – Спектральные операторы. – М.: Мир, 1974.–663 с.
8. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 799 с.
9. *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
10. *Крейн М.Г.* Избранные труды. – Кн. 2. – Банаховы пространства и теория операторов. – Киев: Ін-т математики НАН України, 1996. – 348 с.
11. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.

12. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.
13. *Функциональный* анализ: Справочная математическая библиотека / Ред. С. Г. Крейн. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
14. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. –– М.: Наука, 1969. – 526с.
15. *Лопатинский Я.Б.* Дифференцируемые многообразия. – Донецк: Донецк. гос. ун-т, 1971. – 145 с.
16. *Лянце В.Э.* Интеграл Лебега – Стильтьеса. – Львів: Вид-во Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка, 1973. – 120 с.
17. *Лянце В.Э.* Лекции по функциональному анализу. – Львів: Вид-во Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка, 1975. – 111 с.
18. *Лянце В. Э.* Элементы фукционального анализа, спектральная теория ограниченных и компактных операторов. – Львів: Вид-во Львів. держ. ун-ту ім. І. Франка, 1976. – 103 с.
19. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
20. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. – Т. 1. – Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 359 с.; Т. 2. – Гармонический анализ. Самосопряженность. – М.: Мир,1978. – 395 с.; Т. 3. – Теория рассеяния. – М.: Мир, 1982. – 443 с.; Т. 4. – Анализ операторов. – М.: Мир, 1982. – 430 с.
21. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. – Киев: Наук. думка, 1972. – 220 с.
22. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
23. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: В 2 т. – Харьков: Вища шк., 1977, 1978. – Т. 1. – 315 с.; Т. 2. – 288 с.
24. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
25. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988. – 398 с.
26. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа и оснащенные гильбертовы пространства. – М.: Физматгиз, 1961. – 472 с.
27. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – New York: Springer-Verlag, 1966. – 590 p.
28. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.
29. *Радзиевский Г.В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 2. – С. 81–145.

30. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. – М.: Мир, 1975. – 222 с.
31. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
32. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.
33. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 832 с.
34. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1969. –1072 с.
35. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. – М.: Физматгиз, 1962. – 360 с.
36. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
37. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
38. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964. – 432 с.
39. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
40. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
41. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
42. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 445 с.
43. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
44. *Лянце В.Е., Кудрик Т.С., Чуйко Г.І.* Лекції з функціонального аналізу. – Львів: Видавн. центр Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2000. – 278 с.
45. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 511 с.
46. *Самойленко Ю.С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 232 с.
47. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
48. *Фон Нейман, Джон* Избранные труды по функциональному анализу: В 2 т. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. – 376 с.; Т. 2. – 370 с.
49. *Von Neumann J.* On rings of operators. Reduction theory // Ann. of Math. – 1949. – **50**. – P. 401–485.
50. *Фон Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики / Пер. с нем., ред. перевода акад. Н.Н. Боголюбов. – М.: Наука, 1964. – 367 с.

51. *Von Neumann J.* Collected works / Ed. A.H. Taub. – Oxford: Pergamon press, 1960–1962. – V. 1–6.
52. *Петрина Д.Я.* Квантовая теория поля. – Киев: Вища шк., 1984. – 248 с.
53. *Colojoara I., Foias C.* Theory of Generalized Spectral Operators. – New York: Gordon and Breach, 1967. – 230 p.
54. *Наймарк М.А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с. – Гл. 3: Коммутативные нормированные кольца. – С. 228–283.
55. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 268 с.
56. *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Уравнение Шредингера. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 392 с.
57. *Березанский Ю.М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 4 (238). – С. 3–52.
58. *Гординг Л.* Разложение по собственным функциям // В кн.: Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – С. 309–332.
59. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 176 с.
60. *Вакарчук І. О.* Квантова механіка. – Львів: Вид-во ЛНУ імені Івана Франка, 1998. – 616 с.
61. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
62. *Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М.* Спектральный анализ дифференциальных операторов. – Маріуполь: Вид-во Приазов. держ. тех. ун-ту, 2001. – 331 с.
63. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
64. *Ахиезер Н.И.* Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, № 2. – С. 263–266.
65. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 416 с.
66. *Munoz G.A., Sarantopoulos V., Tonge A.* Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps // Studia Math. – 1999. – **134**, No. 1.
67. *Кужель С.О.* Про елементи схеми Лакса – Філліпса в теорії розсіяння: Дис.... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2002. – 274 с.

ГД – СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ПРАЦЬ З ГІДРОДИНАМІКИ

Взірець посилання на праці з цього Списку:
М.О. Лаврентьєв [ГД 1].

1. *Лаврентьєв М.О.* До теорії довгих хвиль // Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР. – 1946. – № 8. – С. 13–69.
2. *Лаврентьев М.А.* Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1990. – 600 с.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
4. *Келдыш М.В.* Избранные труды: Механика. – М.: Наука, 1985. – 568 с.
5. *Келдыш М.В., Седов Л.И.* Приложения теории функции комплексного переменного в гидродинамике и аэродинамике // Докл. Междунар. симп. по прилож. теории функций в механике сплошной среды (Тбилиси, 17–23 сент. 1963). – М.: Наука, 1965. – С. 13–36.
6. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения / Пер. с англ. Ред. перевода М.А. Лаврентьев и Н. Н. Мойсеев. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 617 с.
7. *Лаврентьев М.А., Моисеев Н.Н.* Предисловие к книге // Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения / Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – С. 5–7.
8. *Уизем Дж.* (*Whitham G.B.*) Линейные и нелинейные волны / Пер. с англ. Ред. перевода А. Б. Шабат. – М.: Мир, 1977. – 624 с.
9. *Остроградський М.В.* Memoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique // Mem. Sci. Math. Phys. de l'Inst. de France. – 1826. – 3. – P. 23–44. (Переклад цієї праці див.: Остроградский М.В. Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне (Доложен в Академии 6 ноября 1826 г.) // Полное собрание трудов: В 3 т. – Киев: Вид-во АН УРСР, 1959. – Т. 1. – С. 7–22.)

10. *Остроградский М.В.* Полное собрание трудов: В 3 т. – Київ: Вид-во АН УРСР. – 1959–1961. – Т. 1–3; Т. 1. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1959. – 312 с.; Т. 2. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961.– 360 с.; Т. 3. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 396 с.
11. *Штокало И.З., Погребысский И.Б.* О работах М.В. Остроградского по математической физике // В кн.: Остроградский М.В. Полное собрание трудов: В 3 т. – Киев: Вид-во АН УРСР, 1959. – Т. 1. – С. 292–311.
12. *Данилюк І.І.* Вибрані праці.– Київ: Наук. думка, 1996. –288 с.
13. *Russel J.S.* Report on Waves. – British Association Reports. – 1844.

ШТРИХИ ДО БІОГРАФІЇ ІГОРЯ-ПЕТРА СИРОЇДА

Він завжди мав надію, що я опишу колись наші захоплюючі подорожі – на Кавказ, на Памір, у Карпати. А останнього свого літа, року Божого 2003, попросив якось: «Напиши про мене». Ці слова бігли попереду стрімкої розлуки – закінчувалася мандрівка білим світом мудрого і чесного друга. Отож, все почалося з народження – у Львові, 17 жовтня 1942 року. Охрещений подвійним іменем Ігор-Петро 14 листопада 1942 року у храмі Успіння Пречистої Діви Марії. За кілька днів перед народженням онука помер на останній своїй парохії у селі Радохінцях о. Іван Яремко, подавши взірець служіння Богові та людям.

Роздумуючи над долею своїх батьків, Ігор любив казати, що це було покоління вчителів, яке зуміло вистояти на любові до Тараса Шевченка й Івана Франка. Ігореві батьки справді відзначалися неабиякою духовною стійкістю: так їх виховували, такими робили їх життєві й історичні обставини.

Мама, Дарія Яремко (1918–2003), донька священика, вчилася в Українському інституті для дівчат у Перемишлі (матура – 1936 року), у Варшавському педагогічному інституті, пам'ятаючи впродовж усього життя настанови своїх вчителів, зосібна Уляни Кравченко, Ольги Кульчицької, Олени Кульчицької, пластунський гарт легендарної Цьопи (Кекилії) Паліїв.

Батько, Петро Сироїд (1907–1995), походив з міцного селянського роду і доклав зусиль, щоб закінчити Сокальську вчительську семінарію, Вищу торговельну школу у Кракові, не пропускаючи і лекцій з літератури Богдана Лепкого. Петро Якимович учителював, працював у банку, згодом багато років викладав фінанси і кредит у Львівському торгово-економічному інституті.

Незаперечним авторитетом для Ігоря була бабця по мамі – Зеновія Лісковацька-Яремко, вчителька математики й малювання, яка 11 років відбула в Кемеровській області разом з наймолодшою донькою Марійкою. Повернулася до Львова, зберігши цікавість до життя і бажання малювати.

До них часто навідувалася батькова родина, зупинявся надовше стрийко Іван Сироїд, який умів розповідати дітям –

Ігореві й сестрі Зені – про найрізноманітніші речі. Влітку дорога вела на Сокальщину, на чисті тоді ще води Бугу, Рати, Солокії. У давньому Волсвині (історично – Волхвині), у гарному місці, яке донині називається Палаттям, пахла хлібом і медом простора дерев'яна хата бабуні Настуні й діда Якима.

І була ще родина за кордоном. З трудової еміграції – стрийко Андрій у Канаді, з політичної – мамині сестри, тети Іванка й Софійка в США. Про них Ігор довідався, як тільки навчився зберігати таємниці.

Початок шкільної науки – у львівській СШ № 4, яка у 1949 р. була чоловічою. Згодом запровадили спільне навчання для хлопців і дівчат, тому Ігоря з частиною учнів перевели до СШ № 28. Вчився дуже добре, мав безліч захоплень – його діяльна натура вимагала різних занять. У середніх класах, як жартома згадувалося, став «технічним вундеркіндом». Очевидно, це привело його у 1956 році до Львівського електромеханічного технікуму (пізніше технікум радіоелектроніки). Тут подобалося все – предмети, які треба було вивчати, вимогливі викладачі, можливість грати в духовому оркестрі, виробнича практика на заводі телеграфної апаратури, а також стипендія. Мама зі зворушенням згадувала про несподіваний подарунок від Ігоря – гроші на плащ. Після технікуму, зі серпня 1960 до листопада 1961 року, працював за скеруванням у Львівському політехнічному інституті – спочатку механіком в науково-дослідному секторі, а пізніше лаборантом кафедри електричних машин та апаратів. Водночас поступив на вечірнє відділення цього інституту за спеціальністю теоретична радіотехніка. Якраз тоді зацікавився математикою, але попереду, починаючи з листопада 1961 року, було ще три роки військової служби.

Військова частина стояла у Хмельницькому. Від армійських буднів рятувала музика – керував духовим оркестром, який виступав усюди, навіть у дитячому садочку. Через якийсь час доручили завідувати складом топографічних карт – тоді вже міг і читати, й обдумувати прочитане. Запам'яталися довгі переїзди до Казахстану, на полігон. Стояла несамовита спека, усіх розморило, а він продовжував дискусію з капітаном, уродженцем Середньої Азії, що не раз скептично висловлювався про можливості українського характеру. Капітан сердився, бо не міг дозволити собі заснути передостаннім, а Ігор сприймав цю ситуацію як своєрідне змагання на витривалість.

Листи з армії сповнені любов'ю до рідних і прихованим смутком. З них також добре помітно, як початок 60-х років XX століття скорегував родинне життя – бабця повернулася до Львова, і батькам, які за тодішнього режиму мали багато підстав вважатися неблагонадійними, вперше, мабуть, стало трохи спокійніше.

Улітку 1964 року Ігор приїхав у відпустку й успішно склав іспити на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка. Це означало звільнення з армії на кілька місяців раніше.

Навчання в університеті (1964–1969) – особливо приємний період свідомого вибору, вільної волі, внутрішньої дисципліни. Вчився захоплено й завзято, з великою пошаною ставився до своїх викладачів. Починаючи з третього курсу, відвідував семінар з функціонального аналізу. На IV курсі – незабутня практика у Києві, в Інституті математики. Намагався тоді не пропускати вистав київської опери, концертів у столичній філармонії, бо музика завжди мала для Ігоря велике значення, зрештою, багато важили й художня література, і малярство. Мав таку вдачу, що тішився кожним талантом.

Навчання в університеті поєднувалося зі спортом. Студентське літо минало здебільшого в альпіністському таборі. Їх удвох з Романом Скобалом, інженером і вірним другом з армії, жартома називали збірною Західної України з альпінізму. Спортивні інтереси накладалися на захоплення грузинською історією, культурою, звичаями. Серед альпіністів були представники княжих грузинських родів. Вони поводилися стримано й привітно. Такі подорожі мали, звісно, і суто український ритуальний момент – як, наприклад, відвідування музею Лесі Українки в Сурамі.

У 1969 році закінчив університет за двома спеціальностями – обчислювальна математика й функціональний аналіз – і вступив в аспірантуру на кафедру математичного (тепер математичного і функціонального) аналізу до професора В.І. Лянце.

Коли ми зустрілися на початку 1970 року, Ігор був аспірантом. Його перший подарунок для мене – книга «Лесь Курбас. Спогади сучасників» з написом: «Людина живе не хлібом єдиним. Кожен несе у собі потаємну мрію». Цей перефразований євангельський сенс подано з посиланням на Володимира Лучука, якому дуже симпатизував. Незабаром Ігор приїхав до Галича-Залукви знайомитися з моєю найближчою родиною: батьком, сестрою. Він завжди весело згадував реакцію на розповіді про свої подорожі моєї мовнообдарованої тети: «То ви, Ігоре, пройдисвіт?» Ми одружилися 11 липня 1971 року.

Робота над кандидатською дисертацією посувалася повільно. Ігор не любив ділитися невдачами, а для особливо цікавих існували якісь «відчепні» моменти. Переді мною зокрема математика поставала насамперед в ідеальному плані – як вершина наук, як поезія думки. Від Ігоря можна було дізнатися про історію української й світової математики, про математичні школи, історичні відкриття й «вічні» задачі. Тому імена видатних математиків існують тепер у моїй свідомості як своєрідний код нашого спільного життя.

Після закінчення аспірантури, на запрошення академіка Я. С. Підстригача, про що згадувалося з незмінною вдячністю, Ігор влаштувався на посаду молодшого наукового співробітника Львівського філіалу математичної фізики Інституту математики АН УРСР. Згодом з цього філіалу виріс теперішній Інститут прикладних проблем механіки й математики НАН України. І весь наступний творчий шлях пов'язаний з цим Інститутом, починаючи з будівництва самого корпусу на Науковій. У нас удома зберігається «куфайка», спеціально куплена для будівельних робіт. І коли я спробувала комусь її віддати, наші доні мені заборонили: «Лиши. То татове».

Водночас Ігор якось особливо вмів зберігати найтепліші почуття до нашої *alma mater*. Завжди активно відвідував семінар з функціонального аналізу, охоче відгукувався на різні форми співпраці з Університетом, а коли мав нагоду там викладати, то робив це з великою приємністю.

Над своїми науковими планами працював наполегливо й послідовно. Вже у 1975 році мав ті наукові результати, які лягли в основу його кандидатської дисертації. Але захист дуже затягнувся – декілька років ця робота пролежала в Баку, в Інституті математики. Єдиною користю з цієї ситуації були хіба що подорожі літаком у незнаний край, радість повернення і подарунки дітям, як синій слоник «Варшулька», що надовго став улюбленим домашнім персонажем.

Кандидатську дисертацію – «Несамоспряжене збурення неперервного спектру для оператора Дірака» за спеціальністю

01.01.01 – математичний аналіз – захистив 21 березня 1984 року в Донецьку, в Інституті прикладної математики і механіки.

Ігор жив математикою. На пересічний погляд, він не здобув ні високих посад, ні високих титулів. Але насправді все було дещо інакше. І не лише тому, що глибоко цінуючи можливість «сродної» праці, був задоволений з посади старшого наукового співробітника. Його статті читали, на них посилалися, їх перекладали іншими мовами, він мав гарних друзів у багатьох наукових осередках.

Математичний доробок Ігоря-Петра Сироїда, як зазначено в науковому звіті за 2002 рік, – 76 опублікованих і 16 поданих до друку статей. Пам'ятаю, як одного разу сказав, що має вже 80 публікацій. Він намагався оприлюднити всі свої наукові результати і терпляче витримував критику, якої не бракувало, хоча не бракувало і добрих слів. Останній раз вибрався до Києва, щоб зустрітися з професором Л.П. Нижником, якому редакція «Українського математичного журналу» передала на рецензію кілька статей. Мабуть, Ігореві вдалося тоді переконати свого рецензента, бо незабаром прийшли відгуки, у яких, попри окремі зауваження щодо оформлення, сказано про «нові, цікаві», «нові, оригінальні» результати.

Незважаючи на різні прикрі обставини, пов'язані з хворобами, з втратою рідних, Ігореві в останні роки вдалося, за його словами, реалізувати давні, ще з юних літ задуми, і він сприймав це як великий Божий дар.

Згадував дитинство і тішився, що їх з мамою у 1947 році не вивезли до Сибіру, хоча були вже на машині. І тішився, що народився внук Ілько; йому розповідав у залуківському саду про Моцарта – «маленького хлопчика, який писав велику музику».

Життя мало різні барви. Ігор умів бути щасливим і вчив цього мистецтва інших, насамперед мене і наших дітей. Він не любив з'ясовувати стосунків, шукати винних. Був вимогливим і великодушним, іронічним, веселим і щедрим на похвалу, беззастережно вірив у наші таланти, і тому ми ставали кращими. Його моральна філософія вибудовувалася на твердій настанові – не нарікати, а щось робити.

Завдяки Ігореві нас завжди чекали гори – не встигали ми повернутися з одного походу, а він ретельно готувався до іншого. Наші донечки були ще цілком малі – носив на плечах, прикривав голівки від сонця, виливав воду з черевичків, варив кашу. Ми ходили разом на Зелемінь, Парашку, Високий Верх, Ґрофу, Сивулю, Попадю, Менчул, Попа-Івана, Говерлу, Петрос, Близницю – з Гребенова, Корчина, Славська, Осмолоди, Дземброні, Лазещини, Чорногорським і Свидовецьким хребтами. У 1988 році їздили на Кавказ – через перевал Донгуз-Орун переходили з Терскола до Местії, зупинялися в незабутній долині ріки Накри, оглядали стародавні сванські вежі.

У Карпатах Ігор часто ходив сам. Дуже уважний до великого світу природи, намагався не порушувати його законів, тому святкував кожний погідний день, тому його вражала, але не лякала розбурхана стихія. І йому з-поміж нас у горах найбільше щастило – просто на стежку вибігав олень, обходив стороною ведмідь, зустрічалися й прощалися гарні люди. І наукові ідеї, як не раз зізнавався, з’являлися також у горах.

Французький філософ Рене Декарт казав, що добре прожив той, хто добре переховувався. Частково ця фраза стосується й Ігоря. Зрештою, «переховуванням» якоюсь мірою стала й сама математика – в інших умовах міг би займатися філософією чи історією. Але цим наукам зумисно прокладали неправдиві дороги, а він хотів побудувати своє життя на правді і на праці.

Ігор був також і відкритим, і якось майже по-дитинному безпосереднім, щиро виявляючи свою пошану до кожного, хто з його погляду робив добрі справи, хто зберігав і творив українську духовну історію у її найширшому спектрі. Це особливо проявилося у межах Наукового товариства ім. Т. Шевченка – у радісному переживанні повернення в українську науку цілого ряду славних імен, у святі довгоочікуваних особистих зустрічей.

За своє творче життя Ігор-Петро Сироїд подолав багато відстаней, щоб виступити на тій чи іншій конференції. І одна з них стала останньою – VI Боголюбівські читання у Чернівцях. 27 серпня 2003 р., після доповіді йому стало недобре. «Я щось перегрівся», – цими словами вибачився і попрощався зі своїми колегами. Дочекався, поки я доберуся до Чернівецької лікарні, і вранці-рано 28 серпня, у день Успіння Пресвятої Богородиці, перейшов у той вимір і у той простір, який аж за «третьою зорею» чи, можливо, набагато ближче.

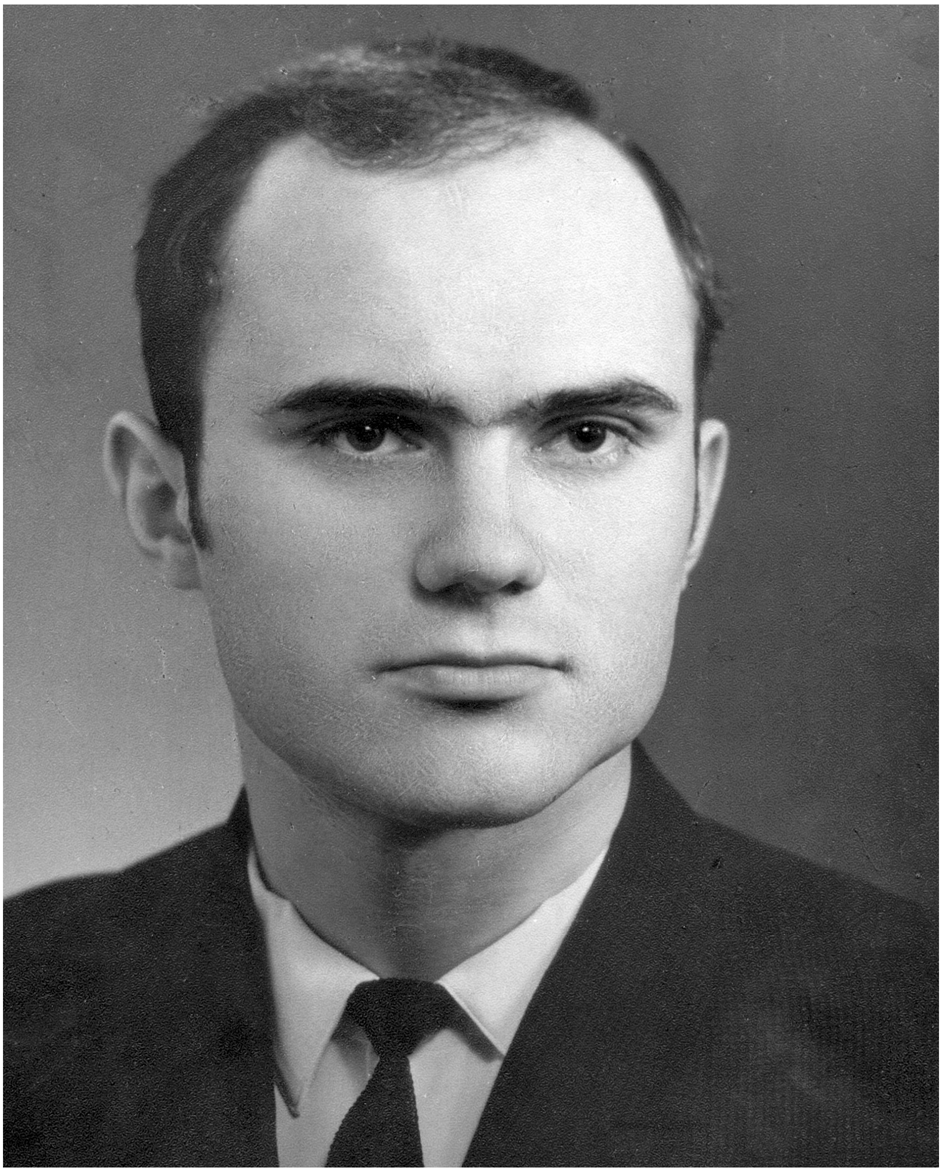
Ми відбули останню спільну подорож до Львова – через Галич, поминаючи Крилос і Залукву, і звечорілі серпневі поля.

Вибираючись до Чернівець, Ігор переконався, чи не погубилися книги його улюбленого Антуана де Сент-Екзюпері. І коли незабаром появилося повідомлення, що знайдено літак цього незвичайного письменника, виникло відчуття якоїсь особливої містичної єдності світу. Зрештою, цієї єдності в Ігоревому житті не бракувало. Згадував, як, піднімаючись на Ґрофу вранці 1 серпня 2000 року, виразно почув дитячий крик, тоді якраз народився наш Ілько. 30 квітня 2004 року прийшов на світ другий онук – Ігор-Теодосій. І ця подія стала для родини знаком Божого Допусту, знаком того, що земна гора веде до гори небесної.

Ігор залишив великий науковий архів, в якому, правду кажучи, завжди панував порядок. Можна собі уявити, що сталося з тим порядком, коли зсувалися поспішно письмові столи, коли порушилося все, бо не стало того, хто пильнував порядку. І ось, немов ужинок, завбачливо залишено кілька варіантів цієї праці, яка, незважаючи на те, що більшість результатів опубліковано в окремих статтях, писалася як втілення цілісного задуму. І коли рукопис вже було підготовлено до друку, я побачила папку з написом «Вступ до книги», а в ній кілька просвітлених узагальнень, у яких талант споглядання й розуміння поєднується з цілеспрямованою освітою, з набутим досвідом. Отже, з цього власне мав появитися інший вступ. Жаль, але дорікнути Ігореві нічим не можу. Добре знаю, що він не змарнував свого часу.

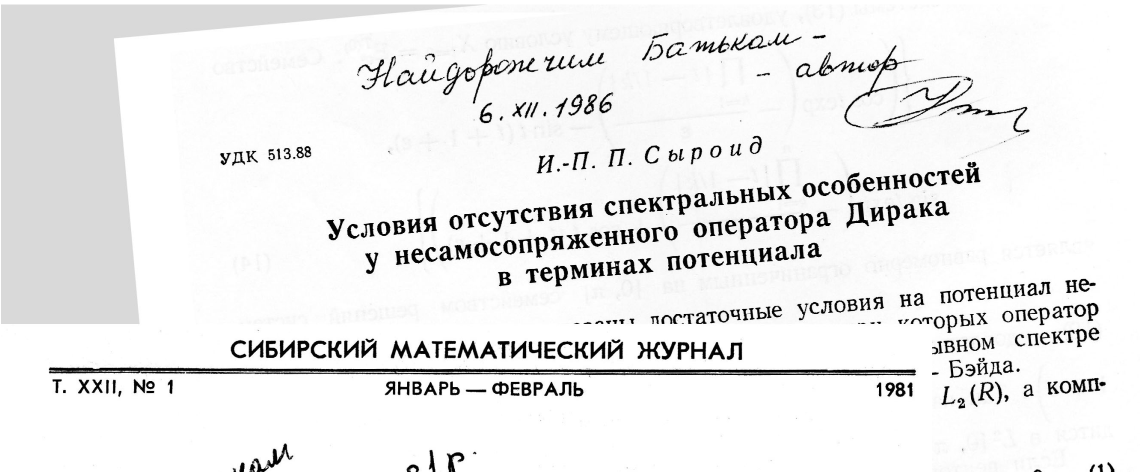
Насамкінець хочу подякувати тим Ігоревим і моїм друзям, які зробили все, щоб книжка побачила світ. Їх імена так чи інакше вписані тут. А самій книжці бажаю доброзичливого, вдумливого, вдячного Читача.

Богдана Сироїд



Ігор – Петро Сироїд – студент механіко-математичного факультету

Батько – Петро Сироїд *Мати – Дарія Яремко*



Найдорожчим Батькам – автор
6.XII.1986

УДК 513.88

И.-П. П. Сыроид

Условия отсутствия спектральных особенностей у несамосопряженного оператора Дирака в терминах потенциала

, 1986, т. 38, № 3

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

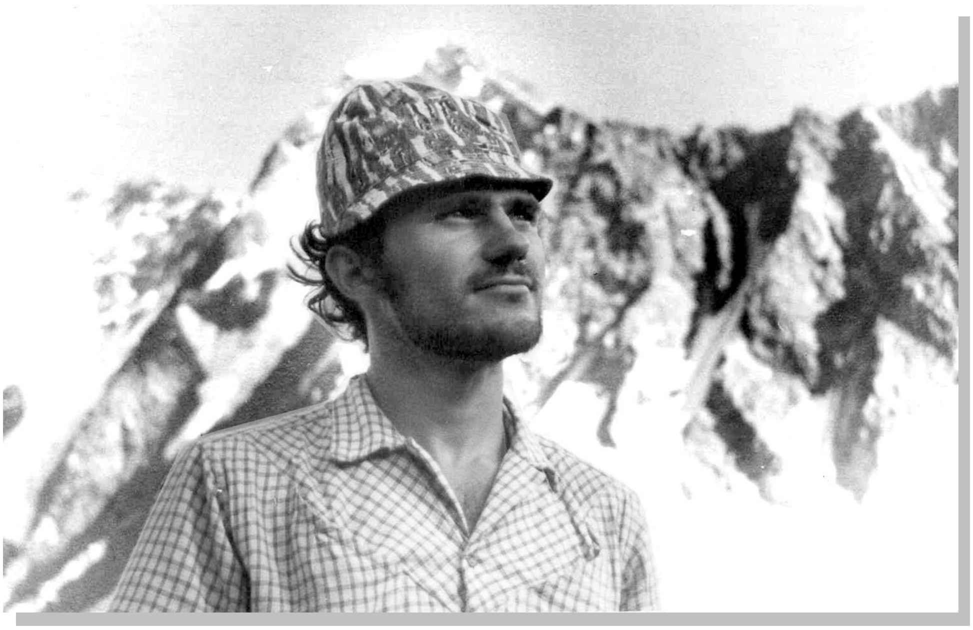
Т. XXII, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1981

Моїм Батькам
автор
4 травня 1981 р

УДК 513.88

И.-П. П. СЫРОИД

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ У НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В ТЕРМИНАХ ПОТЕНЦИАЛА



Ігор–Петро Сироїд. Ельбрус, 1966

“Kinderball” у Будинку вчених, Львів, 1981

На Дунаї у Будапешті, серпень 2002

За роботою, жовтень 2002

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$[T, S] = TS - ST$ – комутатор пари;
$\{M_i\}$ – ієрархія Лакса;
$D(L)$ – область визначення оператора L;
$R(L)$ – область значень оператора L;
E_3 $(= \mathbb{R}^3)$ – дійсний тривимірний простір;
$T|E$ – звуження оператора T на многовид E;
$\mathrm{sp}(T)$ – спектр оператора T;
$C_0^\infty(E_3)$ – простір фінітних нескінченно диференційовних функцій $E_3 \to \mathbb{C}$;
МОЗР – метод оберненої задачі розсіяння;
КПМОЗР – комплексний параметричний МОЗР.

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ
І МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

Ігор-Петро СИРОЇД

Комплексний метод оберненої задачі розсіяння і дослідження несамоспряжених пар Лакса для системи Кортевеґа – де Фріза

Затверджено до друку вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (*протокол № 7 від 07.07.05*)

Редактор О. Г. Сторож

Комп'ютерна верстка М.М. Хом'яка

Підписано до друку 08.08.05.
Формат 60×90/16. Папір офс. Друк офс.
Ум. друк. арк. 13,0. Обл.-вид. арк. 12,31.
Наклад 300 прим. Зам. _____________

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, **79 060, Львів, вул. Наукова, 3-б**

Друкарня ТзОВ «Простір-М»
79 000, Львів, вул. Чайковського, 27