УДК 519.6

А. В. Кунинець[1], М. В. Кутнів[1,3✉], Н. В. Хоменко[2]

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ

Для задачі Штурма – Ліувілля побудовано триточкові різницеві схеми високого порядку точності на нерівномірній сітці. Запропоновані різницеві схеми для кожного вузла x_j, $j = 1, 2, \ldots, N-1$, сітки вимагають розв'язування двох задач Коші для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на відрізках $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) та $[x_j, x_{j+1}]$ (назад), що здійснюється за один крок за допомогою будь-якого однокрокового методу: розкладу в ряд Тейлора або методу Рунґе – Кутта порядку точності $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ (n – ціле додатне, $[\cdot]$ – ціла частина числа). Встановлено оцінку точності триточкових різницевих схем і розроблено алгоритм знаходження їх розв'язку. Проведено чисельні експерименти, які підтверджують теоретичні висновки.

Ключові слова: *задача Штурма – Ліувілля, точна триточкова різницева схема, триточкова різницева схема довільного порядку точності, ітераційний метод Ньютона.*

Вступ. У роботах [10, 11] для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку побудовано точну триточкову різницеву схему (ТТРС), а також розроблено та обґрунтовано алгоритмічну реалізацію точної схеми через усічені триточкові різницеві схеми будь-якого порядку точності. Для задачі Штурма – Ліувілля точні та триточкові різницеві схеми довільного порядку точності було запропоновано в [4, 7]. Однак у загальному випадку коефіцієнти таких різницевих схем виражаються через багатократні інтеграли від коефіцієнтів диференціального рівняння, а тому виникають труднощі при їх практичній реалізації. У роботах [8, 9] показано, що коефіцієнти ТТРС і праву частину в довільному вузлі сітки можна виразити через розв'язки чотирьох допоміжних задач Коші, кожна з яких наближено розв'язується за один крок будь-яким однокроковим методом. Цей підхід знайшов широке застосування і для випадку нелінійних крайових задач, а також у практичних розрахунках (див., наприклад, [2, 3, 6, 14]).

Ця робота є продовженням статті [1]. У ній побудовано та обґрунтовано триточкові різницеві схеми (ТРС) довільного порядку точності, коефіцієнти яких виражаються через розв'язки допоміжних задач Коші. Доведено збіжність і встановлено порядок точності цих схем. Розроблено ітераційний метод Ньютона для знаходження власних значень і власних функцій ТРС. Чисельні експерименти підтверджують теоретичні висновки. Різницеві схеми високого порядку точності для задачі Штурма – Ліувілля особливо ефективні при знаходженні власних чисел і власних функцій великого номера.

1. Точна триточкова різницева схема для задачі Штурма – Ліувілля. Розглянемо задачу Штурма – Ліувілля, яка полягає в знаходженні значень параметра λ (власних значень), для яких крайова задача

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u(x) = -\lambda r(x)u(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0 \qquad (1)$$

має нетривіальні розв'язки $u(x)$ (власні функції). Тут коефіцієнти $k(x)$, $q(x)$, $r(x) \in Q[0,1]$ – кусково-неперервні функції, які задовольняють умови

$$0 < C_1 \le k(x) \le C_2, \qquad 0 \le q(x) \le C_3, \qquad 0 < C_4 \le r(x) \le C_5, \qquad (2)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – сталі.

✉kutniv@yahoo.com

Введемо нерівномірну сітку

$$\hat{\omega}_h = \left\{ x_j \in (0,1),\ j = 1,2,\dots,N-1,\quad x_j - x_{j-1} = h_j > 0,\ \sum_{j=1}^{N} h_j = 1 \right\},$$

$$\hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, \qquad h = \max_{1 \le j \le N} h_j,$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x)$, $q(x)$, $r(x)$ збігалися з вузлами сітки $\hat{\omega}_h$. Множину всіх точок розриву позначимо через σ і припустимо, що N таке, що $\sigma \subset \hat{\omega}_h$. Будемо вважати, що в точках розриву розв'язок задачі (1) задовольняє умови неперервності

$$u(x_j - 0) = u(x_j + 0), \qquad k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_j-0} = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_j+0}. \tag{3}$$

Означимо шаблонні функції $v_\alpha^j(x,\lambda)$, $\alpha = 1,2$, як розв'язки задач Коші

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dv_\alpha^j}{dx}\right] - q(x)v_\alpha^j(x,\lambda) + \lambda r(x) v_\alpha^j(x,\lambda) = 0, \quad x \in (x_{j-1}, x_{j+1}), \tag{4}$$

$$v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda) = 0, \qquad k(x)\frac{dv_\alpha^j(x,\lambda)}{dx}\bigg|_{x=x_j+(-1)^\alpha} = (-1)^{\alpha+1},$$

$$\alpha = 1,2, \qquad j = 1,2,\dots,N-1, \tag{5}$$

для яких також будемо вимагати виконання умов (3).

Для задачі (1) розглянемо точну триточкову різницеву схему (ТТРС) (див. [1]):

$$(a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - (d - \lambda\rho)y = 0, \qquad x \in \hat{\omega}_h, \qquad y_0 = y_N = 0, \tag{6}$$

де

$$y_{\bar{x},j} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, \qquad y_{\hat{x},j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{\hbar_j}, \qquad a_j = \left[\frac{1}{h_j} v_1^j(x_j,\lambda)\right]^{-1}, \tag{7}$$

$$d_j - \lambda\rho_j = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha+1} \left[v_\alpha^j(x_j,\lambda)\right]^{-1} \left[m_\alpha^j(x_j,\lambda) + (-1)^\alpha\right],$$

$$m_\alpha^j(x,\lambda) = k(x)\frac{dv_\alpha^j(x,\lambda)}{dx}. \tag{8}$$

Отже, для обчислення коефіцієнтів a_j, $d_j - \lambda\rho_j$ ТТРС (6) для будь-якого вузла x_j сітки $\hat{\omega}_h$ потрібно розв'язати дві задачі Коші:

$$\frac{dv_\alpha^j(x,\lambda)}{dx} = \frac{m_\alpha^j(x,\lambda)}{k(x)},$$

$$\frac{dm_\alpha^j(x,\lambda)}{dx} = (q(x) - \lambda r(x))v_\alpha^j(x,\lambda), \qquad x \in \left(x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}\right), \tag{9}$$

$$v_\alpha^j\left(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda\right) = 0, \qquad m_\alpha^j\left(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda\right) = (-1)^{\alpha+1},$$

$$\alpha = 1,2, \qquad j = 1,2,\dots,N-1, \tag{10}$$

з гладкими коефіцієнтами: при $\alpha = 1$ на інтервалі $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) і при $\alpha = 2$ на інтервалі $[x_j, x_{j+1}]$ (назад).

2. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності. Кожну з вказаних задач Коші будемо розв'язувати чисельно за один крок будь-яким однокроковим методом (розкладу в ряд Тейлора або методом Рунґе – Кутта) порядку точності $\bar{n} = 2[(n+1)/2]$ (n – ціле додатне, $[\cdot]$ – ціла частина числа). Тоді

$$v_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda) = v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda) + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha} \times$$

$$\times \Phi_1\big(x_{j+(-1)^\alpha}, v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda), m_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda), (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big) =$$

$$= (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_1\big(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big), \qquad (11)$$

$$m_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda) = m_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda) + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha} +$$

$$+ \Phi_2\big(x_{j+(-1)^\alpha}, v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda), m_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda), (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big) =$$

$$= (-1)^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha} \times$$

$$\times \Phi_2\big(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big), \qquad (12)$$

де $\Phi_1(x,u,y,h)$, $\Phi_2(x,u,y,h)$ – функції приросту, а функції $v_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda)$, $m_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda)$ апроксимують відповідно значення $v_\alpha^j(x_j,\lambda)$, $m_\alpha^j(x_j,\lambda)$ з порядком точності $\bar{n}$.

У випадку методу рядів Тейлора маємо

$$\Phi_1\big(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big) =$$

$$= \frac{(-1)^{\alpha+1}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} +$$

$$+ \sum_{p=3}^{\bar{n}} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^{p-1}}{p!}\frac{d^p v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda)}{dx^p},$$

$$\Phi_2\big(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\frac{q(x)-\lambda r(x)}{k(x)}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} +$$

$$+ \sum_{p=3}^{\bar{n}} \frac{\left[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right]^{p-1}}{p!}\frac{d^p m_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda)}{dx^p},$$

а у випадку методів Рунґе – Кутта

$$\Phi_1\big(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big) = b_1 g_1 + b_2 g_2 + \ldots + b_s g_s,$$

$$\Phi_2\big(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big) = b_1 \bar{g}_1 + b_2 \bar{g}_2 + \ldots b_s \bar{g}_s,$$

$$g_i = \frac{(-1)^{\alpha+1}\left(1 + h_{j-1+\alpha}\sum_{p=1}^{i-1} a_{ip}\bar{g}_p\right)}{k\big(x_{j+(-1)^\alpha} + c_i(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\big)},$$

$$\bar{g}_i = (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha} \sum_{p=1}^{i-1} a_{ip} g_p \Big[q\big(x_{j+(-1)^\alpha} + c_i (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\big) -$$

$$- \lambda r\big(x_{j+(-1)^\alpha} + c_i (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\big)\Big], \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Якщо $k(x)$, $q(x)$, $r(x)$ – достатньо гладкі, і методи (11), (12) мають порядок точності $\bar{n}$, то справджуються рівності (див., наприклад, [12, с. 168])

$$v_\alpha^j(x_j, \lambda) = v_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j, \lambda) + \big[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\big]^{\bar{n}+1} \psi_\alpha^j\big(x_{j+(-1)^\alpha}\big) + O\big(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+2}\big), \quad (13)$$

$$m_\alpha^j(x_j, \lambda) = m_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j, \lambda) + \big[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\big]^{\bar{n}+1} \tilde{\psi}_\alpha^j\big(x_{j+(-1)^\alpha}\big) + O\big(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+2}\big). \quad (14)$$

Лемма 1. *Нехай виконуються умови* (2), $k(x) \in Q^{n+1}[0,1]$, $q(x)$, $r(x) \in \in Q^n[0,1]$ *і для чисельних методів* (11), (12) *задовольняються рівності* (13), (14). *Тоді справджуються співвідношення*

$$v_\alpha^j(x_j, \lambda) = v_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j, \lambda) + h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+1} \psi_1^{j-1+\alpha}\big(x_{j+(-1)^\alpha}\big) + O\big(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+2}\big), \quad (15)$$

$$m_\alpha^j(x_j, \lambda) = m_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j, \lambda) + h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+1} \tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}\big(x_{j+(-1)^\alpha}\big) + O\big(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+2}\big),$$

$$\alpha = 1, 2, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1. \quad (16)$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що функції $w_2^j(x_j, \lambda) = -v_2^j(x_j, \lambda)$ $\ell_2^j(x_j, \lambda) = -m_2^j(x_j, \lambda)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dw_2^j(x, \lambda)}{dx} = \frac{\ell_2^j(x, \lambda)}{k(x)},$$

$$\frac{d\ell_2^j(x, \lambda)}{dx} = \big(q(x) - \lambda r(x)\big) w_2^j(x, \lambda), \qquad x \in (x_j, x_{j+1}),$$

$$w_2^j(x_{j+1}, \lambda) = 0, \qquad \ell_2^j(x_{j+1}, \lambda) = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1,$$

для чисельного розв'язування якої застосуємо однокроковий метод

$$w_2^{(\bar{n})j}(x_j, \lambda) = -h_{j+1} \Phi_1\big(x_{j+1}, 0, 1, -h_{j+1}\big), \quad (17)$$

$$\ell_2^{(\bar{n})j}(x_j, \lambda) = 1 - h_{j+1} \Phi_2\big(x_{j+1}, 0, 1, -h_{j+1}\big), \quad (18)$$

причому, згідно з (13), (14), для $w_2^j(x_j, \lambda)$, $\ell_2^j(x_j, \lambda)$ справджуються рівності

$$w_2^j(x_j, \lambda) = -v_2^{(\bar{n})j}(x_j, \lambda) + h_{j+1}^{\bar{n}+1} \psi_2^j(x_{j+1}) + O\big(h_{j+1}^{\bar{n}+2}\big), \quad (19)$$

$$\ell_2^j(x_j, \lambda) = -m_2^{(\bar{n})j}(x_j, \lambda) + h_{j+1}^{\bar{n}+1} \tilde{\psi}_2^j(x_{j+1}) + O\big(h_{j+1}^{\bar{n}+2}\big). \quad (20)$$

Якщо у формулах (11), (12) для $\alpha = 1$ індекс j замінити на $j+1$, то отримаємо метод, приєднаним (див. [12, с. 230]) до якого буде метод (17), (18). Застосувавши теорему 8.4 з [12, с. 230], отримаємо

$$\psi_2^j\big(x_{j+(-1)^\alpha}\big) = -(-1)^{\bar{n}} \psi_1^{j+1}\big(x_{j+(-1)^\alpha}\big),$$

$$\tilde{\psi}_2^j\big(x_{j+(-1)^\alpha}\big) = -(-1)^{\bar{n}} \tilde{\psi}_1^{j+1}\big(x_{j+(-1)^\alpha}\big).$$

З рівностей (13), (14) і з того, що порядок методів $\overline{n}$ є числом парним, випливає твердження леми. ♦

Замість ТТРС (6)–(8) можна тепер скористатися ТРС рангу $\overline{n}$ вигляду

$$(a^{(\overline{n})}y_{\overline{x}}^{(\overline{n})})_{\hat{x}} - (d^{(\overline{n})} - \lambda\rho^{(\overline{n})})y^{(\overline{n})} = 0, \qquad x \in \hat{\omega}_h, \quad y_0^{(\overline{n})} = y_N^{(\overline{n})} = 0\,, \tag{21}$$

де

$$a_j^{(\overline{n})} = \left[\frac{1}{h_j} v_1^{(\overline{n})j}(x_j, \lambda)\right]^{-1}, \tag{22}$$

$$d_j^{(\overline{n})} - \lambda\rho_j^{(\overline{n})} = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[v_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)\right]^{-1}\left[m_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda) + (-1)^\alpha\right]. \tag{23}$$

Для встановлення точності ТРС (21)–(23) необхідна

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми* 1. *Тоді*

$$\left|a_j^{(\overline{n})} - a_j\right| \le Mh^{\overline{n}}\,, \tag{24}$$

$$d_j - \lambda\rho_j - d_j^{(\overline{n})} + \lambda\rho_j^{(\overline{n})} =$$

$$= -\left\{ h_j^{\overline{n}}\, k(x)\tilde{\psi}_1^j(x)\Big|_{x = x_j - 0}\right\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_{j+1}^{\overline{n}+1} - h_j^{\overline{n}+1}}{\hbar_j}\right). \tag{25}$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (24) випливає з (15):

$$a_j^{(\overline{n})} - a_j = \frac{h_j\left[v_1^j(x_j,\lambda) - v_1^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)\right]}{v_1^j(x_j,\lambda)v_1^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)} = O(h_j^{\overline{n}})\,.$$

Тепер доведемо (25). Спочатку зауважимо, що

$$d_j - \lambda\rho_j - d_j^{(\overline{n})} + \lambda\rho_j^{(\overline{n})} =$$

$$= \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[\frac{m_\alpha^j(x_j,\lambda) + (-1)^\alpha}{v_\alpha^j(x_j,\lambda)} - \frac{m_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda) + (-1)^\alpha}{v_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)}\right]. \tag{26}$$

Використовуючи (15), (16), а також співвідношення

$$v_\alpha^j(x_j,\lambda) = v_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda) + O(h_{j-1+\alpha}^{\overline{n}+1}) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{k(x_{j+(-1)^\alpha})} + O(h_{j-1+\alpha}^2)\,,$$

отримаємо

$$\frac{m_\alpha^j(x_j,\lambda) + (-1)^\alpha}{v_\alpha^j(x_j,\lambda)} - \frac{m_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda) + (-1)^\alpha}{v_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)} =$$

$$= \frac{v_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)\left[m_\alpha^j(x_j,\lambda) - m_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)\right]}{v_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)v_\alpha^j(x_j,\lambda)} +$$

$$+ \frac{\left[v_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda) - v_\alpha^j(x_j,\lambda)\right]\left[m_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda) + (-1)^\alpha\right]}{v_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\lambda)v_\alpha^j(x_j,\lambda)} =$$

$$= \frac{h_{j-1+\alpha}^{\overline{n}+1}\tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\overline{n}+2})}{\dfrac{h_{j-1+\alpha}}{k(x_{j+(-1)^\alpha})} + O(h_{j-1+\alpha}^2)} +$$

$$+\left[-(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha})+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+2})\right]\times$$

$$\times\frac{\dfrac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^2}{2}\left.\dfrac{q(x)-\lambda r(x)}{k(x)}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}+O(h_{j-1+\alpha}^3)}{\left[\dfrac{h_{j-1+\alpha}}{k(x_{j+(-1)^\alpha})}+O(h_{j-1+\alpha}^2)\right]^2}=$$

$$=h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}}k(x_{j+(-1)^\alpha})\tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha})+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+1}).$$

Підставляючи цю останню рівність у (26), матимемо

$$d_j-\lambda\rho_j-d_j^{(\bar{n})}+\lambda\rho_j^{(\bar{n})}=$$

$$=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}}k(x_{j+(-1)^\alpha})\tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha})\right]+$$

$$+O\left(\frac{h_{j+1}^{\bar{n}+1}-h_j^{\bar{n}+1}}{\hbar_j}\right)=\frac{1}{\hbar_j}\left[h_j^{\bar{n}}k(x_{j-1}+0)\tilde{\psi}_1^{j}(x_{j-1}+0)-\right.$$

$$\left.-h_{j+1}^{\bar{n}}k(x_{j+1}-0)\tilde{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1}-0)\right]+O\left(\frac{h_{j+1}^{\bar{n}+1}-h_j^{\bar{n}+1}}{\hbar_j}\right). \qquad (27)$$

Отже, оскільки

$$k(x_{j-1}+0)\tilde{\psi}_1^j(x_{j-1}+0)=k(x_j-0)\tilde{\psi}_1^j(x_j-0)+O(h_j),$$

то співвідношення (25) випливає з (27). ♦

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми* 1. *Тоді для похибки різницевої схеми* (21)–(23) *будуть виконуватися нерівності*

$$\left\|y_k-y_k^{(\bar{n})}\right\|_C\le M_1h^{\bar{n}}, \qquad (28)$$

$$\left|\lambda_k-\lambda_k^{(\bar{n})}\right|\le M_2h^{\bar{n}}, \qquad (29)$$

де $\|y\|_C=\max\limits_{j=1,2,\dots,N-1}|y_j|$, M_1,M_2 *– сталі, що не залежать від* h.

Д о в е д е н н я. На основі умов теореми до ТТРС (6)–(8) і ТРС (21)–(23) можна застосувати теорему 1 з роботи [1] про коефіцієнтну стійкість, поклавши $\tilde{y}(x)=y^{(\bar{n})}(x)$, $\tilde{a}(x)=a^{(\bar{n})}(x)$, $\tilde{d}(x)=d^{(\bar{n})}(x)$, $\tilde{\rho}(x)=\rho^{(\bar{n})}(x)$. Записуючи в цих термінах величини η, ψ^* (див. формулу (32) з [1]), отримаємо

$$(1,|\eta|]=\sum_{\xi\in\hat{\omega}_h^+}h(\xi)\left|a(\xi)-a^{(\bar{n})}(\xi)\right|\cdot\left|y_{\bar{x}}^{(\bar{n})}(\xi)\right|\le M_3h^{\bar{n}},\qquad \hat{\omega}_h^+=\hat{\omega}_h\cup x_N, \qquad (30)$$

$$(1,|\psi^*|)=\sum_{\xi\in\hat{\omega}_h}\hbar(\xi)\left|d^{(\bar{n})}(\xi)-\lambda\rho^{(\bar{n})}(\xi)-d(\xi)+\lambda\rho(\xi)\right|\cdot\left|y^{(\bar{n})}(\xi)\right|=$$

$$=\sum_{\xi\in\hat{\omega}_h^+}h^{\bar{n}+1}(\xi)k(\xi)\left|\tilde{\psi}_1^j(\xi)\right|\cdot\left|y_{\bar{\xi}}^{(\bar{n})}(\xi)\right|+O(h^{\bar{n}+1})\le M_4h^{\bar{n}}. \qquad (31)$$

Звідси, згідно з теоремою 1 з роботи [1], випливає оцінка (29).

Для доведення (28) зауважимо спочатку, що для випадку $d\equiv 0$ з огляду на (25) справджується співвідношення

$$\rho_j^{(\bar n)} - \rho_j = -\frac{1}{\lambda}\left\{ h_j^{\bar n}\, k(x) \overset{\circ}{\tilde{\psi}}{}_1^{j}(x) \Big|_{x=x_j-0} \right\}_{\hat x} + O\left(\frac{h_{j+1}^{\bar n+1} - h_j^{\bar n+1}}{\hbar_j} \right),$$

де $h_{j-1+\alpha}^{\bar n+1} \overset{\circ}{\tilde{\psi}}{}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha})$ – головний член похибки у формулі (16), який відповідає випадку $d \equiv 0$. Звідси, використовуючи формулу підсумовування частинами, отримаємо

$$\left|(\rho, (y^{(\bar n)})^2) - (\rho^{(\bar n)}, (y^{(\bar n)})^2)\right| \le \left|(\rho - \rho^{(\bar n)}, (y^{(\bar n)})^2)\right| \le$$

$$\le \sum_{\xi \in \hat\omega_h^+} h^{\bar n+1}(\xi) k(\xi) \left| \overset{\circ}{\tilde{\psi}}{}_1^{j}(\xi) \right| (y^{(\bar n)}(\xi))_{\bar \xi}^2 + O(h^{\bar n+1}) \le M_5 h^{\bar n}. \qquad (32)$$

Отже, враховуючи нерівності (30)–(32), за теоремою 1 з роботи [1] отримаємо оцінку (28). ♦

Для знаходження розв'язку ТРС (21)–(23) застосуємо ітераційний метод Ньютона. Лінеаризувавши (21), ітераційний метод Ньютона запишемо у вигляді

$$(a^{(\bar n)} \nabla y_{\bar x}^{(\bar n,k)})_{\hat x, j} - (d_j^{(\bar n)} - \lambda^{(k-1)} \rho_j^{(\bar n)}) \nabla y_{j+(-1)^\alpha}^{(\bar n,k)} + \nabla \lambda^{(k)} \rho_j^{(\bar n)} y_{j+(-1)^\alpha}^{(\bar n,k-1)} =$$

$$= -(a^{(\bar n)} y_{\bar x}^{(\bar n,k-1)})_{\hat x, j} + (d_j^{(\bar n)} - \lambda^{(k-1)} \rho_j^{(\bar n)}) y_j^{(\bar n,k-1)}, \qquad \alpha = 1,2,$$

$$\nabla y_0^{(\bar n,k)} = \nabla y_N^{(\bar n,k)} = 0, \qquad \lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \nabla \lambda^{(k)},$$

$$y_j^{(\bar n,k)} = y_j^{(\bar n,k-1)} + \nabla y_j^{(\bar n,k)}, \quad j = 1,2,\dots,N-1, \qquad k = 1,2,\dots. \qquad (33)$$

3. Чисельний приклад. Розв'яжемо задачу Штурма – Ліувілля (див. [5])

$$u'' + \lambda x u = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0. \qquad (34)$$

Зауважимо, що для цієї задачі $k(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = x$. Точним розв'язком задачі є власні значення

$$\lambda_m = \left(\frac{3}{2} j_{1/3,m}\right)^2, \qquad m = 1,2,\dots,$$

та відповідні їм власні функції

$$u_m(x) = \sqrt{x}\, I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_m}\, x^{3/2}\right), \qquad m = 1,2,\dots,$$

де $I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k}}{k!\,\Gamma(v+k+1)}$ – функції Бесселя першого роду, $j_{v,m}$ – нулі функції Бесселя $I_v(x)$ (див., наприклад, [13]).

Для чисельного розв'язування задачі (34) використаємо ТРС 6-го порядку точності на *рівномірній* сітці $\omega_h = \{x_j = jh,\ j = 0,1,\dots,N,\ h = 1/N\}$. Допоміжні задачі Коші (4), (5) будемо розв'язувати методом Рунґе – Кутта 6-го порядку точності (див., наприклад, [12, с. 202]).

Результати розв'язання задачі (34) наведено в табл. 1. Для практичної оцінки швидкості збіжності використано величини

$$\mathrm{err} = \|y - u\|_{0,\infty,\omega_h}, \qquad p = \log_2 \frac{\|y-u\|_{0,\infty,\omega_h}}{\|y-u\|_{0,\infty,\omega_{h/2}}}.$$

Таблиця 1

m	N	$\lvert\lambda-\lambda^h\rvert$	err	p
1	8	$1.9474\cdot10^{-5}$	$1.2480\cdot10^{-5}$	
	16	$1.5075\cdot10^{-7}$	$1.8794\cdot10^{-7}$	6.0
	32	$3.3182\cdot10^{-9}$	$3.0301\cdot10^{-9}$	6.0
	64	$5.3252\cdot10^{-11}$	$4.7285\cdot10^{-11}$	6.0
2	8	1.1498	$2.9164\cdot10^{-2}$	
	16	$3.6500\cdot10^{-2}$	$4.5795\cdot10^{-3}$	6.0
	32	$2.2803\cdot10^{-4}$	$6.0020\cdot10^{-6}$	9.6
	64	$3.4531\cdot10^{-9}$	$6.5850\cdot10^{-9}$	9.8
	128	$6.0339\cdot10^{-11}$	$1.0302\cdot10^{-10}$	6.0
	256	$2.2737\cdot10^{-12}$	$1.5463\cdot10^{-12}$	6.1
3	8	$1.9366\cdot10^{-2}$	$3.1157\cdot10^{-2}$	
	16	$1.6976\cdot10^{-3}$	$5.3463\cdot10^{-4}$	5.9
	32	$1.3725\cdot10^{-5}$	$7.3420\cdot10^{-6}$	6.2
	64	$2.2226\cdot10^{-7}$	$1.1218\cdot10^{-7}$	6.0
	128	$3.4887\cdot10^{-9}$	$1.7458\cdot10^{-9}$	6.0
	256	$5.3518\cdot10^{-11}$	$2.7231\cdot10^{-11}$	6.0

Отже, чисельні результати підтверджують теоретичні висновки про 6-й порядок точності різницевої схеми.

Для порівняння див. [5], де наведено результати розв'язування задачі (34) за допомогою різницевої схеми другого порядку точності.

1. *Кунинець А. В., Кутнів М. В., Хоменко Н. В.* Алгоритмічна реалізація точної триточкової різницевої схеми для задачі Штурма – Ліувілля // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63,** № 1. – С. 37–51.
2. *Кутнив М. В.* Точные трехточечные разностные схемы для монотонных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их реализация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. – **40**, № 3. – С. 387–401.

   Те саме: *Kutniv M. V.* Accurate three-point difference schemes for second-order monotone ordinary differential equations and their implementation // Comput. Math. Math. Phys. – 2000. – **40**, No. 3. – P. 368–382.
3. *Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, № 1. – С. 45–60.

   Те саме: *Kutniv M. V., Makarov V. L., Samarskii A. A.* Accurate three-point difference schemes for second-order nonlinear ordinary differential equations and their implementation // Comput. Math. Math. Phys. – 1999. – **39**, No. 1. – P. 40–55.
4. *Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М.* Точная и усеченные разностные схемы для одного класса задач Штурма – Лиувилля с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 7. – С. 1265–1275.
5. *Макаров В. Л., Гураль М. М., Кутнів М. В.* Вагові оцінки точності різницевих схем для задачі Штурма – Ліувілля // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 1. – С. 7–22.

   Те саме: *Makarov V. L., Gural' M. M., Kutniv M. V.* Weight estimates of the accuracy of difference schemes for the Sturm–Liouville problem // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 1. – P. 1–25. – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3278-7.

6. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 3. – С. 538–543.
   Те саме: *Samarskii A. A., Makarov V. L.* On the realization of exact three-point difference schemes for second- order ordinary differential equations with piecewise smooth coefficients // Sov. Math. Dokl. – 1990. – **41**, No. 3. – P. 463–467.
7 *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 4. – С. 795–800.
8. *Приказчиков В. Г.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма–Лиувилля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – **9**, № 2. – С. 315–336.
   Те саме: *Prikazchikov V. G.* High-accuracy homogeneous difference schemes for the Sturm–Liouville problem // USSR Comput. Math. & Math. Phys. – 1969. – **9**, No. 2. – P. 76–106.– https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90095-0.
9. *Самарский А. А., Макаров В. Л.* О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 7. – С. 1254–1265.
   Те саме: *Samarskii A. A., Makarov V. L.* Realization of exact three–point difference schemes for second–order ordinary differential equations with piecewise–smooth coefficients // Differ. Equat. – 1991. – **26**, No. 7. – P. 922–930.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1961. – **1**, № 1. – С. 5–63.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1961. – **1**, № 3. – С. 425–440.
12. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – Москва: Мир, 1990. – 512 с.
   Те саме: *Hairer E., Norset S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987. –xii+482 p.
13. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции (формулы, графики, таблицы). – Москва: Наука, 1964. – 344 с.
14. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Makarov V. L., Kutniv M. V.* Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs. – Springer–Basel AG: Birkhäuser, 2011. – xi+247 p. – Int. Series of Numer. Math. – Vol. 159.
   – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0107.

THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES OF HIGH ACCURACY ORDER FOR STURM – LIOUVILLE PROBLEM

For the Sturm – Liouville problem, three-point difference schemes of high order of accuracy on a irregular grid are constructed. The proposed difference schemes for each of grid node require solving two Cauchy problems for second order linear ordinary differential equations on intervals $[x_{j-1}, x_j]$ *(forward) and* $[x_j, x_{j+1}]$ *(backward), which is carried out in one step using any one-step method: Taylor series or Runge – Kutta order of accuracy* $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ *(* n *is a positive entire and* $[\,\cdot\,]$ *denotes the entire part of the argument in the brackets). The accuracy of three-point difference schemes is established and an algorithm for finding their solution is developed. Numerical experiments are carried out, which confirm the theoretical conclusions.*

Key words: *Sturm – Liouville problem, exact three-point difference scheme, three-point difference scheme of arbitrary order of accuracy, Newton's iterative method.*

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[3] Жешув. технолог. ун-т, Жешув, Польща

Одержано
03.08.20