

ОСОБЛИВОСТІ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ І ЗНОШУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Розглянуто контактні задачі для тонкостінних елементів конструкцій і їхнього зношування. Запропоновано єдину методичку розв'язування задач, яка базується на зведенні до інтегральних рівнянь Вольтерра. Це дає змогу виявити особливості розв'язків залежно від гіпотез, які характеризують деформування тонкостінного елемента. Наведено розв'язки та аналіз задач зношування пластин жорстким штампом, гарячим штампом, з урахуванням фрикційного розігріву, з урахуванням зміни товщини пластини у процесі зношування.

Ключові слова: контактні задачі, інтегральні рівняння Вольтерра, зношування, тонкостінні елементи, фрикційний розігрів.

Результати цього дослідження отримані у період плідної співпраці з Г. С. Кітом, яка значною мірою була побудована на доброзичливій партнерській основі, підтримці ідей і довірі, спільному обговоренні результатів і, що дуже важливо, без наукового диктату зі сторони людини з великим життєвим досвідом.

Сучасний стан теорії машин і механізмів, рівень розвитку механіки деформівного твердого тіла, знання фізико-механічних властивостей матеріалів дають змогу забезпечити достатньо високу надійність конструкцій. Однак найбільш поширеною причиною виходу їх з ладу є зношування робочих поверхонь контакту. За даними Міжнародної трибологічної ради (Англія, Лондон) тільки ремонт і технічне обслуговування обладнання обходяться в 3–10 разів більше від вартості його виготовлення, а, наприклад, зношування газонафтопромислового обладнання зменшує на 50–70% його ресурс [10, 42, 75].

Задача підвищення зносостійкості деталей машин є комплексною і тісно пов'язаною з досягненнями трибологічного матеріалознавства, технологічних засобів (наприклад, застосування антифрикційних захисних покриттів, інших зміцнювальних технологій), а також з розвитком математичного моделювання трибологічних процесів, розробкою методів розрахунку і оптимізації конструкцій вузлів тертя [4, 56, 58, 59, 67, 78].

Математичне моделювання в трибології ґрунтується на законі поверхневого руйнування твердих тіл при терті, яким в загальному випадку враховуються фізико-механічні та хімічні явища, які відбуваються на поверхнях контакту, в тому числі зміну геометричних характеристик тіл в часі, кінематику руху, мікроструктуру поверхонь і склад приповерхневих шарів, фрикційний розігрів, теплофізичні властивості матеріалів і контакту, наявність мастила і т. п. Процеси тертя, теплоутворення і зношування є взаємозв'язаними, і розрахункові моделі необхідно будувати методом синтезу експериментальних даних і співвідношень механіки суцільного середовища, термодинаміки, фізико-хімічного обміну енергією і речовиною тощо. Аналіз численних експериментальних даних засвідчує, що головними чинниками, які впливають на процес зношування, є:

- контактна ситуація – величина, розподіл і зміна з часом контактних напружень;
- фрикційний розігрів і розподіл температури в тілах з урахуванням впливу зовнішнього середовища;
- мікрогеометрія контактуючих поверхонь – фактична область контакту, взаємовплив окремих мікроставів;

✉ ov.maksymuk@gmail.com

– напружено-деформований стан в об'ємі тіл і в приповерхневих шарах, які в процесі тертя набувають нових властивостей.

Для оптимального проектування, створення та експлуатації вузлів тертя важливо врахувати зазначені чинники, тому побудова математичних основ механіки контактної взаємодії з урахуванням тертя і зношування, а також розробка ефективних методів розрахунку контактних з'єднань машин і механізмів є важливою науково-технічною проблемою. Ця проблема набула особливої актуальності у зв'язку з інтенсивним впровадженням в інженерну практику вузлів з контактною взаємодією тонкостінних елементів конструкцій. Контактні задачі у цьому випадку відрізняються від класичних контактних задач теорії пружності [6, 8, 41, 43, 54, 62, 65], а їх розв'язування вимагає використання інших математичних методів [11, 20, 64, 73, 77, 80, 81]. При застосуванні різних варіантів теорії пластин та оболонок можна значно спростити математичну модель задач контактної взаємодії і зношування, а також врахувати при цьому і анізотропію фізико-механічних, теплофізичних характеристик тіл, що контактують (властиву новим сучасним антифрикційним композиційним матеріалам), і наявність тонких захисних покриттів [9, 47, 61, 70, 71, 75].

Дослідження контактної взаємодії зі зношуванням відносяться до двох наукових напрямків. З одного боку – розвиток фундаментальних результатів у галузі механіки контактної взаємодії, з другого – побудова математичних моделей з використанням понять, законів і методів трибології. В останні роки таке поєднання сформувалось в окрему галузь науки – трибомеханіку, предметом досліджень якої є вивчення контакту шорстких поверхонь, контактної жорсткості для рухомих і нерухомих з'єднань, створення математичних моделей фрикційної взаємодії, руйнування поверхонь контакту та їх зношування [24, 28, 53, 63, 70, 72, 76]. З наведеного огляду робіт випливає, що основою для побудови теорії і методів розрахунку вузлів тертя на зношування є закон зношування, яким у загальному випадку описуються складні фізико-хімічні, теплові, механічні явища, зумовлені формуванням і руйнуванням поверхні фрикційного контакту. Однак, як свідчать літературні дані, серед великої кількості параметрів процесу зношування основними є зближення деталей вузла тертя, контактні напруження і деформації, фрикційний розігрів і розподіл температури, шорсткість поверхонь, анізотропія фізико-механічних і теплофізичних властивостей матеріалів.

Широкому спектру досліджень фізики, хімії і механіки фрикційних процесів присвячені роботи О. Є. Андрейківа, Л. О. Галіна, І. Г. Горячової, Д. В. Гриліцького, Є. В. Коваленка, І. В. Крагельського, А. Г. Кузьменка, М. І. Теплового, А. Ф. Улітка, А. В. Чичинадзе, М. Жолвінські, П. А. Ребіндера J. R. Barber-a, H. Czichos-a, K. Holmberg-a, D. Tabor-a та ін. [5, 10, 15, 17, 18, 28, 30, 57–60, 68, 69, 79].

Основою для розрахунку зношування деталей є контактна задача про взаємодію двох тіл. Перші розв'язки проблеми контакту пружних тіл (область контакту достатньо мала порівняно з радіусами кривини тіл, тіла ідеально пружні, тертя в області контакту відсутнє) належать Г. Герцу. В подальшому фундаментальні результати в галузі контактних задач теорії пружності отримано в роботах В. М. Александрова, М. Х. Арутюняна, Л. О. Галіна, Д. В. Гриліцького, В. С. Гудрамовича, О. М. Гузя, К. Джонсона, Г. С. Кіта, В. І. Моссаковського, В. І. Острика, В. В. Панасюка, Ю. М. Подільчука, Г. Я. Попова, В. Л. Рвачева, А. Ф. Улітка, Я. С. Уфлянда та ін. [1, 2, 15, 17, 21–23, 26, 41, 44–46, 52, 54, 55, 57].

Із широким впровадженням в інженерну практику тонкостінних елементів конструкцій, нових композиційних матеріалів, тіл з покриттями, міжфазними прошарками, накладками, ребрами жорсткості інтенсивно розвиваються дослідження контактних проблем для таких структур. Цей клас контактних задач, з одного боку, тісно пов'язаний з класичними кон-

тактними задачами механіки деформівного твердого тіла, з іншого боку, він характеризується певними особливостями передачі навантажень при контакті тонкостінних структур [6, 8, 11, 19, 29, 31, 39, 47, 53, 54, 64]. Найбільш поширеними методами розв'язування контактних задач для тонкостінних елементів конструкцій є: *метод спряження*, згідно з яким системи ключових рівнянь розв'язують окремо в області контакту та поза нею з подальшим зшиванням розв'язків; *напівобернений метод*, коли з певних міркувань постановки задачі вибирають вирази для контактних напружень з певним набором невідомих параметрів, які визначаються в ході розв'язування; *метод функцій впливу (Гріна)*, що дає змогу звести задачі знаходження контактних напружень до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма або Вольтерра.

Розвитку основ механіки контактної взаємодії тонкостінних елементів конструкцій, методів їх розрахунку присвячені роботи В. М. Александрова, М. В. Блоха, А. Т. Василенка, Е. І. Григолюка, Я. М. Григоренка, В. С. Гудрамовича, Г. С. Кіта, В. І. Моссаковського, С. М. Мхітаряна, Б. Л. Пелеха, Г. Я. Попова, Д. А. Hills-а та ін. [2, 8, 19, 20, 25, 40, 41, 47, 54, 66, 74].

Процес зношування відбувається з активним теплоутворенням від тертя, тому, поряд з контактними напруженнями, важливу роль відіграє температура фрикційного розігріву. При роботі фрикційної пари розсіяна енергія витрачається на накопичення енергії деформації, генерацію теплоти, утворення дефектів, дислокацій тощо. Для побудови математичної моделі процесу теплоутворення від тертя розглядається задача термопружності при контактній взаємодії тіл за наявності в області контакту джерел тепла невідомої інтенсивності. Приймається, що в області контакту енергія теплових потоків, спрямованих у контактуючі тіла, дорівнює питомій роботі сил тертя. Більшість термоконтактних задач розв'язується за умов ідеального теплового контакту. Якщо враховувати шорсткість поверхонь, наявність мастила тощо, в загальному – наявність міжконтактного проміжку, то замість умови рівності температур і потоків, використовують умови неідеального теплового контакту, які вперше запропоновано в роботах Я. С. Підстригача. Такий підхід стосовно різних об'єктів і процесів розвивається у працях Я. Й. Бурака, В. М. Вігака, О. Р. Гачкевича, Д. В. Грилицького, Г. С. Кіта, Ю. М. Коляна, В. Д. Кубенка, Р. М. Кушніра, Я. С. Підстригача, В. С. Поповича та ін. [7, 17, 25, 29, 31–33, 48–52].

1. Постановка задач. На основі співвідношень лінійної теорії термопружності анізотропного тіла, методом, який ґрунтується на розвиненні шуканих функцій у ряди за поліномами Лежандра з одночасним виконанням граничних умов на лицьових поверхнях (що є важливо для задач контактної взаємодії), записано рівняння теорії анізотропних пластин і оболонок, у тому числі зі змінною товщиною. Цим методом отримано також рівняння нестационарної теплопровідності тонких трансверсально-ізотропних пластин при змішаних граничних умовах на лицьових поверхнях. Отримані співвідношення є базовими для побудови математичних моделей і методів розв'язування задач контактної взаємодії зі зношуванням матеріалу [13, 27, 47, 64, 69, 74, 81].

Для визначення контактних напружень і температур використовують механічні і теплові умови контакту. У термопружній постановці задач механічна умова контакту має вигляд [17, 34, 47]

$$w_1 + w_2 + w_* + w_r = \delta(t) - \alpha(t)x - \beta(t) - f_1(x, y) - f_2(x, y), \quad (1)$$

де $(x, y) \in \Omega_c(x, y, t)$, Ω_c – область контакту, w_1, w_2 – термопружні переміщення тіл у напрямку їхнього зближення, w_r враховує зближення тіл внаслідок шорсткості контактуючих поверхонь, а w_* – зближення тіл за рахунок зношування, α, β, δ – параметри зміщення тіл як жорстких цілих, f_i – форми поверхонь тіл до деформації.

У задачах, які розглядаємо в роботі, основний закон зношування приймаємо у вигляді [34]

$$w_* = fVK \int_0^t p(x, y, t) dt, \quad (2)$$

де f – коефіцієнт тертя, V – швидкість взаємного проковзування тіл, K – коефіцієнт пропорційності між інтенсивністю зношування і роботою сил тертя, $p(x, y, t)$ – контактний тиск.

Теплові умови контакту записуємо у вигляді рівняння теплового балансу [3, 17, 34, 48]:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial n} \right) - \lambda_2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial n} \right) = fVp(x, y, t), \quad (3)$$

і, в загальному випадку, умови неідеального теплового контакту тіл:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial n} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial n} \right) = H(\theta_1 - \theta_2), \quad (x, y) \in \Omega_c(x, y, t), \quad (4)$$

де θ_i – температури тіл, λ_i – коефіцієнти теплопровідності в напрямку нормалі до Ω_c , $1/H$ – термоопір (при $H \rightarrow \infty$ маємо ідеальний тепловий контакт).

Щоб визначити, яка частина тепла, що генерується на контакті, спрямовується у кожне з тіл, використовуємо коефіцієнт розподілу теплових потоків $\alpha_{hf} = \sqrt{(\lambda_1 c_1 \rho_1) / (\lambda_2 c_2 \rho_2)}$, де c і ρ – питома теплоємність і густина матеріалів контактної пари.

Наявність у формулі (3) контактної тиску p зумовлює взаємозв'язок полів деформації і температури. У цьому випадку необхідно розв'язувати зв'язану систему рівнянь термопружності та теплопровідності за умов (3), (4), а також умов теплообміну з навколишнім середовищем. Розв'язавши її і підставивши значення w_i , w_r , w_* в умову контакту (1), отримуємо інтегродиференціальне рівняння для визначення контактної тиску. Його розв'язок повинен задовольняти умову

$$p(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_c(x, y, t), \quad (5)$$

яка служить для визначення області контакту, а також умови рівноваги тіл

$$P(t) = \iint_{\Omega_c} p(x, y, t) dx dy, \\ M_x(t) = \iint_{\Omega_c} xp(x, y, t) dx dy, \quad M_y(t) = \iint_{\Omega_c} yp(x, y, t) dx dy, \quad (6)$$

де $\partial\Omega_c$ – границя області контакту, $P(t)$ – сума проекцій сил, прикладених до тіл, на напрям їх зближення, $M_x(t)$, $M_y(t)$ – відповідні моменти цих сил. Задача є нелінійною, оскільки область контакту Ω_c є невідомою. Розміри її залежать від навантаження і змінюються в процесі роботи фрикційної пари.

Знаходження термопружних переміщень значно спрощується, якщо один із характерних розмірів тіла є значно меншим від інших. У цьому випадку для опису напружено-деформованого стану використовують одну з теорій тонкостінних елементів конструкцій.

У роботах [38, 39] на основі загального підходу отримано основні співвідношення теорії трансверсально-ізотропних пластин змінної товщини, які враховують обтиснення нормального елемента до серединної поверхні, деформації зсуву та граничні умови на лицьових поверхнях. В $\{1,0\}$ -набли-

женні в декартовій системі координат ці співвідношення мають вигляд

– *рівняння рівноваги:*

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_1}{\partial x_1} - N_1 \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} - M_1 \frac{1}{h^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} - \\
& \quad - N_{12} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - M_{12} \frac{1}{h^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_2} + 2\sigma_1^- = 0, \\
& \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} - N_{12} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} - M_{12} \frac{1}{h^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} - \\
& \quad - N_2 \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - M_2 \frac{1}{h^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_2} + 2\sigma_2^- = 0, \\
& \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - 3M_1 \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - 3M_{12} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - Q_1 + 2h\sigma_1^+ = 0, \\
& \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - 3M_{12} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - 3M_2 \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - Q_2 + 2h\sigma_2^+ = 0, \\
& \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - 3M_1 \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - 3M_{12} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - Q_1 + 2\sigma_1^+ = 0; \tag{7}
\end{aligned}$$

– *співвідношення пружності:*

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\alpha 0} &= N_\alpha/h = 2E_0(e_{\alpha\alpha 0} + \nu e_{\beta\beta 0}) + 2\lambda\sigma_3^+ \\
N_{\alpha\alpha 1} &= M_\alpha/h^2 = 2E_0(e_{\alpha\alpha 1} + \nu e_{\beta\beta 1}) + 2\lambda\sigma_3^-, \\
N_{120} &= N_{12}/h = 2Ge_{120}, \quad N_{121} = M_{12}/h^2 = 2Ge_{121}/3, \\
N_{\alpha 30} &= Q_\alpha/h = 5G'e_{\alpha 30}/3 + \sigma_\alpha^+, \quad \alpha, \beta = 1, 2; \tag{8}
\end{aligned}$$

– *співвідношення між деформаціями і переміщеннями:*

$$\begin{aligned}
e_{110} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - \gamma_1 \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1}, \quad e_{220} = \frac{\partial v}{\partial x_2} - \gamma_2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_2}, \quad e_{111} = h \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1}, \\
e_{120} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} - \left(\gamma_1 \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_2} + \gamma_2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1} \right), \quad e_{221} = h \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2}, \\
e_{121} &= h \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right), \quad e_{130} = \gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad e_{230} = \gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2},
\end{aligned}$$

де w , u , v – вертикальне та горизонтальні переміщення точок серединної поверхні, γ_1 , γ_2 – відповідні кути повороту нормалі.

Тут також позначено

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad E_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)}, \quad \lambda = \frac{\nu'E}{(1-\nu)E'}, \quad E'_0 = \frac{(1-\nu)E'}{1-\nu-(\nu')^2 E/E'},$$

E , E' , ν , ν' , G , G' – модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона, модулі зсуву в площині ізоотропії і в напрямку, перпендикулярному до площини ізоотропії; $2h$ – товщина пластини в точці (x_1, x_2) ; кусково-неперервні невід'ємні функції $h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(h_+ + h_-)$, $\bar{h}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(h_+ - h_-)$ виражають рівняння лицьових поверхонь; $\sigma_i^\pm = (\sigma_{i3}^+ \pm \sigma_{i3}^-)/2$, $i = 1, 2, 3$, σ_{i3}^\pm – компоненти тензора напружень на лицьових поверхнях. Вертикальне переміщення точок лицьових поверхонь визначаємо за формулою

$$\frac{u_3(\pm h_\pm(x_1, x_2))}{h} = \frac{w}{h} \mp \lambda((e_{110} + e_{220}) \pm (e_{111} + e_{221})) + \frac{3\sigma_3^- \pm \sigma_3^+}{2E'_0}. \tag{9}$$

У рамках $\{1, 0\}$ -наближення отримано також рівняння нестационарної теплопровідності тонких анізотропних пластин для випадків, коли на обох лицьових поверхнях пластини задано: конвективний теплообмін з навколишнім середовищем; розподіл температури; розподіл густини теплових потоків, а також змішані граничні умови: **1)** на одній поверхні – температура, на іншій – конвективний теплообмін; **2)** на одній поверхні – тепловий потік, на іншій – конвективний теплообмін. Варіант **2)** змішаних граничних умов відповідає математичній постановці, коли в області контакту відбувається фрикційний розігрів. Тоді рівняння нестационарної теплопровідності анізотропної (прямолінійна анізотропія) пластини мають вигляд [39]

$$\begin{aligned} \Delta T_0 - \frac{1}{(12 + \omega^-)h} \left[6\omega^- \left(\frac{T_0 - \theta^-}{h} + \frac{(12 - \omega^-)T_1}{h} - (6 - \omega^-)q^+ \right) \right] &= \\ &= \frac{1}{a_z} \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{w_0}{\lambda_{zz}}, \\ \Delta T_1 - \frac{15}{(12 + \omega^-)h} \left[-\omega^- \left(\frac{T_0 - \theta^-}{h} + \frac{(2 + \omega^-/3)T_1}{h} - \left(1 + \frac{\omega^-}{3}\right)q^+ \right) \right] - \frac{3T_1}{h^2} &= \\ &= \frac{1}{a_z} \frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{w_1}{\lambda_{zz}}, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\Delta = k_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{zz}}, \quad i, j = x, y,$$

$a_z = \frac{\lambda_{zz}}{c_v}$ – коефіцієнт температуропровідності; λ_{ii} – коефіцієнти теплопро-

відності в напрямку i ; $\omega^- = \frac{ha_z^-}{\lambda_{zz}}$ – критерій Біо; a_z^- – коефіцієнт тепловід-

дачі з поверхні $z = -h$; q^+ – заданий тепловий потік при $z = h$; θ^- – температура зовнішнього середовища на нижній поверхні пластини $z = -h$,

$$T_k = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \theta P_k(z/h) dz, \quad w_k = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h W P_k(z/h) dz,$$

W – питома густина джерел тепла, P_k – поліноми Лежандра.

Досліджуються задачі контактної взаємодії жорстких тіл з тонкостінними елементами конструкцій. Для аналізу особливостей формулювання і розв'язування контактних задач для пластин і оболонок залежно від теорії, якою описується напружено-деформований стан, запропоновано метод інтегральних рівнянь Вольтерра. Розроблено [38, 39] числово-аналітичний метод розв'язування контактних задач. Ефективність методу показана на задачах дослідження контактної жорсткості конкретних конструктивних з'єднань [28].

2. Методи розв'язування.

2.1. Метод рівнянь Вольтерра. Базовою є плоска задача про взаємодію жорсткого параболічного штампа, який силою P втискується в пластину, що має сталу товщину $2h$ і ширину 2ℓ . Краї пластини жорстко закріплені. Для опису напружено-деформованого стану пластини використовуємо теорію, якою враховуються деформації зсуву та обтиснення. Матеріал пластини є трансверсально-ізотропним. З використанням розв'язку системи рівнянь рівноваги (7), співвідношення (9) для визначення переміщень точок зовнішніх поверхонь пластини та умови контакту (1) розв'язування задачі про відшукання контактного тиску $p(x)$ зведено до розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра другого роду [12, 14, 27]

$$\lambda^* p(x) - \frac{B_\lambda}{\Lambda'} \int_0^x p(y) K(x-y, k_\lambda) dy = \alpha - A + B \frac{x^2}{2} - f(x), \quad |x| \leq a, \quad (11)$$

де

$$\lambda^* = \frac{B_\lambda h}{\ell^2 E'}, \quad B_\lambda = B_0 + 2E'_0 h \lambda^2, \quad f(x) = \frac{\ell x^2}{2R}, \quad D_\lambda = 2h^2 B_{\lambda/3},$$

$$K(x, k_\lambda) = \frac{x - k_\lambda x^3}{6}, \quad k_\lambda^2 = \frac{\ell^2 \Lambda'}{D_\lambda}, \quad B_0 = \frac{2hE}{1 - \nu^2},$$

α – переміщення штампа як жорсткого цілого, $2a$ – область контакту. Рівняння (11) записано з використанням безрозмірних величин $\bar{x} = \frac{x}{\ell}$, $\bar{a} = \frac{a}{\ell}$,

$$\bar{w} = \frac{w}{\ell}, \quad \bar{p}(x) = \frac{\ell p(x)}{B_\lambda}, \quad \bar{P} = \frac{P}{B_\lambda} \quad (\text{рисочки тут і надалі не пишемо}).$$

Властивості ядра та правої частини інтегрального рівняння (11) дають змогу знайти його розв'язок, який задовольняє умови (5), (6). Такий розв'язок має вигляд [27]

$$p(x) = \frac{P\varphi(x)}{2F_0(a)}, \quad |x| \leq a,$$

де

$$\varphi(x) = \psi'''(x) \frac{\psi'(a)}{\psi'''(a)} - \psi'(x), \quad F_i(x) = \int_0^x \varphi(y) \frac{(x-y)^i}{i!} dy,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \left(\frac{1}{\xi_1} \sin \xi_2 x \operatorname{ch} \xi_1 x - \frac{1}{\xi_2} \cos \xi_2 x \operatorname{sh} \xi_1 x \right).$$

Сталі A , B визначасмо з крайових умов (див. [27]).

Прийнявши, що $E' \rightarrow \infty$, отримуємо випадок теорії пластин типу Тимошенка, а з (11) отримуємо інтегральне рівняння першого роду. Його властивості такі, що при існуванні неперервного розв'язку неможливо задовольнити умову $p(a) = 0$. Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд [27]

$$p(x) = \frac{Pk \operatorname{ch} kx}{\operatorname{sh} ka}, \quad |x| \leq a, \quad k = k_\lambda|_{\lambda=0}.$$

При $E' \rightarrow \infty$, $G' \rightarrow \infty$ маємо класичну теорію Кірхгофа – Лява і також інтегральне рівняння першого роду, але розв'язок його існує лише в класі узагальнених функцій. Розподіл контактної тиску зводиться до зосереджених сил на кінцях області контакту.

На рис. 1 наведено графіки розподілу контактної тиску $p(x)$ і величини сили P , яка необхідна для досягнення області контакту $a = 0.5$ при заданих значеннях E/E' , E/G' .

Проведений аналіз показує, що розподіл контактної тиску істотно залежить від моделі, якою описується напружено-деформований стан пластини. Тільки теорія, яка враховує обтиснення нормалі, дає фізично коректні результати (на рис. 1 цьому відповідають штрихові лінії). Тому в задачах, у яких досліджується контактна взаємодія (визначення напружено-деформованого стану в області контакту, величини зношування), необхідно викорис-

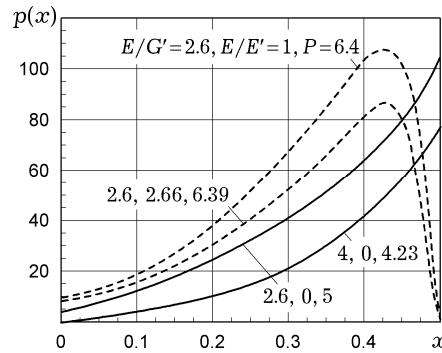


Рис.1

товувати узагальнену теорію тонкостінних елементів. Проте розрахунок інтегральних характеристик, наприклад, контактної жорсткості (величини, оберненої до прогину) за кожною з трьох згаданих теорій дає близькі результати.

2.2. Матричний метод. Розвинуто числово-аналітичний метод, ефективний при розв'язуванні контактних задач для тонкостінних структур зі змінними характеристиками. Схема методу полягає в наступному [16, 39].

Якщо математична модель задачі дозволяє, система розв'язувальних рівнянь подається в нормальній формі Коші

$$\frac{d}{dx} z(x) = A(x)z(x) + f(x), \quad x \in [0, \ell], \quad (12)$$

і розв'язок подається через матрицант G_0^x :

$$z(x) = G_0^x C + \int_0^x K(x, s) f(s) ds, \quad (13)$$

де $K(x, s) = G_0^x [G_0^s]^{-1}$ – матриця Коші, $A(x)$ – матриця, елементи якої визначаються через фізико-механічні та геометричні характеристики контактної пари, z , f – вектори невідомих і заданих функцій.

Обчислення матрицанта ґрунтується на його поданні у вигляді ряду

$$G_0^x = E + \int_0^x A(x_1) dx_1 + \int_0^x A(x_2) \int_0^{x_2} A(x_1) dx_1 dx_2 + \dots \\ + \int_0^x A(x_k) \int_0^{x_2} A(x_{k-1}) \dots \int_0^{x_2} A(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_k + \dots$$

який є абсолютно і рівномірно збіжним у будь-якому замкненому інтервалі неперервності матричної функції $A(x)$. У практичних задачах рідко вдається знайти матрицант в аналітичній формі, тому розроблено алгоритм його наближеного обчислення [16].

Сталі інтегрування C у формулі (13) знаходяться з граничних умов.

Обчислення матрицанта значно спрощується, якщо матриця задовольняє умову Лапшо-Данилевського (матриця та її інтеграл комутативні). Матрицант у цьому випадку визначається за формулою

$$G_0^x = \exp(B(x)) = E + B(x) + \frac{B(x)^2}{2!} + \dots + \frac{B(x)^n}{n!} + \dots,$$

$$\text{де } B(x) = \int_0^x A(t) dt.$$

Матриця зі сталими коефіцієнтами задовольняє цю умову. Якщо матриця A є нільпотентною (деякий степінь її дорівнює нулю), то запропонований метод дає точний розв'язок. Цей метод дає змогу отримати *наближений аналітичний розв'язок системи рівнянь* (12) з довільною правою частиною. Такий розв'язок ефективно використовується в контактних задачах для тонкостінних елементів конструкцій при побудові інтегральних рівнянь. У випадку заданого навантаження *розв'язок задачі знаходиться за формулами* (13) *безпосередньо*.

Запропонованим методом проведено дослідження деформативності пластини змінної товщини $2h(x) = h_+(x) + h_-(x)$ і ширини 2ℓ , обидва краї якої жорстко закріплені, під дією навантаження $P(x)$. Отримано аналітичний розв'язок задачі, що дало можливість оцінити точність запропонованого числово-аналітичного методу. У табл. 1 наведено результати розрахунку

прогину пластини сталої товщини $2h_0$ та змінної товщини $2h(x)$ з такими варіантами закону зміни $h_+(x)$:

1° $h_+(x) = h_0(\alpha^2 + \beta^2 x^2)$ – пластина з виїмкою,

2° $h_+(x) = h_0(d + \lambda \cos \omega x)$ – пластина з рельєфною поверхнею.

В обох випадках $h_-(x) = h_0$, $E/G' = 20$, $\nu = 0.3$, $P(x) = P_0 = \text{const}$. Розрахунки виконано для значень $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1$, $h_0/\ell = 0.05$. Порівняння результатів обчислень для варіанту 1° зміни $h_+(x)$ у табл. 1 свідчить про високу точність методу. Наведено також результати обчислень для варіанту 2° при різних значеннях параметрів d , λ , ω .

Таблиця 1

x	h = const	$h_+(x) = h_0(\alpha^2 + \beta^2 x^2)$		$h_+(x) = h_0(d + \lambda \cos \omega x)$	
		Наближений розв'язок за формулою (12), $\Delta x = 10^{-5}$	Аналітичний розв'язок за формулою (13)	$d = 1.0$, $\lambda = 0.1$, $\omega = 0.1$	$d = 0.95$, $\lambda = 0.05$, $\omega = 0.1$
0	5.7500	6.2206	6.2207	4.5107	5.7505
0.2	5.3453	5.7732	5.7733	4.1992	5.3460
0.4	4.2175	4.5330	4.5330	3.3298	4.2193
0.6	2.6317	2.8517	2.8517	2.0995	2.6325
0.8	1.0217	1.0700	1.0700	0.8363	1.0221
1.0	0	0	0	0	0

Ефективність методу продемонстрована на дослідженні практично важливих задач визначення контактної жорсткості конструктивного з'єднання композитної оболонки з жорстким бандажем. Розглядаються такі задачі: обтиснення циліндричної оболонки скінченої довжини ℓ жорстким кільцевим бандажем довжини s ; кручення циліндричної оболонки, затиснутої жорстким бандажем, які взаємодіють через клейовий прошарок; кручення двошарової циліндричної оболонки з клейовим прошарком. Контактна жорсткість таких конструктивних з'єднань оцінювалася шляхом розрахунку допустимих навантажень (допустима витягуюча сила, допустимий момент). Проведені дослідження використано при проектуванні нових конструкцій головок насосних штанг бурових колон [28].

3. Приклади.

3.1. Зношування пластини жорстким штампом. Із застосуванням розроблених підходів проведено дослідження зношування жорстким штампом трансверсально-ізотропних пластин [35].

Спочатку розглянемо квазістаціонарну плоску контактну задачу про взаємодію жорсткого штампа з тонкою пластиною сталої товщини, певним чином закріпленою на краях (рис. 2).

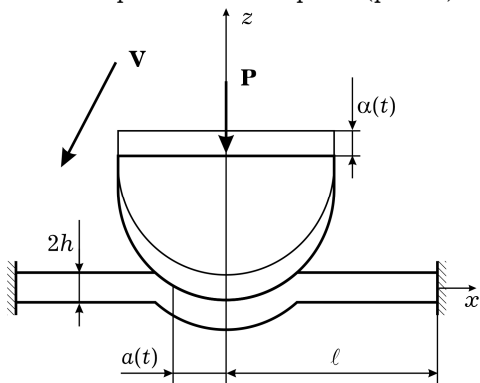


Рис. 2

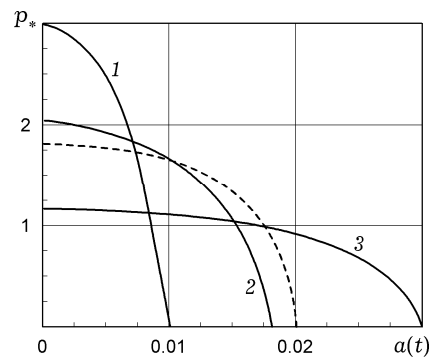


Рис. 3

Щодо взаємодії штамп і пластини приймаються такі припущення: у пластину силою P вдавлюється штамп (див. рис. 2), який рухається з усередненою швидкістю V у напрямку, перпендикулярному до площини рисунка, що й призводить до зношування; інтенсивність зношення матеріалу пропорційна роботі сил тертя, а сила тертя пов'язана із силою тиску законом Амонтона (лінійна модель); теплові ефекти не враховуються.

Закон зношування при таких припущеннях має вигляд (2). Для опису напружено-деформованого стану пластини використовується узагальнена теорія з урахуванням обтиснення і зсувних деформацій (7)–(9). Інтегральне рівняння у випадку контактної взаємодії зі зношуванням має вигляд [35]:

$$\alpha(t) - f(x) = A(t) - B(t) \frac{x^2}{2} - \frac{B_\lambda}{\Lambda^r} \int_0^x p(y, t) K(x - y, k_\lambda) dy + \\ + KVf \int_0^t p(x, y) dy + \lambda^* p(x, t), \quad |x| \leq \alpha(t). \quad (14)$$

Рівняння (14) розв'язуємо за таких умов:

$$\gamma(1, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad P = 2 \int_0^{\alpha(t)} p(y, t) dy, \quad p(\alpha(t), t) = 0.$$

Для розв'язання інтегрального рівняння (14) застосовано наближений покроковий за часом t метод. Проміжок інтегрування розбивали на достатньо малі відрізки і розв'язували задачі на кожному з них [35]. Припускаємо, що на цих відрізках шукані величини не залежать від часу. Як впливає з (14), при $t = 0$ маємо контактну задачу без зношування (відомий розв'язок інтегрального рівняння (11)). При $t \in [0, t_1]$ інтегральне рівняння (14) знову збігається з рівнянням (11), а після заміни λ^* на $\lambda_t = \lambda^* + KVft_1$ у відповідних формулах можемо записати розв'язок на відрізку $[0, t_1]$. На наступних етапах ($n \geq 2$) задачу необхідно розв'язувати з урахуванням розв'язків, отриманих на попередніх кроках. Точність розв'язку залежить від кроку розбиття відрізка інтегрування.

Результати числових розрахунків подано на рис. 3. Обчислення виконано при таких числових параметрах: $\ell/R = 1$, $h/\ell = 0.05$, $E/E' = 1$, $\nu = \nu' = 0.3$, $f = 0.1$, $V = 1 \text{ м/с}$, $K = 3.5 \cdot 10^{-7}$ – чавун – склопластик.

Графіки на рис. 3 ілюструють зміну контактного тиску та області контакту в часі (криві 1–3 відповідають значенням $t = 0, 100, 1000 \text{ с}$). Штрихова лінія відповідає розв'язку для трансверсально-ізотропного матеріалу з параметрами $E/E' = 2.66$, $\nu' = 0.2$.

Проведений числовий аналіз показує, що найбільш різка зміна контактного тиску відбувається у початковий момент роботи фрикційної пари, далі процес стабілізується, а трансверсальна ізотропія матеріалу у розглянутому випадку зменшує інтенсивність зношування. Щоб одержати більшу точність наближеного розв'язку, необхідно застосувати нерівномірне розбиття за часом. Запропонований покроковий за часом алгоритм легко переноситься на випадок змінних у часі фрикційних характеристик (швидкості взаємного проковзування, коефіцієнтів тертя та інтенсивності зношування).

3.2. Зношування гарячим штампом. Задача полягає у розв'язанні квазістатичних незв'язних рівнянь термопружності та теплопровідності за змішаних умов на поверхнях трансверсально-ізотропної пластини (в області контакту діє гарячий штамп, на решті лицьових поверхонь відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем). За таких припущень умова контакту (1) записується у вигляді [26, 37]

$$\alpha(t) - f(x) = w(x, t) + KVf \int_0^t p(x, y) dy + \lambda^* p(x, t) + (2\lambda\alpha_T + \alpha'_T)(T_0 + T_1/3), \quad |x| \leq a(t). \quad (15)$$

Для знаходження температур T_0 , T_1 задачі теплопровідності розглядаються в області контакту і поза нею. Загальний розв'язок для цілої пластини отримується шляхом зшивання розв'язків на границі області контакту, де виконуються умови рівності температур і теплових потоків. На краях пластини температура дорівнює нулеві. Розв'язуючи числово-аналітичним методом рівняння термопружності за знайденими із задачі теплопровідності значеннями T_0 , T_1 і підставляючи термопружне переміщення, а також T_0 , T_1 в умову (15), одержуємо інтегральне рівняння про зношування пластини гарячим штампом.

Числові розрахунки розподілу відносної температури на серединній поверхні (при $z = 0$) наведено на рис. 4. Показано, як впливає величина області контакту a на розподіл температури (криві 1–3 відповідають значенням $a = 0.01, 0.015, 0.02$) при $\lambda_{xx}/\lambda_{zz} = 1$.

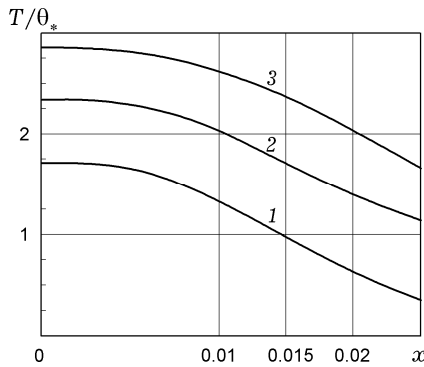


Рис. 4

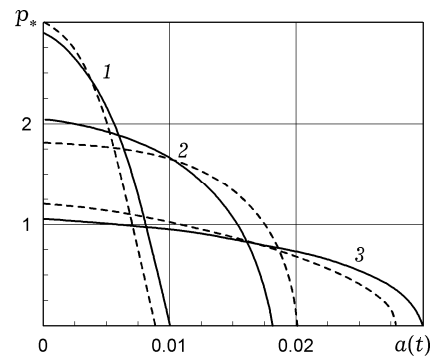


Рис. 5

На рис. 5 подано розрахунки зміни в часі контактного тиску $p_* = \ell^2 R p(x) / h^2 B_\lambda$ при таких фізико-механічних, теплофізичних і геометричних характеристиках контактної пари: $\theta = 22$ °C, $\nu = \nu' = 0.3$, $E/E' = 2.26$, $E/G' = 2.6$, $E = 11$ ГПа, $\alpha_T = \alpha'_T = 1.2 \cdot 10^{-6}$ [°C⁻¹], $h/\ell = 1/20$, $\ell/R = 1$, $f = 0.1$, $V = 1$ м/с, $K = 5 \cdot 10^{-7}$. Криві 1–3 відповідають значенням моменту часу $t = 0, 100, 1000$ с. Розрахунки виконано для параболічного штампа за теплоізоляції нижньої поверхні пластини. Встановлено, що збільшення температури штампа зменшує область контакту, але збільшує інтенсивність процесу зношування (штрихові лінії).

3.3. Зношування з урахуванням фрикційного розігріву. Задача фрикційної взаємодії описується контактними умовами (3), (4) і нестационарними рівняннями теплопровідності при нульовій початковій температурі. В області контакту використано рівняння теплопровідності зі змішаними умовами на лицьових поверхнях, фрикційний розігрів в області контакту описується тепловим потоком $g^+ = \alpha_{hf} f V p(x) / \lambda_{zz}$ [26, 39], а поза областю контакту відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем. Похідна від температури за часом апроксимується різницевою схемою. Система рівнянь термопружності і теплопровідності в такій постановці є зв'язаною за рахунок наявності контактного тиску у формулі для теплового потоку. Схема розв'язування є такою самою, як у попередніх двох задачах.

Результати числового аналізу для пари тертя чавун (штамп) – склотекстоліт у випадку теплоізоляції нижньої поверхні пластини наведено на рис. 6 і рис. 7.

На рис. 6 подано розподіл температури T^* фрикційного розігріву. Тут $T^* = T|_{z=0} \cdot 10^5 p_i^* F_0^i$, $F_0^i = (h^2/a_z \Delta t_i)^{-1}$, $\Delta t_i = 100$ с.

Розрахунки проведено для пластини зі склотекстоліту марки КАСТ-В з характеристиками $h/\ell = 1/20$, $a/\ell = 0.01$, $\ell/R = 1$, $a_z = 0.2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda_{zz} = 0.3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{С})$, $\lambda_{xx} = 0.2 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{С})$, $h = 0.01 \text{ м}$, $\omega^+ = 1$, $\alpha_T = 3 \cdot 10^{-5} [^\circ\text{С}^{-1}]$, $\alpha'_T = 4 \cdot 10^{-5} [^\circ\text{С}^{-1}]$, $V = 1 \text{ м}/\text{с}$, $f = 0.1$, $K = 5 \cdot 10^{-7}$, $E/E' = 2.26$, $E/G' = 5$, $E = 8.2 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.24$, $\nu' = 0.1$. Криві 1–3 відповідають значенням температури серединної поверхні пластини для моментів часу $t = 100, 200, 300$ с.

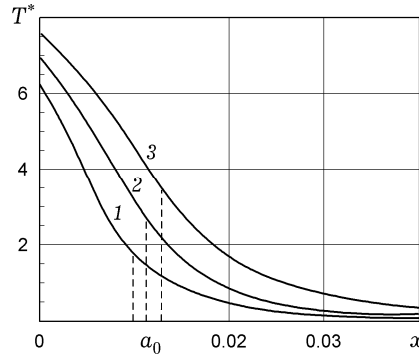


Рис. 6

Виконано також дослідження впливу анізотропії теплофізичних характеристик на величину та розподіл температури фрикційного розігріву.

Результати проведеного дослідження [26] показали, що використання композиційних матеріалів з направленою анізотропією теплофізичних властивостей елементів контактної пари дає змогу регулювати температуру фрикційного розігріву як за рахунок зміни теплопередачі всередині пластини, так і за рахунок тепловіддачі в навколишнє середовище. Розв'язок задачі дозволяє проектувати і розраховувати вузли тертя на основі композиційних матеріалів з прогнозованою зносостійкістю.

3.4. Врахування зміни товщини пластини в процесі зношування.

У цьому випадку умова контакту (1) зберігається, а для знаходження пружного переміщення використано рівняння (8) теорії трансверсально-ізотропних пластин змінної товщини [36, 38], у якому

$$h_- = h_0 = \text{const}, \quad h_+ = \begin{cases} h_0 - w_*(x, t), & |x| \leq a(t), \\ h_0, & |x| \geq a(t). \end{cases}$$

Для знаходження контактного тиску отримуємо інтегральне рівняння з мультіінтегральним ядром за просторовою координатою:

$$\alpha(t) - f(x) = A(t) - B(t) \frac{x^2}{2} - KVf \int_0^t p(x, y) dy + \lambda^* p(x, t) + \int_0^x \left\{ v(y, t) - \int_0^y \chi^2(y - y_1) v(y_1, t) dy_1 \right\} dy, \quad |x| \leq a(t), \quad (16)$$

де

$$v(x, t) = -\frac{B_0}{\Lambda' h(x, t)} \int_0^x p(y, t) h(y, t) dy, \quad \chi^2 = \Lambda' \frac{\ell^2}{B_0 h^2(x, t)}.$$

Розв'язок знайдено покровковим за часом алгоритмом. Встановлено, що врахування зміни товщини пластини в процесі зношування приводить до ефекту, протилежного до того, який спостерігається в задачах з урахуванням температури: область контакту збільшується, а інтенсивність зношування зменшується.

1. Александров В. М., Аннакулова Г. К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. – 1990. – **11**, № 1. – С. 24–28.
2. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
3. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. – Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. – 108 с.
4. Амирджанян А. А., Саакян А. В. О вдавливании п-образного жёсткого штампа в упругую полуплоскость с учетом сил трения скольжения и сцепления // Изв. Нац. Акад. наук Армении. Механика. – 2013. – **66**, № 3. – С. 3–11.
5. Андрейкив А. Е., Чернец М. В. Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. – Киев: Наук. думка, 1991. – 160 с.
6. Артюхин Ю. П. Одномерные контактные задачи теории оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 3. – С. 55–65.
7. Аулін В. В., Бобрицький В. М. Комп'ютерне моделювання полів температур та напружень в композиційних матеріалах та покриттях при їх формуванні, терті та зношуванні // Зб. наук. праць Кіровоград. нац. техн. ун-ту: Техніка в с.-г. виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – 2014. – Вип. 27. – С. 236–245.
8. Блох М. В. К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикл. механика. – 1977. – **13**, № 5. – С. 34–42.
9. Бобылёв А. А., Белашова И. С., Кузьмин С. Д. Контактная задача о вдавливании в функционально-градиентное покрытие выпуклого штампа заданным усилием // Вестн. Моск. авиац. ин-та. – 2014. – **21**, № 3. – С. 151–160.
10. Боуден Ф. П., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. – Москва: Машиностроение, 1968. – 543 с.
11. Вайсфельд Н. Д. Соударение конечного упругого цилиндра с жесткой преградой // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 74–82.
12. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. – Москва: Физматлит, 2002. – 160 с.
13. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
14. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 542 с.
15. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
16. Голуб Дж. Х., Ван Лоун Ч. Ф. Матричные вычисления. – Москва: Мир, 1999. – 548 с.
17. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – Москва: Наука, 2001. – 478 с.
18. Григolloк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – Москва: Машиностроение, 1980. – 416 с.
19. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Емельянов И. Г., Пелех Б. Л., Максимук А. В. Статика элементов конструкций / Под ред. Я. М. Григоренко. – Киев: А. С. К., 1999. – 384 с. – Механика композитов: В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 8.
20. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 6. – С. 3–27.
21. Грiлiцький Д. В., Паук В. Й. Контактна задача для товстого шорсткого шару з урахуванням зношування та теплоутворення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1989. – **25**, № 3. – С. 78–83.
22. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницкий: ПП Мель-

- ник, 2006. – 710 с.
23. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
 24. Закалов О. В., Закалов І. О. Основи тертя і зношування в машинах: Навч. посіб. – Тернопіль: Вид-во Терноп. нац. техн. ун-ту ім. І. Пулюя, 2011. – 234 с.
 25. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
 26. Кит Г. С., Максимук А. В. Износ тонкостенных элементов конструкций из композитных материалов с учетом тепловых эффектов // Механика композитн. материалов. – 1999. – **35**, № 3. – С. 309–318.
 27. Кит Г. С., Максимук А. В. Метод интегральных уравнений Вольтерра в контактных задачах для тонкостенных элементов конструкций // Теорет. и прикл. механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 29–35.
 28. Копей Б. В., Максимук А. В., Щербина Н. Н. Анализ контактных напряжений в конструктивных соединениях композитной оболочки со стальным бандажем // Механика композитн. материалов. – 2000. – **36**, № 1. – С. 109–120.
 29. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. – Москва: Машиностроение, 1977. – 526 с.
 30. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В., Жук Я. А. Нестационарная контактная задача теории упругости (согласованные и несогласованные поверхности) // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 162–178.
 31. Кузьменко А. Г. Надежность узлов трения по прочности и износу. – Хмельницкий: Хмельн. нац. ун-т, 2011. – 391 с.
 32. Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 6. – С. 39–44.
 33. Кушнір Р. М., Попович В. С., Процюк Б. В. Про розвиток досліджень термо-механічної поведінки термочутливих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 7–27.
Te same: Kushnir R. M., Popovych V. S., Protsyuk B. V. On the development of investigations of the thermomechanical behavior of thermally sensitive bodies // J. Math. Sci. – 2019. – **236**, No. 1. – P. 1–20.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4094-4>.
 34. Максимович В. М., Коцюба А. Ю., Лавренчук С. В. Плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми. – Луцьк: РВВ Луцьк. нац. техн. ун-ту, 2012. – 97 с.
 35. Максимук О. В. До питання зношування тонких анізотропних пластин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 3. – С. 125–128
 36. Максимук О. В. Зношування анізотропних пластин з урахуванням зміни їх товщини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 4. – С. 117–119.
 37. Максимук О. В. Математична модель зношування анізотропних пластин гарячим штампом // Проблеми трибології. – 1997. – Вип. 5. – С. 53–60.
 38. Максимук О. В. Про один варіант теорії трансверсально-ізотропних пластин змінної товщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 130–136.
 39. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – 396 с.
 40. Мартиняк Р. М., Швець Р. М. Математична модель механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 2. – С. 107–109.
Te same: Martinyak R. M., Shvets' R. M. A mathematical model of mechanical contact of bodies across a thin inhomogeneous layer // J. Math. Sci. – 1998. – **90**, No. 2. – P. 2000–2002.
 41. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные задачи теории оболочек и стержней. – Москва: Машиностроение, 1978. – 248 с.
 42. Мышкин Н. К., Петроковец М. И. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения трибологии. – Москва: Физматлит, 2007. – 368 с.
 43. Нахайчук О. В., Мізрах А. А., Пухтіцька Н. О., Музичук В. І. Дослідження впливу тертя на напружений стан при вдавлуванні заокругленого індентора // Проблеми трибології. – 2015. – **78**, № 4. – С. 11–16.

44. *Острик В. И.* Осесимметричный контакт штампа полиномиального профиля с упругим полупространством при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. – 2013. – **77**, № 4. – С. 605–619.
45. *Острик В. И.* Контактна механіка: Підруч. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015. – 560 с.
46. *Панасюк В. В., Теплий М. Й.* Деякі контактні задачі теорії пружності. – Київ: Наук. думка, 1975. – 196 с.
47. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
48. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
49. *Пістунов І. М.* Вузли тертя ковзання. Моделі та оптимізація. – Дніпропетровськ: Нац. гірничий ун-т, 2009. – 177 с.
50. *Подильчук Ю. М., Ткаченко В. С., Соколовский Я. И.* Термоупругая контактная задача о вдавлении нагретого эллиптического в плане штампа в трансверсально-изотропное пространство // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 11. – С. 38–45.
51. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
52. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
53. *Полтавченко С. В.* Моделювання зносостійких деталей з покриттям // Тр. Одес. політехн. ун-та. – 2006. – Вып. 1(25). – С. 32–36.
54. *Попов Г. Я., Толкачев В. М.* Проблема контакта тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 4. – С. 192–206.
55. *Рвачёв В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. – Киев: Наук. думка, 1977. – 235 с.
56. *Сорокатиий Р. В., Посонський С. Ф., Диха К. О.* Моделювання зносоконтатних параметрів для циліндричних напрямних ковзання // Проблеми трибології. – 2015. – **75**, № 1. – С. 37–43.
57. *Улітко А. Ф., Острик В. И.* Фрикційний контакт жорсткого конуса з пружним півпростором // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 4. – С. 106–116.
58. *Чихос Х.* Системный анализ в трибонике. – Москва: Мир, 1982. – 351 с.
59. *Чичинадзе А. В., Берлинер Э. М., Браун Э. Д.* Трение, износ и смазка (Трибология и триботехника). – Москва: Машиностроение, 2003. – 576 с.
60. *Barber J. R.* Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1976. – **29**, No. 1. – P. 1–13.
61. *Ciavarella M., Menga N.* A note on wear of elastic sliding parts with varying contact area // J. Mech. Mater. Struct. – 2015. – **10**, No. 3. – P. 255–264.
62. *Ciulcu C., Hoarau-Mante T.-V., Sofonea M.* Viscoelastic sliding contact problems with wear // Math. & Comput. Model. – 2002. – **36**, No. 7-8. – P. 861–874.
63. *Çömez I.* Frictional contact problem for a rigid cylindrical stamp and an elastic layer resting on a half plane // Int. J. Solids Struct. – 2010. – **47**, Nos. 7-8. – P. 1090–1097.
64. *Erdogan F., Güler M. A.* Contact mechanics of FGM coatings. – Bethlehem: Lehigh Univ., 2000. – 276 p.
65. *Fundamentals of Friction: Macroscopic and microscopic processes /* Eds. I. L. Singer, H. Pollock. – Dordrecht: Kluwer Acad., 1992. – xvi+621 p. – NATO ASI Ser. E, Vol. 220.
66. *Gray N.* Automatic reduction of elliptic integrals using Carlson's relations. – Math. Comput. – 2002. – **71**, No. 237. – P. 311–318.
67. *Hills D. A., Nowell D., Sackfield A.* The state of stress induced by cylindrical sliding contacts with frictional heating // Int. J. Mech. Sci. – 1990. – **32**, No. 9. – P. 767–778.
68. *Holmberg K., Matthews A.* Coatings tribology: Properties, mechanisms, techniques and applications in surface engineering. – Elsevier, 2009. – 576 p.
69. *Holmberg K., Ronkainen H., Laukkanen A., Wallin K.* Friction and wear of coated surfaces – scales, modelling and simulation of tribomechanisms // Surface & Coatings Technology. – 2007. – **202**, Nos. 4-7. – P. 1034–1049.
70. *Kahya V., Birinci A., Erdol R.* Frictionless contact problem between two orthotropic elastic layers // Int. J. Civil, Architectural, Structural and Construction Eng. – 2007. – **1**, No. 1. – P. 7–13.
71. *Kit H., Maksymuk O.* Wear of thin coating of solids with regard for an interme-

- diate layer // Proc. 3rd Int. Symp. on Tribo-Fatigue (ISTF 2000). – Beijing, China. Human University Press, 2000. – P. 499–503.
72. Ma L. F., Korsunsky A. M. Fundamental formulation for frictional contact problems of coated systems // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**, No. 11-12. – P. 2837–2854.
 73. Öner E., Yaylaci M., Birinci A. Analytical solution of a contact problem and comparison with the results from FEM // Struct. Eng. & Mech. – 2015. – **54**, No. 4. – P. 607–622.
 74. Popov V. L. Contact mechanics and friction: Physical principles and applications. – Berlin etc.: Springer, 2010. – xvi+362 p.
 75. Rojek J., Telega J. J. Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. Part I – General developments // J. Theor. Appl. Mech. – 2001. – **39**, No. 3. – P. 655–677.
 76. Rončević B. Effect of friction on a receding contact between cylindrical indenter, layer and substrate // Machines. Technologies. Materials. – 2016. – **10**, No. 8. – P. 3–6.
 77. Soldatenkov I. A. The periodic contact problem of the plane theory of elasticity. Taking friction, wear and adhesion into account // J. Appl. Math. Mech. – 2013. – **77**, No. 2. – P. 245–255.
 78. Stolz C. Thermodynamical description of running discontinuities: application to friction and wear // Entropy. – 2010. – **12**, No. 6. – P. 1418–1439.
 79. Szolwinski M., Farris T. Mechanics of fretting fatigue crack formation // Wear. – 1996. – **198**, Nos. 1-2. – P. 93–107.
 80. Vanini S. A. S., Shahba M., Kordani N. Numerical investigation of sliding frictional contact in functionally graded steels (FGS) // Mater. Research. – 2014. – **17**, No. 6. – P. 1478–1484.
 81. Wriggers P. Computational contact mechanics. – Chichester: J. Wiley & Sons, 2002. – 464 p.

ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИЗНОС ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотрены контактные задачи для тонкостенных элементов конструкций, а также их износ. Предложена единая методика их решения, базирующаяся на сведении решения задач к интегральным уравнениям Вольтерра. Это дает возможность выявить особенности решений в зависимости от гипотез, характеризующих деформирование тонкостенного элемента. Приведены решения и анализ задач износа пластин жестким штампом, горячим штампом, с учетом фрикционного разогрева, с учетом изменения толщины пластинки в процессе износа.

Ключевые слова: контактные задачи, интегральные уравнения Вольтерра, износ, тонкостенные элементы, фрикционный разогрев.

THE PECULIARITIES IN CONTACT INTERACTION AND WEAR OF THIN-WALLED ELEMENTS OF CONSTRUCTION

The contact problems of thin-walled elements of constructions are considered as well as their wear. An uniform approach to their solution based on the reduction to the Volterra integral equations is proposed. It enables to establish the peculiarities of solutions depending on hypotheses that characterize the deformation of a thin-walled element. The solutions and analysis of problems of the plate wear by a rigid punch, by a hot punch, by accounting the frictional heating, and by accounting the thickness change in process of wear are presented.

Key words: contact problems, Volterra integral equations, wear, thin-walled elements, frictional heating.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.12.19