

КОНТАКТ БЕРЕГІВ МІЖФАЗНОЇ НАПІВНЕСКІНЧЕНОЇ ТРІЩИНИ

Розглянуто рівновагу двох жорстко з'єднаних пружних півплощин із різних матеріалів, на межі поділу яких міститься напівнескінченна тріщина з прикладеними до її берегів нормальними та дотичними зосередженими силами. Враховано фрикційний контакт берегів тріщини поблизу її вершини та на певній відстані від вершини. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа розв'язок інтегрального рівняння задачі отримано в замкненій формі. Знайдено межі областей контакту берегів тріщини, розподіли напружень в областях контакту та на межі поділу півплощин поза тріщиною.

Ключові слова: міжфазна тріщина, модель Комніноу, інтеграл Мелліна, метод Вінера – Гопфа, гіпергеометрична функція.

Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини, що міститься на межі поділу двох різнорідних пружних півплощин, а до її берегів прикладені нормальні зосереджені сили, розглянута в [14] без урахування сил тертя в області контакту та в [6, 10] в умовах фрикційного контакту берегів тріщини. У цій задачі, згідно з моделлю Комніноу [4, 15], контакт берегів тріщини виникає біля її вершини, а розмір області контакту у відношенні до відстані між вершиною тріщини та точками прикладання сил, є надзвичайно малим (його максимальне значення не перевищує 10^{-6}). Разом з тим, аналіз розв'язків, отриманих у [10, 14], показує, що ці розв'язки є осцилюючими на нескінченності. Це означає, що осцилюючий характер у нескінченно віддаленій точці, зокрема, нормальних переміщень берегів тріщини вказує на необхідність введення напівнескінченної області контакту на певному віддаленні від точок прикладання зосереджених сил з метою усунути взаємне перекриття берегів тріщини. Але, зважаючи на те, що відстань до зони осциляцій на декілька порядків перевищує характерний розмір задачі (відстань між вершиною тріщини та точками прикладання сил), впливом напівнескінченної області контакту на напружено-деформований стан кусково-однорідної площини на скінченній відстані від вершини тріщини можна знехтувати і фактично її не вводити. Наведені міркування обґрунтовують постановку контактної задачі з однією областю контакту біля вершини міжфазної напівнескінченної тріщини у випадку прикладених до її берегів нормальних зосереджених сил, прийняту в [10, 14].

Більш загальну задачу про міжфазну напівнескінченну тріщину з фрикційним контактом її берегів при дії нормальних і дотичних зосереджених сил розглянуто в роботі [1]. Показано, що при збільшенні дотичного навантаження область контакту значно збільшується і за відсутності нормального навантаження досягає точки прикладання сил. Вказано на осциляції отриманого розв'язку на нескінченності, але напівнескінченна область контакту не вводиться до розгляду і її впливом фактично нехтується.

Для міжфазної скінченної тріщини у випадку нормального навантаження розміри областей контакту, що виникають біля вершин тріщини, є також надзвичайно малими порівняно з розміром самої тріщини [3, 4, 6, 11]. Тому, як правило, взаємним впливом цих областей контакту нехтують [6] і розглядають постановки задач з областю контакту біля однієї із вершин тріщини [3, 12]. У випадку ж комбінованого нормального та дотичного навантаження біля однієї із вершин тріщини виникає значна область контакту, розмір якої може навіть перевищувати півдовжину тріщини, а біля іншої вершини область контакту має надто малий розмір, ще менший, ніж у

✉v.i.ostryk@gmail.com

випадку тільки нормального навантаження [4, 8]. При цьому знаходять спочатку розв'язок задачі за умови існування однієї макрозони контакту [3, 8, 12], а потім з урахуванням цього розв'язку отримують розв'язок в околі мікрозони контакту [6, 8, 12].

Нижче розглянуто задачу для міжфазної напівнескінченної тріщини, коли до її берегів прикладено нормальні та дотичні зосереджені сили. Вводяться дві області контакту берегів тріщини – скінченна область біля вершини тріщини та напівнескінченна на певній відстані від неї. У випадку одного із напрямків дії зосереджених дотичних сил, коли напівнескінченна область контакту надто віддалена від вершини тріщини, вона виключається із розгляду, і задача розв'язується за наявності однієї області контакту біля вершини тріщини аналогічно до [1, 10, 14]. У протилежному до попереднього випадку задача спочатку розв'язується за наявності тільки напівнескінченної області контакту, а потім знаходиться розв'язок в околі мікрозони контакту біля вершини тріщини.

1. Постановка задачі. Розглянемо дві пружні півплощини $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ і $0 \leq r < \infty$, $-\pi \leq \vartheta \leq 0$ з модулями зсуву G_1, G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно, жорстко з'єднаних між собою вздовж променя $\vartheta = 0$. На берегах $\vartheta = \pm\pi$ напівнескінченної тріщини у кусково-однорідній площині на однаковій відстані $r = a$ від початку координат прикладено зосереджені нормальні та дотичні сили інтенсивностей P і Q (рис. 1).

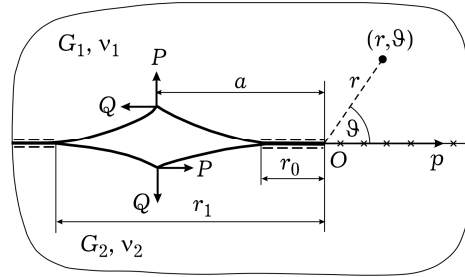


Рис. 1

Припускаємо, що вказане навантаження призводить до виникнення двох областей контакту берегів тріщини: скінченної області $0 < r \leq r_0$, $\vartheta = \pm\pi$ поблизу вершини тріщини та напівнескінченної $r_1 \leq r < \infty$, $\vartheta = \pm\pi$, де нормальний тиск і дотичні зусилля пов'язані законом тертя Амонтона (Кулона). Довжина r_0 скінченної області і відстань r_1 напівнескінченної області до вершини тріщини заздалегідь невідомі.

Крайові умови задачі мають вигляд

$$\begin{aligned} u_r^{(1)}|_{\vartheta=0} &= u_r^{(2)}|_{\vartheta=0}, & u_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=0} &= u_\vartheta^{(2)}|_{\vartheta=0}, & \sigma_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=0} &= \sigma_\vartheta^{(2)}|_{\vartheta=0}, \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=0} &= \tau_{r\vartheta}^{(2)}|_{\vartheta=0}, & \sigma_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= \sigma_\vartheta^{(2)}|_{\vartheta=-\pi}, & \tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= \tau_{r\vartheta}^{(2)}|_{\vartheta=-\pi}, \\ & & & & 0 \leq r < \infty, \\ u_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= u_\vartheta^{(2)}|_{\vartheta=-\pi}, & \tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= \operatorname{sgn}(a-r)\mu_0 \sigma_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi}, \\ & & & & 0 < r \leq r_0, \quad r_1 \leq r < \infty, \\ \sigma_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= -P\delta(r-a), & \tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= Q\delta(r-a), & r_0 < r < r_1, \end{aligned} \quad (1)$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя, $\delta(r-a)$ – дельта-функція Дірака. При цьому знак при μ_0 у восьмій із рівностей (1) вибрано за припущення, що для радіальних переміщень в області контакту виконуються умови

$$\Delta u_r < 0, \quad 0 < r \leq r_0, \quad \Delta u_r > 0, \quad r_1 \leq r < \infty, \quad (2)$$

де

$$\Delta u_r = u_r^{(2)}|_{\vartheta=-\pi} - u_r^{(1)}|_{\vartheta=\pi},$$

які необхідно перевірити після розв'язання задачі.

2. Інтегральне рівняння задачі. Розглянемо першу крайову задачу для кусково-однорідної площини з напівнескінченим розрізом у випадку заданих на його берегах однакових напружень. Крайові умови цієї задачі складаються з перших шести умов (1) на лінії з'єднання півплощин і таких двох умов на верхньому березі розрізу:

$$\sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi} = \sigma(r), \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi} = \tau(r), \quad 0 \leq r < \infty. \quad (3)$$

Згідно з її розв'язком [6, 10], отриманим методом інтегрального перетворення Мелліна за радіальною координатою r , напруження на лінії з'єднання півплощин і переміщення на берегах розрізу мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} &= -\frac{\alpha+1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{(\alpha+1)\bar{\sigma}(s) \cos \pi s - (\alpha-1)\bar{\tau}(s) \sin \pi s\} \frac{r^{-s-1} ds}{\Delta(s)}, \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} &= -\frac{\alpha+1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{(\alpha-1)\bar{\sigma}(s) \sin \pi s + (\alpha+1)\bar{\tau}(s) \cos \pi s\} \frac{r^{-s-1} ds}{\Delta(s)}, \\ 2G_1 u_r^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{u_1(s)\bar{\sigma}(s) - \alpha(\chi_1+1)\bar{\tau}(s) \sin 2\pi s\} \frac{r^{-s} ds}{s\Delta(s)}, \\ 2G_2 u_r^{(2)} \Big|_{\vartheta=-\pi} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{u_2(s)\bar{\sigma}(s) + \alpha(\chi_2+1)\bar{\tau}(s) \sin 2\pi s\} \frac{r^{-s} ds}{s\Delta(s)}, \\ 2G_1 u_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{\alpha(\chi_1+1)\bar{\sigma}(s) \sin 2\pi s + u_1(s)\bar{\tau}(s)\} \frac{r^{-s} ds}{s\Delta(s)}, \\ 2G_2 u_{\vartheta}^{(2)} \Big|_{\vartheta=-\pi} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{\alpha(\chi_2+1)\bar{\sigma}(s) \sin 2\pi s - u_2(s)\bar{\tau}(s)\} \frac{r^{-s} ds}{s\Delta(s)}, \\ u_1(s) &= \alpha(\chi_1-1) \cos 2\pi s + \chi_1 - \alpha^2, \\ u_2(s) &= \alpha(\chi_2-1) \cos 2\pi s + \alpha^2 \chi_2 - 1, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\bar{\sigma}(s) = \int_0^{\infty} \sigma(y) y^s dy, \quad \bar{\tau}(s) = \int_0^{\infty} \tau(y) y^s dy, \quad -\frac{1}{2} < c < 0,$$

$$\alpha = \frac{G_1 + \chi_1 G_2}{G_2 + \chi_2 G_1} > 1, \quad \chi_1 = 3 - 4\nu_1, \quad \chi_2 = 3 - 4\nu_2,$$

$$\Delta(s) = 4\alpha \cos \pi(s+i\theta) \cos \pi(s-i\theta), \quad \theta = \frac{1}{2\pi} \ln \alpha.$$

Введемо невідому функцію тиску в областях контакту

$$q(r) = \begin{cases} -\sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi}, & 0 < r \leq r_0, \quad r_1 \leq r < \infty, \\ 0, & r_0 < r < r_1, \end{cases} \quad (5)$$

і використаємо формули (4) як подання розв'язку розглядуваної задачі. Поклавши

$$\sigma(r) = -P\delta(r-a) - q(r), \quad \tau(r) = Q\delta(r-a) + \operatorname{sgn}(r-a)\mu_0 q(r),$$

$$\bar{\sigma}(s) = -Pa^s - \left(\int_0^{r_0} + \int_{r_1}^{\infty} \right) q(y) y^s dy,$$

$$\bar{\tau}(s) = Qa^s - \mu_0 \left(\int_0^{r_0} + \int_{r_1}^{\infty} \right) q(y)y^s dy,$$

виконаємо всі крайові умови (1), крім умови $u_9^{(1)}|_{9=\pi} = u_9^{(2)}|_{9=-\pi}$ в областях контакту. Задовольнивши цю умову, отримуємо рівняння відносно функції контактного тиску:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{r_0} + \int_{r_1}^{\infty} \right) q(y) dy \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin \pi s \cos \pi(s + \operatorname{sgn}(a-r)\gamma) \left(\frac{y}{r}\right)^s}{s \cos \pi(s+i\theta) \cos \pi(s-i\theta)} ds = \\ & = -\frac{\cos \pi \gamma}{\alpha+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{[P(\alpha+1) \cos \pi s + Q(\alpha-1) \sin \pi s] \sin \pi s}{s \cos \pi(s+i\theta) \cos \pi(s-i\theta)} \left(\frac{a}{r}\right)^s ds, \\ & \quad 0 < r \leq r_0, \quad r_1 \leq r < \infty, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{де } \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(\alpha-1)\mu_0}{\alpha+1}.$$

У рівнянні (6) контур інтегрування в інтегралах за s перемістимо на уявну вісь, поклавши $c=0$, оскільки підінтегральні функції не містять полюсів у смузі $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$. Виконавши заміни

$$s = -i\tau, \quad r = r_0 e^{-\xi}, \quad y = r_0 e^{-\eta}, \quad a = r_0 e^{-t_0}, \quad r_1 = r_0 e^{-t_1}, \quad (7)$$

і перейшовши до нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = q(r_0 e^{-\eta}) e^{-\eta}, \quad (8)$$

отримаємо інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{t_1} k(\eta - \xi) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi), \\ & \quad -\infty < \xi < t_1, \quad 0 < \xi < \infty, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} k(\xi - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi \tau \operatorname{ch} \pi(\tau + i\gamma)}{\tau \operatorname{ch} \pi(\tau + \theta) \operatorname{ch} \pi(\tau - \theta)} e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \\ f(\xi) &= -\frac{\cos \pi \gamma}{\pi r_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[P \operatorname{ch} \pi \tau - iQ \operatorname{th} \pi \theta \operatorname{sh} \pi \tau] \operatorname{sh} \pi \tau}{\tau (\operatorname{ch} 2\pi \tau + \operatorname{ch} 2\pi \theta)} e^{-i\tau(\xi - t_0)} d\tau = \\ &= -\frac{\cos \pi \gamma}{\pi r_0} \operatorname{Re} \left[(P + iQ) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(k+1/2-i\theta)(\xi-t_0)}}{k+1/2-i\theta} \right]. \end{aligned}$$

3. Випадок однієї області контакту ($0 < r \leq r_0$, $Q \geq 0$). Розв'язки,

отримані в роботах [10, 14] для випадку дії нормальних сил за відсутності дотичних сил ($Q=0$) без урахування напівнескінченної області контакту, $t_1 = -\infty$, мають осциляції нормальних переміщень берегів тріщини у зоні, віддаленій від точки прикладання сил на відстань, яка на декілька (не менше шести) порядків менша, ніж розмір a . Це означає, що при введенні напівнескінченної об-

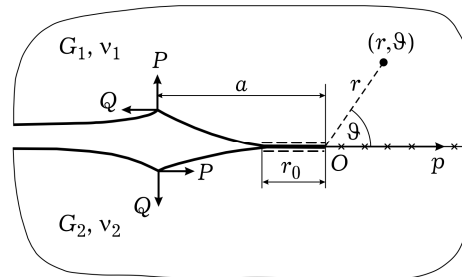


Рис. 2

ласті контакту її відстань від точки прикладання сил буде співмірною з відстанню до зони осциляцій, а похибки отриманих в [10, 14] розв'язків в області $0 \leq r \leq a$ є незначними (не більше, ніж 10^{-6}).

У випадку прикладання дотичних сил $Q > 0$ (разом із нормальними) розміри r_0 і r_1 збільшуються порівняно з випадком $Q = 0$ [1], а похибка від нехтування контактом берегів тріщини в області $r_1 \leq r < \infty$ стає ще меншою. Таким чином, у випадку $Q \geq 0$, як і в [1, 10, 14], виключимо із розгляду напівнескінченну область контакту (рис. 2), поклавши $r_1 = \infty$, $t_1 = -\infty$, і замість (9) маємо інтегральне рівняння

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta = f(\xi), \quad 0 < \xi < \infty. \quad (10)$$

Якщо $Q = 0$, рівняння (10) збігається з інтегральним рівнянням із [10].

Асимптотичне спрощення інтегрального рівняння (9) до вигляду (10) може бути більш строго обґрунтовано, як це зроблено в роботі [8], зведенням рівняння (9) до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Знехтувавши в отриманій системі величинами порядку $e^{\pm 1}$ порівняно з одиницею, розв'язок її знаходиться у явному вигляді та збігається з розв'язком рівняння (10).

Розв'язок інтегрального рівняння (10), отриманий, як і в [10, 14], методом Вінера – Гопфа [5], має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^+(\tau)}{K^+(\tau)} e^{-i\tau\xi} d\tau, \quad K^+(\tau) = \frac{\Gamma(1/2 - i\tau - i\theta)\Gamma(1/2 - i\tau + i\theta)}{\Gamma(1 - i\tau)\Gamma(1/2 - i\tau + \gamma)}, \\ f^+(\tau) &= -\frac{2 \cos \pi\gamma}{r_0 \sqrt{(2\pi)^3}} \operatorname{Re} \left((P - iQ) e^{(1/2+i\theta)t_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(t_0)}{k + 1/2 + i(\theta + \tau)} \right), \\ b_k(t_0) &= \frac{\Gamma(k + 1/2 + i\theta)\Gamma(k + 1 - \gamma + i\theta)}{\Gamma(k + 1 + 2i\theta)k!} e^{kt_0}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Із умови обмеженості напружень у точках $r = r_0$, $\vartheta = \pm\pi$ впливає рівняння для визначення відносного розміру $r_0/a = e^{t_0}$ області контакту:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[A e^{-i\theta(t_0 - 2 \ln 2)} {}_2F_1(1/2 - i\theta, 1 - \gamma - i\theta; 1 - 2i\theta; e^{t_0}) \right] &= 0, \\ A &= (P + iQ) \frac{\Gamma(1 - \gamma - i\theta)}{\Gamma(1 - i\theta)}, \end{aligned} \quad (12)$$

де ${}_2F_1(a_1, a_2; a_3; z)$ – гіпергеометрична функція Гаусса [2].

У випадку гладкого контакту ($\mu_0 = 0$, $\gamma = 0$) гіпергеометрична функція із (12) виражається через елементарні функції [13]:

$${}_2F_1(b, 1/2 + b; 2b; z) = (1 - z)^{-1/2} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - z}}{2} \right)^{1-2b}, \quad b = 1/2 - i\theta, \quad z = e^{t_0}, \quad (13)$$

і рівняння перетворюється до вигляду

$$\cos \left\{ \arctg \frac{Q}{P} + \theta \left[-t_0 + 2 \ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{t_0}} \right) \right] \right\} = 0. \quad (14)$$

Звідси, вибравши корінь $\frac{\pi}{2}$ (обґрунтування такого вибору міститься в [14], див. також [6, 10]), отримуємо розмір області контакту:

$$r_0 = ae^{t_0} = a \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{1}{2\theta} \operatorname{arctg} \frac{P}{Q} \right), \quad \mu_0 = 0. \quad (15)$$

Якщо $Q = +0$ ($P > 0$), значення r_0 із (15) збігається з відповідним значенням, отриманим у [14], і є надто малою величиною порівняно з a . Його максимум досягається тоді, коли одна з півплощин є абсолютно жорсткою ($r_0/a \sim 4e^{-15}$). Якщо ж $Q > 0$, розмір r_0 поступово стає співмірним з відстанню a .

У випадку фрикційного контакту, коли $Q/P < 1$, вважаємо, що розмір r_0 залишається такою ж малою величиною, як і у випадку гладкого контакту, і можемо з високою точністю асимптотично спростити рівняння (12), нехтуючи величиною e^{t_0} порівняно з одиницею. При цьому значення гіпергеометричної функції у рівнянні (12) стає рівним 1, а саме рівняння набуває вигляду

$$\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{Q}{P} + \theta(2 \ln 2 - t_0) + \arg \frac{\Gamma(1 - \gamma - i\theta)}{\Gamma(1 - i\theta)} \right) = 0. \quad (16)$$

Вибравши в рівнянні (16) корінь $\frac{\pi}{2}$, знаходимо

$$r_0 = ae^{t_0}, \quad t_0 = 2 \ln 2 - \frac{1}{\theta} \arg \frac{(Q + iP)\Gamma(1 - \gamma + i\theta)}{\Gamma(1 + i\theta)}, \quad \frac{Q}{P} < 1. \quad (17)$$

Напруження в області контактного тиску берегів тріщини та на її продовженні, а також стрибок радіальних переміщень на тріщині в області контакту знайдемо, використавши заміни (5), (7), (8), подання (4) і розв'язок (11) інтегрального рівняння (10). Перетворивши відповідні інтеграли до рядів за теорією лишків, отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= -\frac{\operatorname{ch}^2 \pi\theta}{\pi^2 r_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \operatorname{Re} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n - k - 1/2 + i\theta} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^k + \\ &\quad + \frac{1 + \mu_0^2}{\pi^2 r_0} \operatorname{sh}^2 \pi\theta \cos^2 \pi\gamma \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} \operatorname{Re} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n - k - \gamma + i\theta} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{k-1/2+\gamma}, \\ \Delta u_r &= \frac{A_0}{\pi^2} \cos \pi\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^{(2)}}{k + 1/2 + \gamma} \operatorname{Re} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n - k - \gamma + i\theta} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{k+1/2+\gamma}, \\ (\sigma_{\vartheta}^{(1)} + i\tau_{r\vartheta}^{(1)}) \Big|_{\vartheta=0} &= -(1 + i\mu_0) \frac{\operatorname{ch}^2 \pi\theta}{\pi^2 r_0} \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k^{(1)} \operatorname{Re} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n - k - 1/2 + i\theta} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^k + \\ &\quad + i \frac{1 + \mu_0^2}{2\pi^2 r_0} \operatorname{sh} 2\pi\theta \cos \pi\gamma \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k^{(2)} \times \\ &\quad \times \operatorname{Re} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n - k - \gamma + i\theta} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{k-1/2+\gamma}, \quad 0 < r \leq r_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_9^{(1)} + i\tau_{r9}^{(1)})|_{9=0} &= (P - iQ) \frac{\operatorname{ch} \pi\theta}{\pi(r+a)} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{i\theta \ln(r/a)} - \frac{1 + i\mu_0}{2\pi^2 r_0} \operatorname{ch} \pi\theta \cos \pi\gamma \times \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k^{(3)} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n+k+1} - \right. \\
&\left. - \bar{P}_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{b}_n(t_0)}{n+k+1-2i\theta} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{k+3/2-i\theta}, \quad r_0 < r < \infty, \quad (18)
\end{aligned}$$

де

$$A_0 = \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{\chi_1 + 1}{G_1} + \frac{\chi_2 + 1}{G_2} \right) \frac{\cos \pi(\rho - \gamma)}{\sin \pi\rho}, \quad \rho = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(\alpha + 1)\mu_0}{\alpha - 1},$$

$$P_0(t_0) = (P - iQ) e^{(1/2+i\theta)t_0},$$

$$a_k^{(1)} = \frac{|\Gamma(k + 3/2 + i\theta)|^2}{\Gamma(k + 3/2 - \gamma)k!}, \quad a_k^{(2)} = \frac{|\Gamma(k + 1 + \gamma + i\theta)|^2}{\Gamma(k + 1/2 + \gamma)k!},$$

$$a_k^{(3)} = \frac{\Gamma(k + 3/2 - i\theta)\Gamma(k + 1 + \gamma - i\theta)}{\Gamma(k + 1 - 2i\theta)k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тут \bar{b}_n, \bar{P}_0 – величини, комплексно-спряжені до b_n, P_0 .

На підставі (18) знаходимо асимптотичну поведінку напружень в околі вершини тріщини:

$$\begin{aligned}
\sigma_9^{(1)}|_{9=\pi} &\sim \frac{\sin \pi\gamma}{\mu_0} \tau_{r9}^{(1)}|_{9=0} \sim \\
&\sim \frac{1 + \mu_0^2}{\pi^2 r_0} \operatorname{sh}^2 \pi\theta \cos^2 \pi\gamma \cdot a_0^{(2)} \operatorname{Re} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n - \gamma + i\theta} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1/2+\gamma}, \\
\sigma_9^{(1)}|_{9=0} &\sim -\frac{\operatorname{ch}^2 \pi\theta}{\pi^2 r_0} a_0^{(1)} \operatorname{Re} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n - 1/2 + i\theta} \right), \quad r \rightarrow 0. \quad (19)
\end{aligned}$$

Це означає, що поблизу вершини тріщини напруження в області контакту необмежені, на лінії продовження тріщини дотичні напруження необмежені, а нормальні – скінченні, що є типовим для задач про міжфазну тріщину [4]. При цьому показник сингулярності напружень, рівний $-1/2 + \gamma$, є характерним для задач ковзного контакту пружних тіл.

Якщо $Q/P < 1$, формули (18), (19) асимптотично спрощуються (при $e^{t_0} \ll 1$) і з урахуванням рівняння (16) перетворюються до відповідних формул, наведених у [10], де множник P слід замінити на $\sqrt{P^2 + Q^2}$, крім виразу для $(\sigma_9^{(1)} + i\tau_{r9}^{(1)})|_{9=0}$ при $r_0 < r < \infty$, у якому P замінюється на $P - iQ$. При цьому у випадку гладкого контакту гіпергеометричні функції, що входять до виразів для напружень в r_0 -околі точки $r = 0$, виражаються через елементарні функції за формулами [13]:

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(b, 1-b; 1/2; \sin^2 z) &= \frac{\sin(2b-1)z}{(2b-1)\sin z}, \\
{}_2F_1(b, -b; 1/2; \sin^2 z) &= \cos 2bz, \quad b = i\theta, \quad \sin^2 z = \pm r/r_0, \quad (20)
\end{aligned}$$

а самі напруження набувають вигляду [14]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{P^2 + Q^2}{ar}} \operatorname{sh} \left(2\theta \arccos \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right), \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \\ -\tau_{r\vartheta}^{(1)} \end{array} \right\} |_{\vartheta=0} &= \frac{\operatorname{ch} \pi\theta}{\pi} \sqrt{\frac{P^2 + Q^2}{ar}} \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \left(2\theta \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right), \\ &0 < r \leq r_0, \quad \mu_0 = 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Із першої з формул (19) визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень:

$$\begin{aligned}K_{II} &= -\sqrt{2\pi ar_0} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1/2-\gamma} \tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=0} = -(1 + \mu_0^2) \sqrt{\frac{a}{2\pi^3 r_0}} \operatorname{sh} 2\pi\theta \cos \pi\gamma \times \\ &\times a_0^{(2)} \operatorname{Re} \left(P_0(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n - \gamma + i\theta} \right),\end{aligned}\quad (22)$$

який для випадку $Q/P < 1$ після асимптотичного спрощування ($e^{t_0} \ll 1$) набуває вигляду

$$K_{II} = \frac{\sqrt{2(P^2 + Q^2)} \pi\theta \operatorname{cth} \pi\theta}{\Gamma(1/2 + \gamma) |\Gamma(1 + i\theta)\Gamma(1 - \gamma + i\theta)| \cos \pi\gamma}.\quad (23)$$

Розподіли напружень і переміщень всередині півплощин поблизу вершини тріщини визначаються через коефіцієнт K_{II} за відомими формулами [4, 7].

Ряд, який входить до виразу $\sigma_{\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=0, r=0}$ із (19), на підставі одного із співвідношень Гауса між суміжними гіпергеометричними функціями [2] виразимо через ряди із рівностей (12), (22). Врахувавши при цьому рівняння (12), виражаємо граничне значення нормальних напружень у вершині тріщини через коефіцієнт інтенсивності напружень:

$$\sigma_{\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=0, r=0} = \frac{|\Gamma(1 - \gamma + i\theta)|^2 \operatorname{sh} \pi\theta}{\sqrt{2\pi ar_0} (1/2 - \gamma) \Gamma^2(1/2 - \gamma)} K_{II}.\quad (24)$$

Для гладкого контакту ($\mu_0 = 0$, $\gamma = 0$) із (19), (22) з урахуванням тождествностей

$$\begin{aligned}{}_2F_1(b - 1, 1/2 + b; 2b; z) &= \frac{2b - 1 + \sqrt{1 - z}}{2b} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - z}}{2} \right)^{1-2b}, \quad b = 1/2 + i\theta, \\ {}_2F_1(b, 1/2 + b; 1 + 2b; z) &= \left(\frac{1 + \sqrt{1 - z}}{2} \right)^{-2b}, \quad b = -i\theta, \quad z = e^{t_0},\end{aligned}\quad (25)$$

а також рівняння (14) для будь-яких $Q/P \geq 0$ відповідно отримуємо

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=0, r=0} &= \sqrt{P^2 + Q^2} \frac{2\theta \operatorname{ch} \pi\theta}{\pi \sqrt{ar_0}}, \\ K_{II} &= \sqrt{\frac{2}{\pi} (P^2 + Q^2)} \operatorname{ch} \pi\theta, \quad \mu_0 = 0.\end{aligned}\quad (26)$$

Перша із формул (25) впливає з одного з квадратичних перетворень для гіпергеометричної функції [2, 13]:

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a_1, a_2; a_3; z) &= \left(\frac{1 + \sqrt{1 - z}}{2} \right)^{-2a_1} {}_2F_1(2a_1, a_1 - a_2 + 1/2; a_3; z_1), \\ a_3 &= a_1 + a_2 + 1/2, \quad z_1 = \frac{\sqrt{1 - z} - 1}{\sqrt{1 - z} + 1}.\end{aligned}\quad (27)$$

Якщо в (27) відповідно до параметрів першої із гіпергеометричних функцій із (25) взяти $a_1 = b - 1$, $a_2 = 1/2 + b$, $a_3 = 2b$, то матимемо $a_1 - a_2 + 1/2 = -1$, і у гіпергеометричному ряді з правої частини рівності (27) залишаться ненульовими тільки два перші доданки. Таким чином, із (27) отримаємо першу із тотожностей (25). Друга тотожність (25) наведена в [13].

Як впливає із другої формули (26), за відсутності тертя коефіцієнт інтенсивності напружень, віднесений до величини результуючої сили $\sqrt{P^2 + Q^2}$, не залежить від напрямку дії цієї сили, тобто від відношення Q/P , а значить, і від розміру області контакту. Такий самий висновок впливає із формули (23) при врахуванні тертя, якщо розмір області контакту $r_0 \ll a$.

4. Випадок двох областей контакту ($0 < r \leq r_0$, $r_1 \leq r < \infty$, $Q < 0$). У цьому випадку, коли напрямок дотичних сил є протилежним до наведеного на рис. 1, розмір r_0 області контакту біля вершини тріщини є надто малим (ще меншим, ніж при $Q = 0$), а відстань r_1 від вершини тріщини до напівнескінченної області контакту стає співмірною з відстанню a до точок прикладання сил. Спочатку знайдемо розв'язок задачі поза малим околom вершини тріщини, нехтуючи мікросоною контакту, а потім з урахуванням визначених напружень у напівнескінченній області контакту отримаємо розв'язок в околi вершини тріщини, розглядаючи контакт берегів тріщини біля її вершини.

Знехтувавши мікросоною контакту ($r_0 \ll a$), інтегральне рівняння (9) асимптотично спрощуємо:

$$\int_{-\infty}^{t_1} k(\eta - \xi)\varphi(\eta)d\eta = f(\xi), \quad -\infty < \xi < t_1, \quad (28)$$

і замінами

$$\xi = t_1 - \xi_1, \quad \eta = t_1 - \eta_1, \quad \varphi(t_1 - \eta_1) = \frac{r_1}{r_0} \varphi_1(\eta_1), \quad t'_0 = t_1 - t_0 \quad (29)$$

зводимо до вигляду

$$\int_0^{\infty} k(\xi_1 - \eta_1)\varphi_1(\eta_1)d\eta_1 = f_1(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < \infty, \quad (30)$$

де

$$f_1(\xi_1) = -\frac{\cos \pi\gamma}{\pi r_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[P \operatorname{ch} \pi\tau + iQ \operatorname{th} \pi\theta \operatorname{sh} \pi\tau] \operatorname{sh} \pi\tau}{\tau (\operatorname{ch} 2\pi\tau + \operatorname{ch} 2\pi\theta)} e^{-i\tau(\xi_1 - t'_0)} d\tau.$$

Ядра рівнянь (30) і (10) однакові, а праві частини переходять одна в одну заміною r_1 , Q , t'_0 на r_0 , $-Q$, t_0 відповідно. Тому з огляду на (11) отримуємо такий розв'язок рівняння (30):

$$\varphi_1(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1^+(\tau)}{K^+(\tau)} e^{-i\tau\xi_1} d\tau, \quad (31)$$

де

$$f_1^+(\tau) = -\frac{2 \cos \pi\gamma}{r_1 \sqrt{(2\pi)^3}} \operatorname{Re} \left((P + iQ) e^{(1/2+i\theta)t'_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(t'_0)}{k + 1/2 + i(\theta + \tau)} \right).$$

Із умови обмеженості напружень у точках $r = r_1$, $\vartheta = \pm\pi$ аналогічно до (12) виводимо рівняння

$$\operatorname{Re} \left[A' e^{-i\theta(t'_0 - 2 \ln 2)} {}_2F_1(1/2 - i\theta, 1 - \gamma - i\theta; 1 - 2i\theta; e^{t'_0}) \right] = 0,$$

$$A' = (P - iQ) \frac{\Gamma(1 - \gamma - i\theta)}{\Gamma(1 - i\theta)}, \quad (32)$$

для визначення координати $r_1 = a e^{-t'_0}$ краю напівнескінченної області контакту.

Контактні напруження з урахуванням першої з формул (18) знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= -\frac{r_1 \operatorname{ch}^2 \pi\theta}{\pi^2 r^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \operatorname{Re} \left(P_1(t'_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t'_0)}{n - k - 1/2 + i\theta} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^k + \\ &+ \frac{1 + \mu_0^2}{\pi^2 r^2} r_1 \operatorname{sh}^2 \pi\theta \cos^2 \pi\gamma \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} \operatorname{Re} \left(P_1(t'_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t'_0)}{n - k - \gamma + i\theta} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^{k-1/2+\gamma}, \end{aligned}$$

$$P_1(t'_0) = (P + iQ) e^{(1/2+i\theta)t'_0}, \quad r_1 < r < \infty. \quad (33)$$

Співвідношення (32), (33) порівняно з відповідними рівностями із (12), (18) показують, що при зміні напрямків дотичних сил Q на протилежні координати меж напівнескінченної і скінченної областей контакту зв'язані рівністю $r_0 r_1 = a^2$, тобто переходять одна в одну перетворенням інверсії відносно точки $r = a$. Таким самим перетворенням при цьому зв'язані помножені на r нормальні напруження в області контакту. Зокрема, у випадку дії тільки нормальних сил P ($Q = 0$) як самі області контакту, так і розподіли величин $r \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi}$ у них є симетричними при перетворенні інверсії. Це узгоджується з відповідними результатами роботи [9], узагальнюючи їх на випадок змішаної задачі для кусково-однорідної площини з напівнескінченим розрізом.

Водночас, у розглядуваній задачі за дії тільки нормальних сил P симетрія інверсії більш повна, ніж для пружного клина [9], і спостерігається для всіх компонент напружено-деформованого стану на межі півплощин:

$$\begin{aligned} r \sigma_{\vartheta}^{(1)}(r, \vartheta) &= \frac{a^2}{r} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \left(\frac{a^2}{r}, \vartheta \right), \quad r \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r, \vartheta) = -\frac{a^2}{r} \tau_{r\vartheta}^{(1)} \left(\frac{a^2}{r}, \vartheta \right), \quad \vartheta = 0, \pi, \\ u_r^{(j)}(r, (-1)^{j-1} \pi) &= -u_r^{(j)} \left(\frac{a^2}{r}, (-1)^{j-1} \pi \right), \\ u_{\vartheta}^{(j)}(r, (-1)^{j-1} \pi) &= u_{\vartheta}^{(j)} \left(\frac{a^2}{r}, (-1)^{j-1} \pi \right), \quad j = 1, 2, \quad Q = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

оскільки у поданні (4) множники при густинах $\bar{\sigma}(s)$, $\bar{\tau}(s)$ є парними або непарними функціями від змінної s .

У випадку дії нормальних і дотичних сил при зміні їхнього напрямку розв'язок задачі на межі півплощин перетворюється за інверсією таким чином:

$$\begin{aligned} r \sigma_{\vartheta}^{(1),Q}(r, \vartheta) &= \frac{a^2}{r} \sigma_{\vartheta}^{(1),-Q} \left(\frac{a^2}{r}, \vartheta \right), \\ r \tau_{r\vartheta}^{(1),Q}(r, \vartheta) &= -\frac{a^2}{r} \tau_{r\vartheta}^{(1),-Q} \left(\frac{a^2}{r}, \vartheta \right), \quad \vartheta = 0, \pi, \end{aligned}$$

$$u_r^{(j),Q}(r, (-1)^{j-1}\pi) = -u_r^{(j),-Q}\left(\frac{a^2}{r}, (-1)^{j-1}\pi\right),$$

$$u_\vartheta^{(j),Q}(r, (-1)^{j-1}\pi) = u_\vartheta^{(j),-Q}\left(\frac{a^2}{r}, (-1)^{j-1}\pi\right), \quad j = 1, 2. \quad (35)$$

Із третьої тотожності (35) випливає, що, якщо перше припущення (2) про напрямок взаємного проковзування берегів тріщини виконується для випадку однієї області контакту, то буде виконуватись і друга з умов (2) у напівнескінченній області контакту для випадку двох областей контакту.

Розв'язок (31) інтегрального рівняння (30) правильно визначає напружено-деформований стан кусково-однорідної площини тільки поза малим околom точки $r = 0$. В околі цієї точки напруження і переміщення згідно з поданням (4) мають осциляційну поведінку.

Тепер знайдемо розв'язок задачі в околі вершини тріщини. Інтегральне рівняння (9) з урахуванням розв'язку (31) набуває вигляду

$$\int_0^\infty k(\xi - \eta)\varphi(\eta) d\eta = f(\xi) - \frac{r_1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty K(\tau) \frac{f_1^+(\tau)}{K^+(\tau)} e^{i\tau(\xi-t_1)} d\tau, \quad (36)$$

де $0 < \xi < \infty$. Розв'язок рівняння (36), отриманий аналогічно до розв'язку (11), після асимптотичного спрощення ($e^{t_0} \ll 1$) має вигляд першого зі співвідношень (11), у якому

$$f^+(\tau) = -\frac{2 \cos \pi\gamma}{r_0 \sqrt{(2\pi)^3}} \operatorname{Re} \left((P - iQ + L) \frac{b_0(t_0) e^{(1/2+i\theta)t_0}}{1/2 + i(\theta + \tau)} \right),$$

$$L = \frac{\sqrt{\pi}(\theta - i/2) e^{t_0' - 2i\theta \ln 2}}{2\Gamma(1+i\theta)\Gamma(-\gamma - i\theta) \operatorname{sh} \pi\theta} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{(P + iQ)b_k(t_0')}{k + 1 + 2i\theta} e^{2i\theta t_0'} + \frac{(P - iQ)\bar{b}_k(t_0')}{k + 1} \right). \quad (37)$$

Із умови обмеженості напружень у точках $r = r_0$, $\vartheta = \pm\pi$ аналогічно до (17) визначаємо розмір мікрозони контакту:

$$r_0 = a e^{t_0}, \quad t_0 = 2 \ln 2 - \frac{1}{\theta} \left(\frac{\pi}{2} + \arg \frac{(P - iQ + L)\Gamma(1 - \gamma + i\theta)}{\Gamma(1 + i\theta)} \right). \quad (38)$$

Аналогічно до (23) знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень:

$$K_{II} = \left| \frac{P - iQ + L}{\Gamma(1 + i\theta)\Gamma(1 - \gamma + i\theta)} \right| \frac{\sqrt{2} \pi\theta \operatorname{cth} \pi\theta}{\Gamma(1/2 + \gamma) \cos \pi\gamma} \quad (39)$$

та отримуємо стрибок радіальних переміщень на тріщині в мікрзоні контакту

$$\Delta u_r = -\frac{A_0 \theta \sqrt{r_0} |(P - iQ + L)\Gamma(\gamma + i\theta)|}{\sqrt{\pi a} |(1 + i\mu_0)\Gamma(1 + i\theta)| \Gamma(3/2 + \gamma) \operatorname{sh} \pi\theta} \times$$

$$\times {}_2F_1(\gamma + i\theta, \gamma - i\theta; 3/2 + \gamma; r/r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1/2+\gamma}, \quad 0 < r \leq r_0. \quad (40)$$

Оскільки гіпергеометрична функція із (40) при заданих значеннях своїх параметрів і аргументу набуває тільки дійсних додатних значень, у всіх точках мікрозони контакту різниця радіальних переміщень із (40) є від'ємною, що підтверджує припущення (2) про напрямок відносного проковзування берегів тріщини у мікрзоні контакту та вибір знаку при μ_0 у восьмій крайовій умові з (1).

За відсутності тертя на підставі тотожності (13) і другої із тотожностей (25) вираз для L із (37) з урахуванням рівняння (14) (із заміною Q , t_0 на $-Q$, t'_0 відповідно) перетворюємо до вигляду

$$L = -P + iQ + i\sqrt{P^2 + Q^2}e^{i\theta(t'_0 - 2\ln 2)}, \quad \mu_0 = 0. \quad (41)$$

Замінивши у рівнянні (12) $P + iQ$ на $P - iQ + L$ на підставі розв'язків (11), (37), з огляду на (15) отримуємо

$$r_0 = ae^{t_0} = a \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\pi}{2\theta} - \ln 2 + \frac{t'_0}{2} \right),$$

звідки з точністю до малої величини порядку $e^{-\pi/\theta}$ знаходимо

$$r_0 = 16e^{-\pi/\theta} r_1, \quad \mu_0 = 0. \quad (42)$$

Оскільки, згідно з (41), $|P - iQ| = |P - iQ + L|$ для $\mu_0 = 0$, то другий вираз із (26) для коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II} , встановлений для безфрикційного контакту у випадку $Q > 0$, залишається таким самим і у розглядуваному випадку $Q < 0$, що також впливає із формул (39) при $\gamma = 0$ і з (41).

Щоб зв'язати коефіцієнт інтенсивності напружень з його значенням при $Q > 0$ у випадку фрикційного контакту, перетворимо вираз для K_{II} із (39) до вигляду, аналогічному до (22). Ряд із (37) для L виразимо через два гіпергеометричні ряди і перетворимо останні з використанням співвідношень Гауса для суміжних гіпергеометричних функцій до ряду із (32) і внутрішнього із останнього подвійного ряду з (33). У результаті з урахуванням рівняння (32) отримуємо

$$L = \frac{(\theta + i\gamma)\Gamma(1 - i\theta)}{\sqrt{\pi\theta}\Gamma(-\gamma - i\theta)} e^{i\theta(t'_0 - 2\ln 2)} \operatorname{Re} \left(P_1(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t'_0)}{n - \gamma + i\theta} \right). \quad (43)$$

Підставивши L із (43) у (39), знаходимо для K_{II} такий самий вираз, як і (22) із замінами Q , t_0 на $-Q$, t'_0 відповідно. Отже, при зміні напрямку дотичної сили Q на протилежний коефіцієнт K_{II} лишається незмінним.

Оскільки граничне значення нормальних напружень зв'язане з коефіцієнтом K_{II} із (39) співвідношенням (24), то це співвідношення залишається правильним і для випадку $Q < 0$. Але тепер, зважаючи на мікrorозмір r_0 області контакту, значення $\sigma_{\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=0, r=r_0}$, згідно з (24), стає на декілька порядків більшим, ніж у випадку $Q > 0$. Тому поведінку напружень на лінії з'єднання півплощин поблизу вершини тріщини краще характеризує їх асимптотична оцінка, яка відповідає розв'язку інтегрального рівняння (28) і справджується поза мікroоколом точки $r = 0$. Ця оцінка, знайдена із залученням перших двох тотожностей із (35) при $\vartheta = 0$ із поведінки на нескінченності напружень $(\sigma_{\vartheta}^{(1)} + i\tau_{r\vartheta}^{(1)})|_{\vartheta=0}$ із (18) і перетворена аналогічно до перетворення виразу для L із (37) в (43), з урахуванням виразу для K_{II} із (22) має вигляд

$$\begin{aligned} (\sigma_{\vartheta}^{(1)} - i\tau_{r\vartheta}^{(1)})|_{\vartheta=0} &\sim \frac{K_{II} \operatorname{sh} \pi\theta \cos \pi\gamma}{\pi^2 i\theta \sqrt{2ar}} \Gamma(1 + i\theta) \Gamma(1/2 + \gamma) \times \\ &\times \Gamma(1 - \gamma - i\theta) e^{i\theta \ln(4r_1/r)}, \quad r \rightarrow r_0 + 0. \end{aligned} \quad (44)$$

При цьому осциляції, викликані останнім співмножником у формулі (44), поза r_0 -околом точки $r = 0$ не проявляються, а напруження при наближенні до вершини тріщини зростають майже пропорційно до величини $r^{-1/2}$.

5. Результати обчислень. Розрахунки проведено для значення $\text{th } \pi\theta = 0.25$ (якщо, наприклад, $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 = 0.3$, то $G_2/G_1 = 6$). У табл. 1 і табл. 2 для випадку однієї області контакту берегів тріщини біля її вершини (див. п. 3, рис. 2) при різних значеннях коефіцієнта тертя μ_0 і відношення сил Q/P наведено відносний розмір r_0/a області контакту і відносний коефіцієнт інтенсивності напружень $\bar{K}_{II} = K_{II}/\sqrt{P^2 + Q^2}$ відповідно. При відсутності тертя ($\mu_0 = 0$) значення $\bar{K}_{II} = 0.8241$ не залежить від Q/P . За наявності тертя ($\mu_0 > 0$) коефіцієнт \bar{K}_{II} є найбільшим при дії тільки нормальних сил P , а зі збільшенням дотичних сил Q він монотонно зменшується і при $Q/P \rightarrow \infty$, коли край області контакту наближається до точок прикладання сил ($r_0/a \rightarrow 1$), переходить у значення, яке спостерігаємо при гладкому контакті.

Таблиця 1. Відносний розмір r_0/a області контакту.

$\mu_0 \backslash Q/P$	0	1	2	5	10	20	50	100
0	$1.63 \cdot 10^{-8}$	$2.55 \cdot 10^{-4}$	0.0133	0.298	0.702	0.911	0.985	0.996
0.25	$1.68 \cdot 10^{-8}$	$2.64 \cdot 10^{-4}$	0.0137	0.306	0.714	0.918	0.987	0.997
0.5	$1.74 \cdot 10^{-8}$	$2.73 \cdot 10^{-4}$	0.0142	0.315	0.726	0.925	0.989	0.998

Таблиця 2. Відносний коефіцієнт інтенсивності напружень \bar{K}_{II} .

$\mu_0 \backslash Q/P$	0	1	2	5	10	20	50	100
0.25	0.8478	0.8478	0.8476	0.8448	0.8389	0.8329	0.8279	0.8261
0.5	0.8732	0.8732	0.8730	0.8670	0.8545	0.8420	0.8319	0.8281

На рис. 3 показано розподіли відносних напружень

$$\bar{\sigma} = (P^2 + Q^2)^{-1/2} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi,0},$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{5} (P^2 + Q^2)^{-1/2} \tau_{r\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=0}$$

на межі поділу півплощин у випадку однієї області контакту. При цьому декартова координата x межі відліковується від вершини тріщини ($x = 0$)

і зв'язана з полярними координатами так, що $x = \begin{cases} r, & x > 0, \vartheta = 0, \\ -r, & x < 0, \vartheta = \pi, \end{cases}$ а точка

ка прикладання сил на кожному березі тріщини має координату $x = -a$. Суцільні лінії відповідають фрикційній моделі контакту з коефіцієнтом тертя $\mu_0 = 0.5$, а штрихові лінії – моделі гладкого контакту ($\mu_0 = 0$). Криві 1–3 відповідають нормальним напруженням $\bar{\sigma}$, обчисленим для значень відношення сил $Q/P = 5, 10, 20$. Криві 4 відповідають дотичним напруженням $\bar{\tau}$. Штрихова крива 4 одна і та ж сама для вказаних значень Q/P , суцільна крива 4 побудована для $Q/P = 20$. Суцільні криві для $\bar{\tau}$ при $Q/P = 5, 10$ не показано, вони займають проміжне положення між штриховою і суцільною кривими 4.

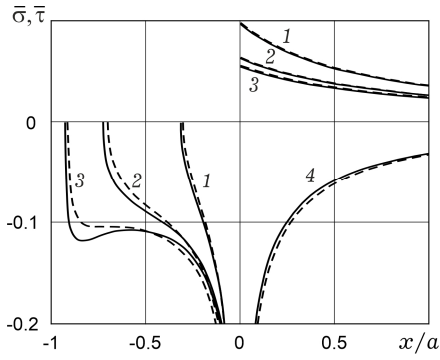


Рис. 3

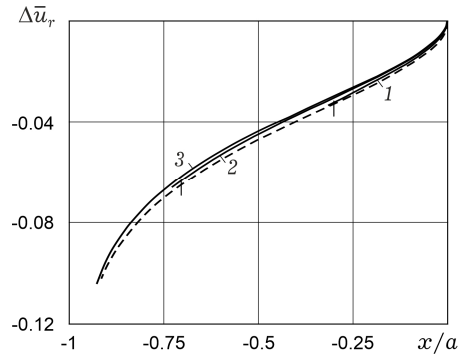


Рис. 4

На рис. 4 зображено відносний стрибок $\Delta \bar{u}_r = (P^2 + Q^2)^{-1/2} G_1 \Delta u_r$ радіальних переміщень на тріщині в області контакту її берегів. Суцільні криві 1–3 відповідають фрикційному контакту ($\mu_0 = 0.5$) і відношенню сил $Q/P = 5, 10, 20$, штрихова крива – гладкому контакту ($\mu_0 = 0$) і відношенню $Q/P = 20$. Для значень $Q/P = 5, 10$ при $\mu_0 = 0$ графіки величини $\Delta \bar{u}_r$ накладаються на штрихову лінію у межах області контакту (ліва межа відмічена вертикальною рисою). Те, що для фрикційного контакту величина $\Delta \bar{u}_r$ виявляється від’ємною, є перевіркою першого із припущень (2) щодо напрямку взаємного проковзування берегів тріщини в області контакту.

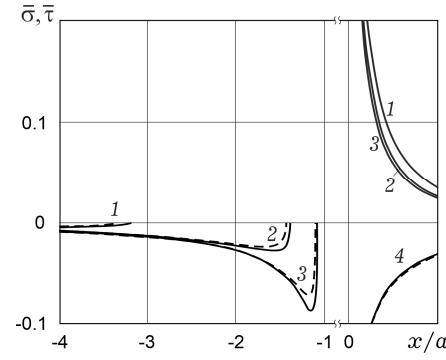


Рис. 5

У випадку двох областей контакту розподіли відносних напружень $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ подано на рис. 5. Нумерація кривих така, як і на рис. 3, із заміною значень $Q/P = 5, 10, 20$ на $Q/P = -5, -10, -20$ відповідно. Відносна координата краю напівнескінченної області контакту згідно з даними табл. 1 становить $x/a = -r_1/a = -a/r_0 = -3.18, -1.38, -1.08$ для $\mu_0 = 0.5$ і $x/a = -r_1/a = -a/r_0 = -3.36, -1.43, -1.10$ для $\mu_0 = 0$. Хоча нормальні напруження на лінії з’єднання півплощин приймають скінченні значення, їхні величини є надзвичайно великими (значення $\bar{\sigma}$ при $x/a = +0$ згідно з формулами (24), (42) має порядок величини $e^{\pi/(2\theta)} = 2.5 \cdot 10^8$). Напруження в мікрзоні контакту на рисунку не показані, оскільки її відносний розмір r_0/a за формулою (42) у $e^{\pi/\theta}/16 = 0.39 \cdot 10^{16}$ разів менший від відносного розміру r_1/a . Незважаючи на такий нереально малий розмір r_0 , введення мікрзони контакту є необхідним для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень, відносні значення \bar{K}_{II} якого такі ж самі, як і у випадку одної області контакту (для протилежних значень Q), і містяться у табл. 2.

1. Антипов Ю. А. Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, № 2. – С. 290–306.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
То же: *Bateman H. Higher transcendental functions.* – Vol. 1. – New York etc.: McGraw-Hill, 1953. – xxvi+302 p.
3. Говоруха В. Б., Лобода В. В. Моделі та методи механіки руйнування п'єзокерамічних тіл з міжфазними тріщинами. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2013. – 252 с.
4. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композит. материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
5. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
Te same: *Noble B. Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations.* – New York: Chelsea, 1988. – 246 p.
6. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
7. Острик В. И. Асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі краю області контакту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 4. – С. 58–71.
Te same: *Ostryk V. I. Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone* // *J. Math. Sci.* – 2019. – **238**, No. 1. – P. 63–82. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04218-9>.
8. Острик В. И. Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 2. – С. 58–65.
Te same: *Ostryk V. I. Friction contact of the edges of an interface crack under the conditions of tension and shear* // *Mater. Sci.* – 2003. – **39**, No. 2. – P. 214–224. – <https://doi.org/10.1023/B:MASC.0000010271.69655.67>.
9. Острик В. И. Симетрія інверсії розв'язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клина // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 4. – С. 90–110.
Te same: *Ostryk V. I. Inversion symmetry of the solutions of basic boundary-value problems of two-dimensional elasticity theory for a wedge* // *J. Math. Sci.* – 2020. – **247**, No. 1. – P. 108–138. – <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04792-3>.
10. Острик В. И., Улитко А. Ф. Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 3. – С. 88–95.
11. Острик В. И., Улитко А. Ф. Осесиметрична контактна задача для міжфазної тріщини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 1. – С. 21–26.
Te same: *Ostryk V. I., Ulitko A. F. Axisymmetric contact problem for an interface crack* // *Mater. Sci.* – 2004. – **40**, No. 1. – P. 20–28. – <https://doi.org/10.1023/B:MASC.0000042781.87522.78>.
12. Симонов И. В. Межфазная трещина в однородном поле напряжений // Механика композит. материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
Te same: *Simonov I. V. Crack at an interface in a uniform stress field* // *Mekh. Compos. Mater.* – 1986. – **21**, No. 6. – P. 650–657. – <https://doi.org/10.1007/BF00605924>.
13. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
Te same: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables* / Eds M. Abramowitz, I. A. Stegun. – New York: Dover Publ., 1972. – 1046 p.
14. Улитко А. Ф. Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // Современ. проблемы механики сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Книга, 1995. – С. 185–193.
15. *Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone* // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1977. – **44**, No. 4. – P. 780–781. – <https://doi.org/10.1115/1.3424179>.

КОНТАКТ БЕРЕГОВ МЕЖФАЗНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ

Рассмотрено равновесие двух жестко соединенных упругих полуплоскостей из разных материалов, на границе раздела которых находится полубесконечная трещина с приложенными к ее берегам нормальными и касательными сосредоточенными силами. Учен фрикционный контакт берегов трещины вблизи ее вершины и на некотором расстоянии от вершины. С применением метода Винера – Хопфа решение интегрального уравнения задачи получено в замкнутой форме. Найдены границы областей контакта берегов трещины, распределения напряжений в областях контакта и на границе раздела полуплоскостей вне трещины.

Ключевые слова: межфазная трещина, модель Комниноу, интеграл Меллина, метод Винера – Хопфа, гипергеометрическая функция.

CONTACT OF FACES OF INTERPHASE SEMI-INFINITE CRACK

The equilibrium of two rigidly fixed elastic half-planes of different materials containing semi-infinite crack on interface is considered. Both normal and tangential concentrated forces are applied to crack faces. The frictional contact of crack faces is taken into account near the crack tip and on some distance from it. The solution of integral equation is obtained in closed form with the help of Winner – Hopf method. Boundaries of contact domains of crack faces, stress distributions in contact domains and on the interface of half-planes outside the crack are found.

Key words: interface crack, Comninou's model, Mellin integral, Winner – Hopf method, hypergeometric function.

Ин-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано
15.01.20