

УДК 519.6: 539.3

Г. А. Квасниця<sup>1✉</sup>, Г. А. Шинкаренко<sup>1,2</sup>

## АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ПРО ГАРМОНІЧНІ ХВИЛІ В ПРУЖНИХ ТІЛАХ І ЇЇ $h$ -АДАПТИВНА СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНА АПРОКСИМАЦІЯ

Сформульовано варіаційну задачу про гармонічну хвилю у в'язкопружному тілі з короткочасною пам'яттю, породжену розподіленими навантаженнями заданої частоти. Встановлено умови її коректності та еквівалентності задачі про сідлову точку відповідного лагранжіана. Побудовано  $h$ -адаптивну схему методу скінченних елементів розв'язання сформульованої задачі з поелементно визначеним апостеріорним оцінювачем похибки і критерієм локального покращення триангуляцій Делоне для обчислення апроксимацій з наперед гарантованою точністю. Ефективність запропонованої методики проілюстровано на прикладі чисельного дослідження резонансних частот квадратної пластини з квадратним отвором.

**Ключові слова:** в'язкопружне тіло, гармонічна хвиля, варіаційна задача, сідлова точка,  $h$ -адаптивна схема методу скінченних елементів.

## АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В УПРУГИХ ТЕЛАХ И ЕЕ $h$ -АДАПТИВНАЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Сформулирована вариационная задача о гармонической волне эластодинамики вязкоупругого тела с кратковременной памятью, порожденной распределенной нагрузкой заданной частоты. Установлены условия ее корректности и эквивалентность задаче о седловой точке соответствующего лагранжиана. Построена  $h$ -адаптивная схема метода конечных элементов решения этой задачи с поэлементно определенным апостериорным оценителем погрешности и критерием локального улучшения триангуляций Делоне для вычисления аппроксимаций с заранее гарантированной точностью. Эффективность предложенной методики проиллюстрирована на примере численного исследования резонансных частот квадратной пластинки с квадратным отверстием.

**Ключевые слова:** вязкоупругое тело, гармоническая волна, вариационная задача, седловая точка,  $h$ -адаптивная схема метода конечных элементов.

## ANALYSIS OF THE PROBLEM ON HARMONIC WAVES IN ELASTIC BODY AND ITS $h$ -ADAPTIVE FINITE ELEMENT APPROXIMATION

A variational problem on the harmonic wave of elastodynamics of a viscoelastic body with short-term memory generated by a distributed load of a given circular frequency is formulated. The conditions for its correctness and equivalence to the saddle point problem of the corresponding Lagrangian are established. The  $h$ -adaptive scheme of the finite element method for solving this problem with an element-by-element a posteriori error estimator and a criterion for the local improvement of Delaunay triangulations to construct approximations with pre-guaranteed accuracy is constructed. The effectiveness of the proposed technique is illustrated by the example of a numerical study of the resonance frequencies of a square plate with a square hole.

**Keywords:** viscoelastic body, harmonic wave, variational problem, saddle point,  $h$ -adaptive scheme of finite element method.

<sup>1</sup> Львів. нац ун-т ім. І. Франка, Львів,

<sup>2</sup> Політехніка Опольська, Ополе, Польща

Одержано

31.10.19

✉ halyna.kvasnytsya@lnu.edu.ua