

ЧИСЕЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ НЕУСТАЛЕНОГО ТЕПЛООВОГО СТАНУ ТРИШАРОВОГО ПОРОЖНИСТОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ЗА УМОВ СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Методом прямих з використанням консервативних різницевих схем за просторовою змінною нелінійну нестационарну крайову задачу теплопровідності для тришарового порожнистого циліндра зведено до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, яку розв'язано чисельно за допомогою формул диференціювання назад. Консервативну дискретизацію рівняння теплопровідності і граничних умов проведено інтегро-інтерполяційним методом. Досліджено вплив врахування температурної залежності теплофізичних характеристик вибраних матеріалів шарів на розподіл температурного поля у тришаровому циліндрі.

Ключові слова: нелінійна крайова задача, термочутливість, консервативні різницеві схеми, інтегро-інтерполяційний метод.

Вступ. При визначенні та дослідженні неусталеного розподілу температурного поля у багатошарових елементах конструкцій, що знаходяться в умовах високотемпературного нагріву, важливе значення має урахування залежності від температури теплофізичних характеристик матеріалів (термочутливості). Математична модель, яка базується на законі теплопровідності Фур'є, що описує такий фізичний процес у термочутливих тілах, значно ускладнюється за рахунок появи нелінійних рівнянь теплопровідності та зростання кількості умов контакту між шарами. Подання таких задач через зрагальнені функції пов'язано з математичними труднощами і є мало дослідженими без накладання обмежень на характер зміни теплофізичних характеристик матеріалів і за умов складного теплообміну. У роботах [2, 5] знайдено аналітично-числові розв'язки нелінійних нестационарних крайових задач теплопровідності для циліндра з покриттям і двошарової пластини за простої нелінійності теплофізичних характеристик матеріалів та складного теплообміну. Такі задачі без накладання обмежень на температурні залежності теплофізичних характеристик матеріалів за умов конвективного чи конвективно-променевого теплообміну ефективно можна розв'язувати методом скінченних різниць.

Запропонована у цій роботі методика визначення розподілу температурного поля у тришаровому порожнистому циліндрі включає зведення нелінійної крайової задачі теплопровідності методом прямих до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь і чисельне розв'язування отриманої напівдискретної задачі. Проведений огляд методів чисельного розв'язування такого типу задач показує, що існує велика кількість робіт, присвячених знаходженню розв'язків квазілінійних рівнянь з гладкими коефіцієнтами. У класі розривних коефіцієнтів, як показано в [6], тільки консервативні різницеві схеми є збіжними. Тому дискретизацію за просторовою змінною граничних умов і рівняння теплопровідності, що містить розривні функції у вигляді кусково-неперервних коефіцієнтів, що описують залежні від температури теплофізичні характеристики матеріалів шарів, доцільно проводити за допомогою методу балансу (інтегро-інтерполяційного методу), який приводить до різницевої схем, що збігаються у класі розривних коефіцієнтів. У роботі [1] побудовано консервативні різницеві схеми на рівномірній сітці для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну із середовищами сталої температури.

[✉]dept19@iapmm.lviv.ua

Розглянемо задачу визначення розподілу температурного поля у круговому тришаровому порожнистому циліндрі за умов лінійної залежності від часу температури внутрішньої поверхні циліндра, конвективного теплообміну на зовнішній поверхні з середовищем змінної в часі температури та умов ідеального теплового контакту на межі контакту шарів. Вважаємо, що теплофізичні характеристики матеріалів шарів є функціями від температури. Напівдискретну задачу побудовано на нерівномірній сітці, яку доцільно вибирати так, щоб точки контакту шарів циліндра співпадали з вузлами сітки. Отриману таким чином задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь розв'язано чисельно.

1. Постановка задачі. Розглянемо порожнистий тришаровий циліндр з внутрішнім радіусом r_0 і зовнішнім – R ($r_2 - r_1$ – товщина проміжного шару). Температура циліндра t залежить від радіуса r та часу τ . Рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат (r, φ, z) в одновимірній постановці для визначення нестационарного температурного поля в такому циліндрі має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) = c(r, t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad r_0 < r < R, \quad (1)$$

де

$$\lambda(r, t) = \begin{cases} \lambda^{(1)}(t), & r_0 \leq r < r_1, \\ \lambda^{(2)}(t), & r_1 < r < r_2, \\ \lambda^{(3)}(t), & r_2 < r \leq R, \end{cases} \quad c(r, t) = \begin{cases} c^{(1)}(t), & r_0 \leq r < r_1, \\ c^{(2)}(t), & r_1 < r < r_2, \\ c^{(3)}(t), & r_2 < r \leq R, \end{cases} \quad (2)$$

$\lambda^{(j)}(t)$, $c^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, 3$, – залежні від температури коефіцієнт теплопровідності та об'ємна теплоємність матеріалу j -го шару.

Початкову температуру циліндра вважаємо сталою і рівною t_p :

$$t|_{\tau=0} = t_p. \quad (3)$$

На межі контакту шарів циліндра $r = r_j$, $j = 1, 2$, виконуються умови неперервності температури і теплового потоку:

$$t|_{r=r_j-0} = t|_{r=r_j+0}, \quad \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_j-0} = \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_j+0}. \quad (4)$$

На внутрішній поверхні циліндра $r = r_0$ задана температура, яка є лінійною функцією часу:

$$t|_{r=r_0} = t_p + v_1 \tau, \quad (5)$$

де v_1 – швидкість нагрівання внутрішньої поверхні циліндра.

Через зовнішню поверхню циліндра $r = R$ здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого є лінійною функцією часу:

$$\lambda^{(3)}(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} + \alpha (t|_{r=R} - (t_p + v_2 \tau)) = 0, \quad (6)$$

де α – коефіцієнт теплообміну з поверхні $r = R$, v_2 – швидкість зростання температури зовнішнього середовища.

2. Методика розв'язування задачі. Запропонована методика розв'язування нелінійної крайової задачі (1)–(6) включає консервативну дискретизацію за змінною r на нерівномірній сітці рівняння теплопровідності (1) та граничних умов (5), (6) інтегро-інтерполяційним методом з подальшим чисельним розв'язуванням отриманої напівдискретної задачі.

Для зручності подальших викладок перейдемо до відносних величин: температури $T = \frac{t - t_p}{t_p}$, координати $\rho = \frac{r}{R}$ і часу $Fo = \frac{\lambda_{t_p}^{(3)} \tau}{c_{t_p}^{(3)} R^2}$. Теплофізич-

ні характеристики матеріалу у кожному шарі подамо у вигляді

$$\lambda^{(j)}(t) = \lambda_{t_p}^{(j)} \Lambda^{(j)}(T), \quad c^{(j)}(t) = c_{t_p}^{(j)} C^{(j)}(T), \quad (7)$$

де $\lambda_{t_p}^{(j)}$, $c_{t_p}^{(j)}$ – коефіцієнт теплопровідності та об'ємна теплоємність матеріалу j -го шару за початкової температури t_p , а $\Lambda^{(j)}(T)$, $C^{(j)}(T)$ – безрозмірні функції, $j = 1, 2, 3$.

У введених відносних величинах задача (1)–(6) з урахуванням (7) набуде вигляду

$$\frac{\Lambda_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \Lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = C_0 C(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad (8)$$

де

$$\Lambda(\rho, T) = \begin{cases} \Lambda^{(1)}(T), & \rho_0 \leq \rho < \rho_1, \\ \Lambda^{(2)}(T), & \rho_1 < \rho < \rho_2, \\ \Lambda^{(3)}(T), & \rho_2 < \rho \leq 1, \end{cases} \quad C(\rho, T) = \begin{cases} C^{(1)}(T), & \rho_0 \leq \rho < \rho_1, \\ C^{(2)}(T), & \rho_1 < \rho < \rho_2, \\ C^{(3)}(T), & \rho_2 < \rho \leq 1, \end{cases}$$

$$\Lambda_0 = \begin{cases} \Lambda_0^{(1)} = \frac{\lambda_{t_p}^{(1)}}{\lambda_{t_p}^{(3)}}, & \rho_0 \leq \rho < \rho_1, \\ \Lambda_0^{(2)} = \frac{\lambda_{t_p}^{(2)}}{\lambda_{t_p}^{(3)}}, & \rho_1 < \rho < \rho_2, \\ \Lambda_0^{(3)} = 1, & \rho_2 < \rho \leq 1, \end{cases} \quad C_0 = \begin{cases} C_0^{(1)} = \frac{c_{t_p}^{(1)}}{c_{t_p}^{(3)}}, & \rho_0 \leq \rho < \rho_1, \\ C_0^{(2)} = \frac{c_{t_p}^{(2)}}{c_{t_p}^{(3)}}, & \rho_1 < \rho < \rho_2, \\ C_0^{(3)} = 1, & \rho_2 < \rho \leq 1, \end{cases}$$

$$T|_{\rho=\rho_j-0} = T|_{\rho=\rho_j+0},$$

$$\Lambda_0^{(j)} \Lambda^{(j)}(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_j-0} = \Lambda_0^{(j+1)} \Lambda^{(j+1)}(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_j+0}, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$T|_{\rho=\rho_0} = T_p + V_1 Fo, \quad (10)$$

$$\Lambda^{(3)}(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} + Bi (T|_{\rho=1} - (T_p + V_2 Fo)) = 0, \quad (11)$$

$$T|_{Fo=0} = 0. \quad (12)$$

Тут

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_{t_p}^{(3)}}, \quad V_1 = \frac{v_1 c_{t_p}^{(3)} R^2}{\lambda_{t_p}^{(3)}} t_p, \quad V_2 = \frac{v_2 c_{t_p}^{(3)} R^2}{\lambda_{t_p}^{(3)}} t_p.$$

Введемо на відрізку $[\rho_0, 1]$ нерівномірну сітку $\hat{\omega}_h = \{\rho_i \in (\rho_0, 1), i = 0, 1, \dots, n\}$ так, щоб точки розриву функцій $\Lambda(\rho, T)$, $C(\rho, T)$ збігалися з вузлами сітки ρ_i . Крок сітки $h_i = \rho_i - \rho_{i-1}$ залежить від номера вузла i .

Позначимо $\rho_{i-1/2} = \rho_i - 0.5h_i$, $\rho_{i+1/2} = \rho_i + 0.5h_{i+1}$, а також

$$w(\rho, T, Fo) = \rho \Lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial \rho}. \quad (13)$$

Запишемо рівняння балансу тепла на відрізку $[\rho_{i-1/2}, \rho_{i+1/2}]$:

$$\begin{aligned} w\left(\rho_{i+1/2}, \frac{T_i + T_{i+1}}{2}, \text{Fo}\right) - w\left(\rho_{i-1/2}, \frac{T_i + T_{i-1}}{2}, \text{Fo}\right) = \\ = \frac{C_0}{\Lambda_0} \int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} C(\rho, T) \rho \frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} d\rho. \end{aligned} \quad (14)$$

Щоб отримати з (14) різницеве рівняння, замінимо w та інтеграл, який містить T , лінійними комбінаціями значень безрозмірного приросту температури T у вузлах сітки j -го шару. При цьому візьмемо найпростішу апроксимацію T в околі вузла ρ_i , поклавши $T = \text{const} = T_i$ на відрізку $[\rho_{i-1/2}, \rho_{i+1/2}]$. Тоді інтеграл у правій частині (14) замінимо його наближеним значенням

$$\int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} C(\rho, T) \rho \frac{\partial T}{\partial \text{Fo}} d\rho \approx h_i C(\rho_i, T_i) \rho_i \frac{\partial T_i}{\partial \text{Fo}}, \quad (15)$$

де $h_i = (h_i + h_{i+1})/2$ і $C(\rho_i, T_i) = C^{(j)}(T_i)$, а якщо вузол ρ_i співпадає з точкою дотику шарів, тобто на межі контакту j -го та $(j+1)$ -го шарів циліндра, $j = 1, 2$, де $C(\rho, T)$ є розривною, необхідно брати півсуму граничних значень зліва і справа:

$$C(\rho_i, T_i) = \frac{1}{2} (C^{(j)}(\rho_i - 0, T_i) + C^{(j)}(\rho_i + 0, T_i)).$$

Для того щоб отримати різницевий вираз для (13) на відрізку $[\rho_{i-1}, \rho_i]$, проінтегрувавши за змінною ρ рівність

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{w(\rho, T, \text{Fo})}{\rho \Lambda(\rho, T)},$$

отримаємо

$$T_i - T_{i-1} = \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \frac{w(\rho, T, \text{Fo})}{\rho \Lambda(\rho, T)} d\rho.$$

Поклавши

$$w(\rho, T, \text{Fo}) \approx w\left(\rho_{i-1/2}, \frac{T_i + T_{i-1}}{2}, \text{Fo}\right) = w_{i-1/2} = \text{const},$$

запишемо

$$T_i - T_{i-1} = w_{i-1/2} \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \frac{d\rho}{\rho \Lambda(\rho, T)}.$$

Тоді наближене значення $w_{i-1/2}$, яке входить у рівняння балансу (14), матиме вигляд

$$w_{i-1/2} \approx d_i(T) \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i} = d_i(T) T_{\rho, i}, \quad (16)$$

де

$$d_i(T) = \left(\frac{1}{h_i} \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \frac{d\rho}{\rho \Lambda(\rho, T)} \right)^{-1}. \quad (17)$$

Замінивши інтеграл у (17) його наближеним значенням, отримаємо $d_i(T)$ у вигляді

$$d_i(T) \approx \rho_{i-1/2} \Lambda(\rho_{i-1/2}, (T_i + T_{i-1})/2). \quad (18)$$

Аналогічно наближене значення $w_{i+1/2}$, яке входить у рівняння балансу (14), матиме вигляд

$$w_{i+1/2} \approx d_{i+1}(T) \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} = d_{i+1}(T) T_{\bar{\rho}, i}. \quad (19)$$

Підставивши отримані вирази (15), (16) і (19) у рівняння (14), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dT_i}{dFo} = \frac{\Lambda_0}{\bar{h}_i \rho_i C_0 C(\rho_i, T_i)} \left(d_{i+1}(T) \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - d_i(T) \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i} \right), \quad (20)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

де $d_i(T)$ визначається або (18), або рівністю

$$d_i(T) = \frac{1}{2} [\rho_i \Lambda(\rho_i, T_i) + \rho_{i-1} \Lambda(\rho_{i-1}, T_{i-1})].$$

Гранична умова (10) на внутрішній поверхні циліндра $\rho = \rho_0$ задовольняється точно, а значить, її різницевий аналог матиме вигляд $T_0 = V_1 Fo$.

Побудуємо напівдискретний аналог граничної умови конвективного теплообміну через зовнішню поверхню циліндра $\rho = 1$. Для цього проінтегруємо рівняння теплопровідності (8) у безрозмірних величинах на відрізьку $[\rho_{n-1/2}, 1]$:

$$w(1, T_n, Fo) - w\left(\rho_{n-1/2}, \frac{T_n + T_{n-1}}{2}, Fo\right) = \frac{C_0^{(3)}}{\Lambda_0^{(3)}} \int_{\rho_{n-1/2}}^1 C(\rho, T) \rho \frac{\partial T}{\partial Fo} d\rho,$$

де

$$w\left(\rho_{n-1/2}, \frac{T_n + T_{n-1}}{2}, Fo\right) = d_n(T) \frac{T_n - T_{n-1}}{h_n}$$

(див. (16)), а інтеграл замінимо наближеним виразом

$$\int_{\rho_{n-1/2}}^1 C(\rho, T) \rho \frac{\partial T}{\partial Fo} d\rho \approx \frac{h_n}{2} C(1, T_n) \frac{\partial T_n}{\partial Fo}.$$

З граничної умови (11), врахувавши позначення (13), отримаємо, що

$$w(1, T_n, Fo) \approx -\text{Bi}(T|_{\rho=1} - (T_p + V_2 Fo)).$$

Таким чином, різницевий аналог граничної умови (11) буде мати вигляд

$$\frac{dT_n}{dFo} = \frac{2\Lambda_0^{(3)}}{h_n C_0^{(3)} C(1, T_n)} \left(-\text{Bi}(T|_{\rho=1} - (T_p + V_2 Fo)) - d_n(T) \frac{T_n - T_{n-1}}{h_n} \right). \quad (21)$$

Отже, нелінійну крайову задачу (8)–(12) зведено до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$T_0 = V_1 Fo,$$

$$\frac{dT_i}{dFo} = \frac{\Lambda_0}{\bar{h}_i \rho_i C_0 C(\rho_i, T_i)} \left(d_{i+1}(T) \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - d_i(T) \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\frac{dT_n}{dFo} = \frac{2}{h_n C(1, T_n)} \left(-\text{Bi}(T|_{\rho=1} - (T_p + V_2 Fo)) - d_n(T) \frac{T_n - T_{n-1}}{h_n} \right),$$

$$T_i(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (22)$$

Систему (22) розв'язуємо чисельно за допомогою формул диференціювання назад (використовуємо стандартні пакети програм), задаючи залежності від температури теплофізичних характеристик матеріалів шарів циліндра.

3. Числові дослідження. Використовуючи отриманий розв'язок задачі теплопровідності, дослідимо вплив температурної залежності теплофізичних характеристик (коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності) заданих матеріалів шарів циліндра на величину і розподіл температури. Як числовий приклад розглянуто безмежний тришаровий порожнистий циліндр, виготовлений з *кераміки* з внутрішнім *тонким вольфрамовим шаром*. Приймали, що внутрішній радіус циліндра $\rho_0 = 0.5$, зовнішній – $\rho = 1$, а вольфрамовий шар знаходиться між циліндричними поверхнями $\rho_1 = 0.748$ і $\rho_2 = 0.752$. Температура внутрішньої поверхні циліндра змінюється з часом: $T|_{\rho=\rho_0} = 0.7 \text{Fo}$, а через зовнішню поверхню $\rho = 1$ відбувається конвективний теплообмін з середовищем, температура якого є функцією часу: $T_c = 0.5 \text{Fo}$. Експериментальні температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності та об'ємних теплоємностей матеріалів шарів вибрано з діапазону температур $20 \div 600^\circ\text{C}$ [3, 8] та позначені індексами зверху: *кераміки* – індексами (1) та (3), а *вольфраму* – індексом (2):

$$\begin{aligned} \lambda_{t_p}^{(1)} &= \lambda_{t_p}^{(3)} = 16.8 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), \\ \lambda_{t_p}^{(2)} &= 163.91 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), \\ c_{t_p}^{(1)} &= c_{t_p}^{(3)} = 2921816 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}), \\ c_{t_p}^{(2)} &= 254281.52 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}). \end{aligned} \quad (23)$$

Залежності $\Lambda^{(j)}(T)$, $C^{(j)}(T)$, що входять в (7), проапроксимовано такими квадратичними функціями відносно безрозмірної температури T [7, 9]:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1),(3)}(T) &= 1 - 0.45437 T + 0.044447 T^2, \\ \Lambda^{(2)}(T) &= 1 - 0.180547 T + 0.261882 T^2, \\ C^{(1),(3)}(T) &= 1 + 0.044408 T + 0.01612 T^2, \\ C^{(2)}(T) &= 1 + 0.07159 T - 0.012964 T^2. \end{aligned}$$

Розв'язано відповідну задачу теплопровідності для нетермочутливого тришарового порожнистого циліндра при сталих теплофізичних характеристиках (23), вибраних за початкової температури $t_p = 20^\circ\text{C}$.

Результати числових досліджень розподілу температурного поля наведено у вигляді графіків на рис. 1, 2. На поданих графіках суцільні лінії відповідають значенням температури, отриманим з урахуванням температурних залежностей коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності матеріалів шарів циліндра, а штрихові – за сталих їх значень, вибраних за початкової температури.

На рис. 1 зображено графіки розподілу відносної температури T у тришаровому порожнистому циліндрі вздовж відносної радіальної координати ρ для значень відносного часу $\text{Fo} = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ при $\text{Bi} = 0.5$.

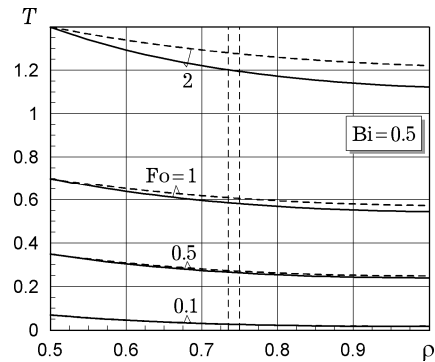


Рис. 1

Залежність температури від часу Fo на внутрішній $\rho = 0.5$ та зовнішній $\rho = 1$ поверхнях циліндра, а також у внутрішньому вольфрамовому шарі при $\rho = 0.75$ для значення $Bi = 1$ ілюструють графіки на рис. 2.

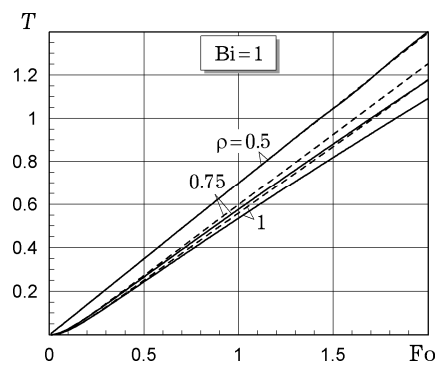


Рис. 2

Слід зауважити, що з метою перевірки достовірності отриманих результатів обчислено розподіл температури у розглядуваному термочутливому тришаровому порожнистому циліндрі для випадку, коли зовнішня поверхня теплоізолювана, а температура внутрішньої – змінюється з часом $T(\rho_0, Fo) = 0.75 Fo$. Значення температури для заданого значення Fo збігаються з отриманими у роботі [4] за умов асимптотичного теплового режиму.

Висновки. Запропоновано методичку визначення неусталеного розподілу температурного поля у термочутливих багат шарових елементах конструкцій, що знаходяться в умовах високотемпературного нагрівання за складного теплообміну. Обчислена максимальна розбіжність між значеннями температури у тришаровому безмежному порожнистому термочутливому циліндрі та аналогічному нетермочутливому циліндрі для вибраних матеріалів шарів (кераміки та вольфраму) становить 7% у вольфрамовому шарі та 9% на зовнішній поверхні циліндра для $Fo = 2$. Це свідчить про необхідність врахування температурної залежності теплофізичних характеристик матеріалів при визначенні розподілу температурного поля.

1. Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М., Кутнів М. В. Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 66–77.
2. Гарматій Г. Ю., Попович В. С. Моделювання і визначення неусталеного термопружного стану двошарової термочутливої пластини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 131–138.
 The same: *Harmatii G. Yu., Popovych V. S. Modeling and determination of the nonsteady thermoelastic state of a two-layer thermosensitive plate // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 162–172.*

3. Зиновьев В. Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: Справочник. – Москва: Металлургия, 1989. – 384 с.
4. Калинин Б., Попович В. Напряжений стан багатощарового термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму // *Машинознавство*. – 2005. – № 2 (92). – С. 22–30.
5. Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2001. – **37**, № 6. – С. 39–44.
Te same: *Kushnir R. M., Popovych V. S., Harmatii H. Yu. Analytic-numerical solution of contact problems of thermoelasticity for thermosensitive bodies // Mater. Sci.* – 2001. – **37**, No. 6. – P. 893–901.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
Te same: *Samarskii A. A. The theory of difference schemes.* –New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. – xiii+761 p.
7. *Свойства и применение металлов и сплавов для электровакуумных приборов: Справ. пособие / Под общ. ред. Р. А. Нилендера.* – Москва: Энергия, 1973. – 336 с.
8. *Petzold A., Ulbricht J. Aluminiumoxid. Rohstoff – Werkstoff – Werkstoffkomponente.* – Leipzig: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1991. – 281 S.
9. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. Numerical recipes: The art of scientific computing.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. – 1262 p.

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЦИЛИНДРА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Методом прямых с использованием консервативных разностных схем нелинейная нестационарная краевая задача теплопроводности для трехслойного полого цилиндра сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решена численно помощью формул дифференцирования назад. Консервативная дискретизация по пространственной переменной уравнения теплопроводности и граничных условий проведена интегро-интерполяционным методом. Исследовано влияние температурной зависимости теплофизических характеристик выбранных материалов слоев на распределение температурного поля в трехслойном цилиндре.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, термочувствительность, консервативные разностные схемы, интегро-интерполяционный метод.

NUMERICAL DETERMINATION OF UNSTEADY THERMAL STATE OF A THREE-LAYER HOLLOW HEAT-SENSITIVE CYLINDER UNDER COMPLEX HEAT EXCHANGE

The nonlinear nonstationary boundary value problem of heat conduction for a three-layer hollow cylinder by the method of lines using the conservative difference scheme is reduced to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, which is solved numerically by the formulas of backward differentiation. Conservative discretization with respect to spatial variable of the heat conduction equation and boundary conditions is performed by the integro-interpolation method. The influence of the temperature dependence of the thermophysical characteristics of the chosen materials of the layers on the temperature field distribution in a three-layer cylinder is investigated.

Key words: nonlinear boundary value problem, thermosensitivity, conservative difference scheme, integro-interpolation method.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
17.02.20