

НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ ПЛИТИ ЗА НЕЛІНІЙНОЇ ГРАНИЧНОЇ УМОВИ НА ОДНІЙ ІЗ ПОВЕРХОНЬ

Запропоновано метод визначення температурних полів у плиті з урахуванням теплового випромінювання, температурної залежності теплофізичних характеристик, густин поверхневих та об'ємних джерел тепла за нерівномірного розподілу початкової температури. Задачі теплопровідності з використанням перетворення Кірхгофа, функції Гріна, узагальнених функцій і лінійних сплайнів зведено до розв'язання рекурентного нелінійного алгебричного рівняння відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на відповідній обмежувальній поверхні. Наведено результати числових досліджень.

Ключові слова: термочутлива плита, теплове випромінювання, нестационарне температурне поле, перетворення Кірхгофа, функція Гріна, узагальнені функції, лінійні сплайни.

У роботах [1, 2] запропоновано спосіб визначення температурних полів у півпросторі і плиті з урахуванням широкого спектра чинників, що зумовлюють нелінійність відповідних задач теплопровідності. Підхід передбачає використання перетворення Кірхгофа, відповідних функцій Гріна лінійних задач теплопровідності, лінійних сплайнів і розв'язання рекурентних систем нелінійних алгебричних рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа у вузлах сплайна на обмежувальних поверхнях і значень її похідної за часом на внутрішніх плоскопаралельних поверхнях. Числові дослідження засвідчили збіжність і стійкість методу [3, с. 29]. Інші способи розв'язування нелінійних задач теплопровідності викладені, зокрема, в [5–7], див. також цитовану в [2] літературу.

Нижче проілюструємо підхід до розв'язування нелінійних задач теплопровідності для плити, згідно з яким, на відміну від [1, 2], не потрібно обчислювати значення похідної від змінної Кірхгофа за часом.

1. Формулювання задачі. Нехай обмежувальна поверхня $\tilde{z} = 0$ плити, що займає область $0 \leq \tilde{z} \leq \tilde{z}_1$ і має початкову температуру $t_0 T_0(\tilde{z})$, нагрівається шляхом конвективного теплообміну з середовищем зі змінною у часі температурою $t_{c0} T_{c0}(\tau)$ і тепловим потоком густини $q_0 q(T, \tau)$. Крім того, у плиті діють внутрішні джерела тепла густини $W_0 W(T, \tilde{z}, \tau)$. Одночасно з поверхні $\tilde{z} = 0$ відводяться теплові потоки власного випромінювання згідно з законом Стефана – Больцмана. При цьому температура поверхні $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ змінюється за законом $t_{c1} T_{c1}(\tau)$. Визначимо одновимірне нестационарне температурне поле плити з урахуванням температурних залежностей коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t(T) = \lambda_0 \Lambda(T)$, об'ємної теплоємності $c_v(T) = c_0 C(T)$, коефіцієнта тепловіддачі $\alpha(T) = \alpha_0 \alpha_*(T)$ і ступеня чорноти поверхні плити $\varepsilon(T) = \varepsilon_0 \varepsilon_*(T)$. Тут множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.

За таких припущень задача теплопровідності у безрозмірних величинах матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\Lambda}(T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] = \bar{C}(T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial Fo} - Po \bar{W}(T, z, Fo), \quad (1)$$

[✉]dept19@iapmm.lviv.ua

$$\left(\bar{\Lambda}(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \text{Bi} \bar{\alpha}(\bar{T}) [\bar{T} - \bar{t}_{c0} \bar{T}_{c0}(\text{Fo})] - \right. \\ \left. - \text{Sk} \bar{\varepsilon}(\bar{T}) \bar{T}^4 + \text{Ki} \bar{q}(\bar{T}, \text{Fo}) \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

$$\bar{T} \Big|_{z=z_1} = \bar{t}_{c1} \bar{T}_{c1}(\text{Fo}), \quad (3)$$

$$\bar{T} \Big|_{\text{Fo}=0} = \bar{t}_0 \bar{T}_0(z), \quad (4)$$

де $\bar{T} = \frac{T}{T_s}$, $z = \frac{\tilde{z}}{\ell}$, $z_1 = \frac{\tilde{z}_1}{\ell}$, $\text{Fo} = \frac{a_0 \tau}{\ell^2}$, $a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0}$,

$$\text{Bi} = \frac{\ell \alpha_0}{\lambda_0}, \quad \text{Sk} = \frac{\ell \varepsilon_0 \sigma_0}{\lambda_0} T_s^3, \quad \text{Ki} = \frac{\ell q_0}{\lambda_0 T_s}, \quad \text{Po} = \frac{\ell^2 W_0}{\lambda_0 T_s},$$

$$\bar{t}_0 = \frac{t_0}{T_s}, \quad \bar{T}_0(z) = T_0(z\ell), \quad \bar{t}_{ck} = \frac{t_{ck}}{T_s}, \quad \bar{T}_{ck}(\text{Fo}) = T_{ck} \left(\frac{\ell^2 \text{Fo}}{a_0} \right), \quad k = 0, 1,$$

$$[\bar{\Lambda}(\bar{T}), \bar{C}(\bar{T}), \bar{\alpha}(\bar{T}), \bar{\varepsilon}(\bar{T})] = [\Lambda(T), C(T), \alpha_*(T), \varepsilon_*(T)] \Big|_{T=T_s \bar{T}},$$

$$\bar{q}(\bar{T}, \text{Fo}) = q \left(T_s \bar{T}, \frac{\ell^2 \text{Fo}}{a_0} \right), \quad \bar{W}(\bar{T}, z, \text{Fo}) = W \left(T_s \bar{T}, z\ell, \frac{\ell^2 \text{Fo}}{a_0} \right),$$

σ_0 – стала Стефана – Больцмана, T_s – характерна для задачі температура, ℓ – параметр, який має розмірність одиниці довжини.

2. Побудова розв'язку задачі. Застосовуючи перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{\bar{T}^*}^{\bar{T}} \bar{\Lambda}(\bar{T}) d\bar{T}$$

за припущення, що функція $\theta = \theta(\bar{T})$ має обернену $\bar{T}(z, \text{Fo}) = \bar{T}(\theta)$, задачу (1)–(4) зводимо до такої:

$$\frac{\partial^2 \theta(z, \text{Fo})}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta(z, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - w^t(z, \text{Fo}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = f^*(\text{Fo}), \quad \theta \Big|_{z=z_1} = \bar{\theta}_{c1}(\text{Fo}), \quad (6)$$

$$\theta \Big|_{\text{Fo}=0} = \theta_0(z), \quad (7)$$

де

$$w^t(z, \text{Fo}) = \left[\bar{a}(\bar{T}(\theta)) - 1 \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \text{Po} \bar{a}(\bar{T}(\theta)) \bar{W}(\bar{T}(\theta), z, \text{Fo}),$$

$$\bar{a}(\bar{T}(\theta)) = \frac{\bar{\Lambda}(\bar{T}(\theta))}{\bar{C}(\bar{T}(\theta))},$$

$$f^*(\text{Fo}) = \left\{ \text{Bi} \bar{\alpha}(\bar{T}(\theta)) [\bar{T}(\theta) - \bar{t}_{c0} \bar{T}_{c0}(\text{Fo})] + \right. \\ \left. + \text{Sk} \bar{\varepsilon}(\bar{T}(\theta)) \bar{T}^4(\theta) - \text{Ki}_0 \bar{q}_0(\bar{T}(\theta), \text{Fo}) \right\} \Big|_{z=0},$$

$$\theta_0(z) = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_0 \bar{T}_0(z)} \bar{\Lambda}(\bar{T}) d\bar{T}, \quad \bar{\theta}_{c1}(\text{Fo}) = \int_{\bar{T}_*}^{\bar{t}_{c1} \bar{T}_{c1}(\text{Fo})} \bar{\Lambda}(\bar{T}) d\bar{T},$$

$\bar{T}_* = \frac{T_*}{T_s}$, T_* – нижня межа діапазону температур, у якому змінюються теплофізичні характеристики (ТФХ).

Наступним кроком є отримання інтегрального подання розв'язку задачі (5)–(7) з використанням функції Гріна

$$G(z, \zeta, Fo) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(\mu_m, z)\Phi(\mu_m, \zeta)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 Fo}, \quad (8)$$

яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial G}{\partial Fo},$$

граничні і початкову умови

$$\left(\frac{\partial G}{\partial z} - Bi G \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad G|_{z=z_1} = 0, \quad G|_{Fo=0} = \delta(z - \zeta).$$

Тут

$$\Phi(\mu, z) = \cos \mu z + \frac{Bi}{\mu} \sin \mu z, \quad \mu^2 N(\mu) = (\mu^2 + Bi^2)z_1 + Bi,$$

μ_m – корені рівняння $\Phi(\mu, z_1) = 0$, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Після низки перетворень одержимо

$$\theta(z, Fo) = \vartheta_0(z, Fo) + \vartheta_w(z, Fo) - \vartheta_f(z, Fo) - \vartheta_c(z, Fo), \quad (9)$$

де

$$\vartheta_0(z, Fo) = \int_0^{z_1} \theta_0(\zeta) G(z, \zeta, Fo) d\zeta, \quad (10)$$

$$\vartheta_w(z, Fo) = \int_0^{Fo} \int_0^{z_1} w^t(\zeta, \xi) G(z, \zeta, Fo - \xi) d\zeta d\xi, \quad (11)$$

$$\vartheta_f(z, Fo) = \int_0^{Fo} f(\xi) G(z, 0, Fo - \xi) d\xi, \quad (12)$$

$$\vartheta_c(z, Fo) = \int_0^{Fo} \bar{\theta}_{c1}(\xi) \frac{\partial G(z, \zeta, Fo - \xi)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_1} d\xi,$$

$$f(Fo) = f^*(Fo) - Bi \theta(0, Fo). \quad (13)$$

Функції $\vartheta_w(z, Fo_q)$ і $\vartheta_f(z, Fo_q)$, які містять відповідні невідомі, визначаємо за таким алгоритмом. У співвідношенні (11) інтеграл за координатою записуємо як суму інтегралів від x_{j-1} до x_j (де $j = 1, 2, \dots, J$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_j = z_1$). У кожному з цих інтегралів функцію $w^t(\zeta, \xi)$ заміняємо відповідно на $w_j^t(\xi)$, де $w_j^t(\xi) \approx w^t(z_j^*, \xi)$, $z_j^* = (x_{j-1} + x_j)/2$, і остаточно функцію $\vartheta_w(z, Fo_q)$ подаємо у вигляді

$$\vartheta_w(z, Fo_q) = \sum_{j=1}^J \left[\int_0^{Fo_{q-1}} w_j^t(\xi) \beta_{0j}(z, Fo_q - \xi) d\xi + \int_{Fo_{q-1}}^{Fo_q} w_j^t(\xi) \beta_{0j}(z, Fo_q - \xi) d\xi \right], \quad (14)$$

де

$$\beta_{0j}(z, \text{Fo}) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} G(z, \zeta, \text{Fo}) d\zeta = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(z, \mu_m) \varphi_j(\mu_m)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}},$$

$$\varphi_j(\mu) = \frac{1}{\mu} (\sin \mu x_j - \sin \mu x_{j-1}) - \frac{\text{Bi}}{\mu^2} (\cos \mu x_j - \cos \mu x_{j-1}).$$

У першому інтегралі в рівності (14) підінтегральну функцію $w_j^t(\xi)$ на проміжку інтегрування $[0, \text{Fo}_{q-1}]$ апроксимуємо лінійним сплайном, вважаючи значення $w_j^t(\text{Fo}_k)$, $k = 0, 1, \dots, q-1$, відомими, а в другому інтегралі приймаємо, що $w_j^t(\xi) \approx w_j^t(\text{Fo}_{q-1})$.

У співвідношенні (12) на проміжку $[0, \text{Fo}_q]$ підінтегральну функцію $f(\xi)$ також апроксимуємо лінійним сплайном. При цьому для апроксимацій використовуємо таке подання:

$$\begin{aligned} \chi_{\eta}(\text{Fo}) \approx s_{\eta,1}^{(1)} \text{Fo} + s_{\eta,1}^{(0)} + \sum_{p=1}^{K-1} (s_{\eta,p+1}^{(1)} \text{Fo} + s_{\eta,p+1}^{(0)} - \\ - s_{\eta,p}^{(1)} \text{Fo} - s_{\eta,p}^{(0)}) S(\text{Fo} - \text{Fo}_p), \quad \eta \in \{j, f\}, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$s_{\eta,q}^{(1)} = \frac{\chi_{\eta}(\text{Fo}_q) - \chi_{\eta}(\text{Fo}_{q-1})}{\text{Fo}_1}, \quad s_{\eta,q}^{(0)} = \frac{\chi_{\eta}(\text{Fo}_{q-1}) \text{Fo}_q - \chi_{\eta}(\text{Fo}_q) \text{Fo}_{q-1}}{\text{Fo}_1},$$

$$\chi_j(\text{Fo}) = w_j^t(\text{Fo}), \quad \chi_f(\text{Fo}) = f(\text{Fo}),$$

$$\text{Fo}_q = q \text{Fo}_1, \quad q = 0, 1, 2, \dots, K,$$

$K+1$ – кількість вузлів сплайна; $\text{Fo}_1 = a_0 \Delta \tau / \ell^2$ і $\Delta \tau$ відповідно безрозмірний і розмірний крок сітки; $S(\cdot)$ – функція Гевісайда.

Обчисливши з використанням апроксимацій (15) інтеграли (11) і (12), одержимо

$$\mathfrak{G}_w(z, \text{Fo}_q) = \sum_{j=1}^J \left[\mathfrak{G}_{j,q-1}(z, \text{Fo}_q) + w_{j,q-1}^t \beta_{1j}(z, 0) \right], \quad (16)$$

$$\mathfrak{G}_f(z, \text{Fo}_q) = f_q \left[\bar{\beta}_1(z, 0, 0) - \psi_0(z, 0) \right] + \Psi_{f_q}(z), \quad (17)$$

де

$$\mathfrak{G}_{j,0}(z, \text{Fo}_q) = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{j,q-1}(z, \text{Fo}_q) = & -w_{j,0}^t \beta_{1j}(z, \text{Fo}_q) + \\ & + s_{j,1}^{(1)} \beta_{2j}(z, \text{Fo}_q) - s_{j,q-1}^{(1)} \beta_{2j}(z, \text{Fo}_1) + \\ & + \sum_{p=1}^{q-2} \frac{w_{j,p}^t - 2w_{j,p-1}^t + w_{j,p-2}^t}{\text{Fo}_1} \beta_{2j}(z, \text{Fo}_q - \text{Fo}_p), \quad q = 2, 3, \dots, K, \end{aligned}$$

$$\Psi_{f_1}(z) = f_0 \left[\psi_0(z, 0) - \bar{\beta}_1(z, 0, \text{Fo}_1) \right],$$

$$\begin{aligned}\Psi_{f_q}(z) &= f_{q-1}\Psi_0(z, 0) + s_{f,1}^{(1)}\bar{\beta}_2(z, 0, \text{Fo}_q) - s_{f,q-1}^{(1)}\bar{\beta}_2(z, 0, \text{Fo}_1) + \\ &+ \sum_{p=1}^{q-2} \frac{f_{p+1} - 2f_p + f_{p-1}}{\text{Fo}_1} \bar{\beta}_2(z, 0, \text{Fo}_q - \text{Fo}_p) - f_0\bar{\beta}_1(z, 0, \text{Fo}_q),\end{aligned}$$

$$q = 2, 3, \dots, K,$$

$$w_{j,p}^t = w_j^t(\text{Fo}_p), \quad f_q = f(\text{Fo}_q),$$

$$\Psi_0(z, \zeta) = \frac{\bar{\beta}_2(z, \zeta, 0) - \bar{\beta}_2(z, \zeta, \text{Fo}_1)}{\text{Fo}_1},$$

$$\bar{\beta}_\gamma(z, \zeta, \text{Fo}) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(\mu_m, z)\Phi(\mu_m, \zeta)}{\mu_m^{2\gamma} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}},$$

$$\beta_{\gamma j}(z, \text{Fo}) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(\mu_m, z)\varphi_j(\mu_m)}{\mu_m^{2\gamma} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}}, \quad \gamma = 1, 2,$$

$$\bar{\beta}_1(z, \zeta, 0) = \frac{1}{D}(1 + \text{Bi}z)(z_1 - \zeta) - (z - \zeta)S(z - \zeta), \quad D = 1 + z_1 \text{Bi},$$

$$\bar{\beta}_2(z, \zeta, 0) = \frac{1}{D}(1 + \text{Bi}z)g_{12}(z_1, \zeta) - g_{12}(z, \zeta),$$

$$g_{12}(z, \zeta) = \frac{z^2}{6D}(3 + \text{Bi}z)(z_1 - \zeta) - \frac{1}{6}(z - \zeta)^3 S(z - \zeta),$$

$$\beta_{1j}(z, 0) = \left[\frac{\zeta}{2D}(1 + \text{Bi}z)(2z_1 - \zeta) + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2 S(z - \zeta) \right] \Big|_{\zeta=x_{j-1}}^{\zeta=x_j},$$

$$\beta_{2j}(z, 0) = \left[\frac{1}{D}(1 + \text{Bi}z)\beta_{12}(z_1, \zeta) - \beta_{12}(z, \zeta) \right] \Big|_{\zeta=x_{j-1}}^{\zeta=x_j},$$

$$\beta_{12}(z, \zeta) = \frac{z^2 \zeta}{12D}(3 + \text{Bi}z)(2z_1 - \zeta) + \frac{1}{24}(z - \zeta)^4 S(z - \zeta).$$

Використовуючи метод колокацій, з інтегрального подання (9) і залежностей (16) і (17) отримуємо рекурентне нелінійне алгебричне рівняння для знаходження значень $\theta_q = \theta(0, \text{Fo}_q)$ змінної Кірхгофа у вузлах сплайна на поверхні $z = 0$:

$$\begin{aligned}\theta_q + f_q [\bar{\beta}_1(0, 0, 0) - \Psi_0(0, 0)] + \Psi_{f_q}(0, 0) - \mathfrak{G}_w(0, \text{Fo}_q) - \\ - \mathfrak{G}_0(0, \text{Fo}_q) + \mathfrak{G}_c(0, \text{Fo}_q) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, K.\end{aligned}\quad (18)$$

Необхідні для визначення $\mathfrak{G}_w(0, \text{Fo}_q)$ значення $w_{j,q-1}^t$, $q = 1, 2, \dots, K$, обчислюємо за формулами

$$w_{j,0}^t = \left[\bar{a}(\bar{t}_0 \bar{T}_0(z_j^*)) - 1 \right] \theta_0''(z_j^*) + \text{Po} \bar{a}(\bar{t}_0 \bar{T}_0(z_j^*)) \bar{W}(\bar{t}_0 \bar{T}_0(z_j^*), z_j^*, 0),$$

$$\begin{aligned}w_{j,q-1}^t &= \left[\bar{a}(\bar{T}(z_j^*, \text{Fo}_{q-1})) - 1 \right] \left[\mathfrak{G}_0''(z_j^*, \text{Fo}_{q-1}) + \right. \\ &\left. + \mathfrak{G}_w''(z_j^*, \text{Fo}_{q-1}) - \mathfrak{G}_f''(z_j^*, \text{Fo}_{q-1}) - \mathfrak{G}_c''(z_j^*, \text{Fo}_{q-1}) \right] +\end{aligned}$$

$$+ \text{Po} \bar{a}(\bar{T}(z_j^*, \text{Fo}_{q-1})) \bar{W}(\bar{T}(z_j^*, \text{Fo}_{q-1}), z_j^*, \text{Fo}_{q-1}),$$

$$q = 2, 3, \dots, K,$$

де

$$\mathfrak{S}_f''(z, \text{Fo}_k) = -f_k \bar{\Psi}_0''(z) + \Psi_{fk}''(z), \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

$$\Psi_{f_1}''(z) = f_0 [\bar{\Psi}_0''(z) - \bar{\beta}_1''(z, 0, \text{Fo}_1)],$$

$$\Psi_{fk}''(z) = f_{k-1} \bar{\Psi}_0''(z) + s_{f,1}^{(1)} \bar{\beta}_2''(z, 0, \text{Fo}_k) - s_{f,k-1}^{(1)} \bar{\beta}_2''(z, 0, \text{Fo}_1) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{k-2} \frac{f_{p+1} - 2f_p + f_{p-1}}{\text{Fo}_1} \bar{\beta}_2''(z, 0, \text{Fo}_k - \text{Fo}_p) - f_0 \bar{\beta}_1''(z, 0, \text{Fo}_k),$$

$$k = 2, 3, \dots, K-1,$$

$$\bar{\Psi}_0''(z) = - \left[\frac{z_1(1 + \text{Bi} z)}{D} - z + \bar{\beta}_2''(z, 0, \text{Fo}_1) \right] \frac{1}{\text{Fo}_1},$$

$$\mathfrak{S}_w''(z, \text{Fo}_k) = \sum_{j=1}^J \left\{ \mathfrak{S}_{j,k-1}''(z, \text{Fo}_k) + \right.$$

$$\left. + w_{j,k-1}^t [S(z - x_j) - S(z - x_{j-1})] \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

$$\mathfrak{S}_{j,0}''(z, \text{Fo}_1) = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{j,k-1}''(z, \text{Fo}_k) = -w_{j,0}^t \beta_{1j}''(z, \text{Fo}_k) +$$

$$+ s_{j,1}^{(1)} \beta_{2j}''(z, \text{Fo}_k) - s_{1,k-1}^{(1)} \beta_{2j}''(z, \text{Fo}_1) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{k-2} \frac{w_{j,p+1}^t - 2w_{j,p}^t + w_{j,p-1}^t}{\text{Fo}_1} \beta_{2j}''(z, \text{Fo}_k - \text{Fo}_p),$$

$$k = 2, 3, \dots, K-1.$$

Двома штрихами позначено другу похідну за координатою z .

Розв'язавши рівняння (18), знайдемо f_q , а на основі рівностей (16) і (17) визначимо $\mathfrak{S}_w(z, \text{Fo}_q)$ і $\mathfrak{S}_f(z, \text{Fo}_q)$. Після цього, скориставшись (9), матимемо значення $\theta(z, \text{Fo}_q)$.

У випадку матеріалу плити з простою нелінійністю ($\bar{a}(\bar{T}(z, \text{Fo})) \approx 1$) знаходження температурного поля зводиться також до розв'язання рівняння (18), у якому $w_{j,q-1}^t$, $q = 1, 2, \dots, K$, обчислюємо за формулами

$$w_{j,0}^t = \text{Po} \bar{W}(\bar{t}_0 \bar{T}_0(z_j^*), z_j^*, 0),$$

$$w_{j,q-1}^t = \text{Po} \bar{W}(\bar{T}(z_j^*, \text{Fo}_{q-1}), z_j^*, \text{Fo}_{q-1}), \quad q = 2, 3, \dots, K.$$

Якщо в задачі (1)–(4) врахувати температурні залежності тільки коефіцієнтів теплопровідності $\bar{\Lambda}(\bar{T})$ і температуропровідності $\bar{a}(\bar{T})$, замість (9) отримаємо таке інтегральне подання:

$$\theta(z, \text{Fo}) = \mathfrak{S}_0(z, \text{Fo}) + T_L(z, \text{Fo}) + \mathfrak{S}_w(z, \text{Fo}) -$$

$$- \mathfrak{S}_f(z, \text{Fo}) - \mathfrak{S}_c(z, \text{Fo}) + \text{Po} T_w(z, \text{Fo}), \quad (19)$$

де

$$T_L(z, Fo) = \int_0^{Fo} \bar{T}_{c0}^*(\xi) G(z, 0, Fo - \xi) d\xi,$$

$$\bar{T}_{c0}^*(Fo) = Bi \bar{t}_{c0} \bar{T}_{c0}(Fo) + Ki_0 \bar{q}_0(Fo), \quad (20)$$

$$T_w(z, Fo) = \int_0^{Fo} \int_0^{z_1} \bar{W}(\zeta, \xi) G(z, \zeta, Fo - \xi) d\zeta d\xi, \quad (21)$$

$\mathfrak{D}_0(z, Fo)$ і $\mathfrak{D}_c(z, Fo)$ визначаємо за формулами (10) і (13), а $\mathfrak{D}_w(z, Fo_q)$ і $\mathfrak{D}_f(z, Fo_q)$ – за формулами (16), (17) при

$$f(Fo) = Bi [\bar{T}(\theta(0, Fo)) - \theta(0, Fo)] + Sk \bar{T}^4(\theta(0, Fo)),$$

$$w_{j,0}^t = \left[\bar{a}(\bar{t}_0 \bar{T}_0(z_j^*)) - 1 \right] \theta_0''(z_j^*),$$

$$w_{j,q-1}^t = \left[\bar{a}(\bar{T}(z_j^*, Fo_{q-1})) - 1 \right] \left[\mathfrak{D}_0''(z_j^*, Fo_{q-1}) + \mathfrak{D}_w''(z_j^*, Fo_{q-1}) - \right. \\ \left. - \mathfrak{D}_f''(z_j^*, Fo_{q-1}) - \mathfrak{D}_c''(z_j^*, Fo_{q-1}) \right], \quad q = 2, 3, \dots, K.$$

Рекурентне нелінійне алгебричне рівняння для знаходження значень змінної Кірхгофа у вузлах сплайна на поверхні $z = 0$ набуде вигляду

$$\theta_q + f_q [\bar{\beta}_1(0, 0, 0) - \psi_0(0, 0)] + \Psi_{fq}(0, 0) - \mathfrak{D}_w(0, Fo_q) - \mathfrak{D}_0(0, Fo_q) - \\ - T_L(0, Fo_q) - Po T_w(0, Fo_q) + \mathfrak{D}_c(0, Fo_q) = 0. \quad (22)$$

У випадку простої нелінійності з (22) отримуємо таке рівняння для знаходження θ_q :

$$\theta_q + f_q [\bar{\beta}_1(0, 0, 0) - \psi_0(0, 0)] + \Psi_{fq}(0, 0) - \mathfrak{D}_0(0, Fo_q) - \\ - T_L(0, Fo_q) - Po T_w(0, Fo_q) + \mathfrak{D}_c(0, Fo_q) = 0.$$

За врахування температурної залежності лише густини джерел тепла з (1)–(4) з використанням (8) отримаємо

$$\bar{T}(z, Fo) = \bar{t}_0 T_0^*(z, Fo) + T_L(z, Fo) - \\ - Sk \mathfrak{D}_f(z, Fo) - \bar{t}_{c1} T_{c1}^*(z, Fo) + Po \mathfrak{D}_w(z, Fo),$$

де

$$T_0^*(z, Fo) = \int_0^{z_1} \bar{T}_0(\zeta) G(z, \zeta, Fo) d\zeta,$$

$$T_{c1}^*(z, Fo) = \int_0^{Fo} \bar{T}_{c1}(\xi) \left. \frac{\partial G(z, \zeta, Fo - \xi)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=z_1} d\xi, \quad (23)$$

$T_L(z, Fo)$ визначаємо за формулою (20), а $\mathfrak{D}_f(z, Fo)$ і $\mathfrak{D}_w(z, Fo)$ – за формулами (16), (17). При цьому

$$f(Fo) = \bar{T}^4(0, Fo), \quad w_{j,0}^t = \bar{W}(\bar{t}_0 \bar{T}_0(z_j^*), z_j^*, 0),$$

$$w_{j,q-1}^t = \bar{W}(\bar{T}(z_j^*, Fo_{q-1}), z_j^*, Fo_{q-1}), \quad q = 2, 3, \dots, K.$$

Значення $\bar{T}_q = \bar{T}(0, Fo_q)$ знаходимо з рівняння

$$\begin{aligned} \bar{T}_q + \text{Sk } f_q [\bar{\beta}_1(0, 0, 0) - \psi_0(0, 0)] + \Psi_{fq}(0, 0) - \text{Po } \vartheta_w(0, Fo_q) - \\ - \bar{t}_0 T_0^*(0, Fo_q) - T_L(0, Fo_q) + \bar{t}_{c1} T_{c1}^*(0, Fo_q) = 0. \end{aligned}$$

При нехтуванні температурною залежністю ТФХ, густин теплових потоків і джерела тепла інтегральне подання розв'язку відповідної задачі матиме вигляд

$$\begin{aligned} \bar{T}(z, Fo) = \bar{t}_0 T_0^*(z, Fo) + T_L(z, Fo) - \\ - \text{Sk } \vartheta_f(z, Fo) - \bar{t}_{c1} T_{c1}^*(z, Fo) + \text{Po } T_w(z, Fo), \end{aligned}$$

де $T_0^*(z, Fo)$, $T_{c1}^*(z, Fo)$, $T_L(z, Fo)$ і $T_w(z, Fo)$ визначаються формулами (23), (20) і (21) відповідно, а $\vartheta_f(z, Fo)$ – формулою (17) при $f(Fo) = \bar{T}^4(0, Fo)$.

Рівняння для знаходження температур \bar{T}_{0q} запишеться так:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{0q} + \text{Sk } f(Fo_q) [\bar{\beta}_1(0, 0, 0) - \psi_0(0, 0)] + \Psi_{fq}(0, 0) - \bar{t}_0 T_0^*(0, Fo_q) - \\ - T_L(0, Fo_q) + T_{c1}(0, Fo_q) - \text{Po } T_w(0, Fo_q) = 0. \end{aligned}$$

3. Числові результати. Досліджували температурне поле при $W_0 = 0$, $t_0 = t_{c1} = T_*$, $T_s = t_{c0} + q_0/\alpha_0 = 6000$ К, $T_* = 300$ К; $\alpha_*(T) = 1$, $q(T, \tau) = 1$, $T_{c0}(\tau) = T_{c1}(\tau) = 1$, $\alpha_0 = 470$ Вт/(м²·К), $\varepsilon_0 = 1$, $T_0(\tilde{z}) = 1$, $\Delta\tau = 0.125$ с, $\tilde{z}_1 = \ell = 0.022$ м, $J = 4$. ТФХ матеріалу плити відповідають склокераміці [4]:

$$\lambda_t(T) = 1.22(1 + 1.967 \cdot 10^{-4}(T - T_*)) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$c_v(T) = 4.1 \cdot 10^6 (1 - 0.2683e^{-1.9(T-T_*)}) [\text{Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})]$$

для таких значень параметрів:

$$\bar{\Lambda}(\bar{T}) = 1 + \beta_\lambda(\bar{T} - \bar{T}_*), \quad \bar{C}(\bar{T}) = 1 - 0.2683e^{-11.4(\bar{T} - \bar{T}_*)},$$

$$f_0 = 0, \quad a_0 = 2.9756 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$\beta_\lambda = 1.18, \quad \text{Bi} = 8.475, \quad \text{Sk} = 220.73, \quad \bar{T}_* = 0.05,$$

$$\vartheta_0(z, Fo) = \vartheta_c(z, Fo) = T_w(z, Fo) = 0,$$

$$\bar{T}(z, Fo) = \bar{T}_* + \frac{\sqrt{1 + 2\beta_\lambda \theta(z, Fo)} - 1}{\beta_\lambda},$$

$$T_L(z, Fo) = \text{Bi} [\bar{\beta}_1(z, 0, 0) - \bar{\beta}_1(z, 0, Fo)].$$

Обчислення виконували для $K \leq 16400$.

У табл. 1 наведено значення температури \bar{T} поверхонь $z = 0, 0.125, 0.375, 0.625, 0.875$, обчислені у вибрані моменти часу на основі розв'язків, отриманих за запропонованою вище методикою (верхній рядок). Для порівняння у нижньому рядку наводимо значення температури, обчислені за методикою [1, 2], згідно з якою інтегральне подання змінної Кірхгофа також має вигляд (19), у якому всі доданки, за винятком $\vartheta_w(z, Fo)$, визначаються, як і наведені вище, а доданок $\vartheta_w(z, Fo)$ в цьому випадку відрізняється тим, що під інтегралом в (11) маємо

$$w^t(z, \text{Fo}) = \left[1 - \frac{1}{\bar{a}(\bar{T}(\theta))} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}}.$$

При цьому

$$\mathfrak{G}_w(z, \text{Fo}_q) = \sum_{j=1}^J \left\{ w_{j,q}^t [\beta_{1j}(z, 0) - \psi_j(z)] + \Psi_{jq}(z) \right\},$$

де

$$\Psi_{j1}(z) = w_{j,0}^t [\psi_j(z) - \beta_{1j}(z, \text{Fo}_1)],$$

$$\begin{aligned} \Psi_{jq}(z) = & w_{j,q-1}^t \psi_j(z) + s_{j,1}^{(1)} \beta_{2j}(z, \text{Fo}_q) - s_{j,q-1}^{(1)} \beta_{2j}(z, \text{Fo}_1) + \\ & + \sum_{p=1}^{q-2} \frac{w_{j,p+1}^t - 2w_{j,p}^t + w_{j,p-1}^t}{\text{Fo}_1} \beta_{2j}(z, \text{Fo}_q - \text{Fo}_p), \end{aligned}$$

$$\psi_j(z) = \frac{\beta_{2j}(z, 0) - \beta_{2j}(z, \text{Fo}_1)}{\text{Fo}_1}, \quad w_{j,q}^t = \left[1 - \frac{1}{\bar{a}(\bar{T}(\theta_{jq}))} \right] y_{jq},$$

$$\theta_{jq} = \theta(z_j^*, \text{Fo}_q) \approx \left(\frac{y_{jq}}{2} + A_{jq} \right) \text{Fo}_1,$$

$$y_{jq} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} \right|_{\zeta=z_j^*, \text{Fo}=\text{Fo}_q}, \quad A_{jq} = \sum_{k=1}^{q-1} y_{jk}. \quad q = 2, 3, \dots, K.$$

Рекурентна система нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень у вузлах сплайнів змінної Кірхгофа θ_q на поверхні $z = 0$ та її похідної за часом y_{iq} на поверхнях $z = z_i^*$, $i = 1, 2, \dots, J$, має вигляд

$$\begin{aligned} \theta_q + f_q [\bar{\beta}_1(0, 0, 0) - \psi_0(0, 0)] + \Psi_{fq}(0, 0) - \\ - \sum_{j=1}^J \left[w_{j,q}^t [\beta_{1j}(0, 0) - \psi_j(0)] + \Psi_{jq}(0) \right] T_L(0, \text{Fo}_q) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Fo}_1 y_{iq} + f_q [\bar{\beta}_1(z_i^*, 0, 0) - \psi_0(z_i^*, 0)] + \Psi_{fq}(z_i^*, 0) - \\ - \sum_{j=1}^J \left\{ w_{j,q}^t [\beta_{1j}(z_i^*, 0) - \psi_j(z_i^*)] + \Psi_{jq}(z_i^*) \right\} - \\ - T_L(z_i^*, \text{Fo}_q) + A_{iq} \text{Fo}_1 = 0. \end{aligned}$$

Крім того, у табл. 1 наведено значення температур, обчислених на основі розв'язку відповідної стаціонарної задачі ($\tau = \infty$). При її розв'язанні для змінної Кірхгофа після введення позначення

$$\varphi(\theta) = \text{Bi} [\bar{T}(\theta) - \theta] + \text{Sk} \bar{T}^4(\theta)$$

отримали таке співвідношення:

$$\theta(z) = \frac{1}{D} [\text{Bi} - \varphi(\theta)] \Big|_{z=0} (z_1 - z).$$

Невідомі значення $\theta(0)$ знаходили з рівняння

$$\theta(0) + \frac{z_1}{D} \varphi(\theta) \Big|_{z=0} = \frac{z_1 \text{Bi}}{D}.$$

Зауважимо, що розв'язок стаціонарної задачі зі сталим коефіцієнтом теплопровідності $\bar{\Lambda}(\bar{T})$ має вигляд

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{D} \left[(1 + \text{Bi } z) \bar{T}_* + (\text{Bi} - \text{Sk } \bar{T}^4(0))(z_1 - z) \right],$$

де $\bar{T}(0)$ задовольняє рівняння

$$\bar{T}(0) + \frac{z_1 \text{Sk}}{D} \bar{T}^4(0) = \frac{1}{D} (\bar{T}_* + z_1 \text{Bi}).$$

Таблиця 1

τ, c \ z	0	0.125	0.375	0.625	0.875
0.25	0.14549930	0.04755181	0.05000000	0.05000000	0.05000000
	0.14752980	0.05000000	0.05000000	0.05000000	0.05000000
0.50	0.17820197	0.04836868	0.05000000	0.05000000	0.05000000
	0.17938462	0.05000002	0.05000000	0.05000000	0.05000000
1	0.21644195	0.04840024	0.04999984	0.05000000	0.05000000
	0.21744093	0.05003307	0.05000000	0.05000000	0.05000000
2	0.25794127	0.05019139	0.04998973	0.05000000	0.05000000
	0.25870618	0.05180527	0.05000000	0.05000000	0.05000000
4	0.29799977	0.06610320	0.04993310	0.04999994	0.05000000
	0.29847825	0.06751738	0.05001085	0.05000000	0.05000000
6	0.31862258	0.09045476	0.05013743	0.05000007	0.05000000
	0.31828928	0.08926706	0.04998444	0.04999939	0.04999999
8	0.33047986	0.11182365	0.05030977	0.05000000	0.05000000
	0.33073468	0.11283208	0.05052184	0.05000105	0.05000000
10	0.33860403	0.13167843	0.05098163	0.05000043	0.04999998
	0.33880999	0.13255017	0.05123657	0.05000569	0.50000000
50	0.37082462	0.26477150	0.10956528	0.05899496	0.05077594
	0.37085625	0.26495690	0.10982766	0.05910318	0.05079494
100	0.37698007	0.30155557	0.16829635	0.08995336	0.05822409
	0.37698007	0.30155557	0.16829635	0.08995336	0.05822409
200	0.38116472	0.32768551	0.22431367	0.13950510	0.07697391
	0.38116472	0.32768551	0.22431367	0.13950510	0.07697391
400	0.38362837	0.34327778	0.26052437	0.17727652	0.09346742
	0.38362930	0.34328366	0.26053807	0.17729109	0.09347396
600	0.38418979	0.34683945	0.26880826	0.18609864	0.09743971
	0.38418958	0.34683808	0.26880509	0.18609526	0.09743818
800	0.38431991	0.34766523	0.27072505	0.18814246	0.09836446
	0.38431996	0.34766554	0.27072578	0.18814325	0.09836481
1200	0.38435722	0.34790197	0.27127428	0.18872821	0.09862978
	0.38435722	0.34790199	0.27127432	0.18872825	0.09862980
1600	0.38435923	0.34791474	0.27130389	0.18875980	0.09864409
	0.38435923	0.34791474	0.27130390	0.18875980	0.09864409
2000	0.38435934	0.34791543	0.27130549	0.18876150	0.09864487
	0.38435934	0.34791543	0.27130549	0.18876150	0.09864487
2050	0.38435934	0.34791544	0.27130552	0.18876153	0.09864488
	0.38435934	0.34791544	0.27130552	0.18876153	0.09864488
∞	0.38435934	0.34791547	0.27130558	0.18876160	0.09864491

З даних, наведених у табл. 1, бачимо, що температури, обчислені на основі двох методик, відрізняються для малих часів двома значущими цифрами (похибка є меншою, ніж 1.5%). Із плином часу кількість однакових значущих цифр збільшується. Значення температур наближаються до обчислених на основі розв'язку стаціонарної задачі. На поверхні $z = 0$, де температури є максимальними, відповідні значення при $\tau \geq 2000$ с співпадають.

На рис. 1 зображено зміну температури на різних поверхнях залежно від часу. Суцільні лінії побудовано з урахуванням температурної залежності ТФХ, штрихові – за сталих ТФХ (ім відповідають температурозалежні ТФХ при $T = T^*$), а штрихпунктирні – за припущення простої нелінійності матеріалу. Рис. 2 ілюструє характер поведінки цих самих температур на поверхні $z = 0$, але у збільшеному масштабі.

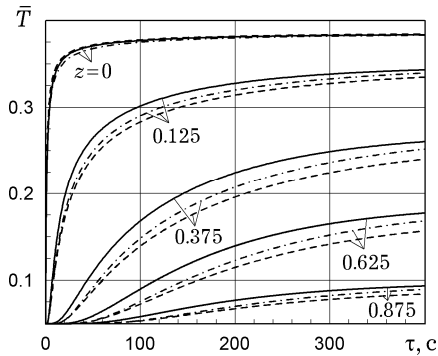


Рис. 1

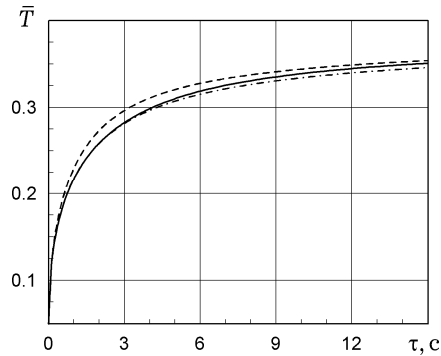


Рис. 2

З аналізу графіків випливає, що вплив термочутливості на обмежувальній і внутрішніх поверхнях проявляється по-різному. На поверхні $z = 0$ температури за температурозалежних ТФХ і простої нелінійності матеріалу, які для часів $\tau < 4$ с співпадають, не перевищують температуру за сталих ТФХ. Між цими температурами максимальна різниця, яка досягається на другій секунді, становить ≈ 87.6 °С. В середині плити, навпаки, температура за сталих ТФХ не перевищує температур за температурозалежних ТФХ і простої нелінійності матеріалу. Зокрема, максимальна різниця за температурозалежних та сталих ТФХ на поверхні $z = 0.375$ становить ≈ 178.8 °С і досягається при $\tau = 149$ с. Температури за простої нелінійності матеріалу не перевищують температур з температурозалежними ТФХ, а при великих часах співпадають.

Висновки. З використанням перетворення Кірхгофа, функції Гріна, узагальнених функцій і лінійних сплайнів нелінійні нестационарні задачі теплопровідності для плити зведено до розв'язання відповідних нелінійних рекурентних алгебричних рівнянь відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на обмежувальній поверхні, на якій задано нелінійну граничну умову. Порівняльний аналіз температур, обчислених за цією і запропонованою раніше методиками, показав співпадіння залежно від часу з точністю до двох-восьми значущих цифр. Досліджено вплив термочутливості.

1. Процюк Б. В. Нестационарні задачі теплопровідності для термочутливих плит // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2019. – Вип. 17. – С. 121–133. – <https://doi.org/10.15407/apmm2019.17.121-133>
2. Процюк Б. В. Нестационарні нелінійні задачі теплопровідності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 4. – С. 156–167.
3. Турчак Л. И. Основы численных методов. – Москва: Наука, 1987. – 320 с.
4. Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В. Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – 81, № 6. – С. 1058–1062.

Те саме: Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V. Numerical-analytical method of solution of a nonlinear unsteady heat-conduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – **81**, No. 6. – P. 1099–1103. – <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0150-8>.

5. Kupiec K., Komorowicz T. Simplified model of transient radiative cooling of spherical body // Int. J. Therm. Sci. – 2010. – **49**, No. 7. – P. 1175–1182.
6. Kushnir R., Protsiuk B. Determination of the thermal fields and stresses in multi-layer solids by means of the constructed Green functions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931.
7. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: Thermal Stresses I / R. B. Hetnarski (Ed.). – Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986. – P. 391–483.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОЙ ПЛИТЫ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ НА ОДНОЙ ИЗ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Предложена методика определения температурных полей в плите с учетом теплового излучения, температурной зависимости теплофизических характеристик, плотностей поверхностных и объемных источников тепла при неравномерном распределении начальной температуры. Задачи теплопроводности с использованием преобразования Кирхгофа, функции Грина, обобщенных функций и линейных сплайнов сведены к решению рекуррентного нелинейного алгебраического уравнения относительно значений в узлах сплайна переменной Кирхгофа на соответствующей ограничительной поверхности. Приведены результаты численных исследований.

Ключевые слова: термочувствительная плита, тепловое излучение, нестационарное температурное поле, преобразование Кирхгофа, функция Грина, обобщенные функции, линейные сплайны.

NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR THERMOSENSITIVE PLATE WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITION ON ONE OF THE SURFACES

The technique for the determination of temperature fields in a plate taking into account thermal radiation, temperature dependence of thermophysical characteristics, densities of surface and volumetric heat sources for non-uniform distribution of initial temperature is suggested. Using the Kirchhoff transform, Green's function, generalized functions and linear splines, heat conduction problems are reduced to the solution of the recurrent nonlinear algebraic equation with respect to the values in the spline nodes of the Kirchhoff variable on the corresponding bounding surface. The results of numerical investigations are presented.

Key words: thermosensitive plate, thermal radiation, non-stationary temperature field, Kirchhoff transform, Green's function, generalized functions, linear splines.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.12.19