

УДК 536.21

А. П. Янковский✉

КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСА КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. II. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Получены аналитические решения модельной задачи стационарной теплопроводности для композитной пластины. Эти решения построены с использованием двух методов понижения размерности: метода взвешенных невязок (обобщенного метода Галеркина) и на основе вариационного метода. Рассматривается однородная прямоугольная удлиненная пластина с анизотропией материала общего вида. Лицевые поверхности конструкции теплоизолированы, на одной продольной торцевой поверхности задана температура, а на другой – задан тепловой поток. Предполагается, что входные данные задачи и ее решение не зависят от продольной координаты. Температура аппроксимируется полиномом второго порядка по поперечной координате. Граничные условия на лицевых поверхностях учитываются. Показано, что в случае использования метода взвешенных невязок разрешающее дифференциальное уравнение задачи имеет второй порядок, а при использовании вариационного метода – четвертый порядок. В рамках решения, полученного с использованием метода взвешенных невязок, интегральный тепловой поток в тангенциальном направлении получается постоянным и равным истинному значению этой величины. В рамках решения, полученного с использованием вариационного метода, этот интегральный тепловой поток осциллирует в тангенциальном направлении, ортогональном продольному направлению пластины. Частота и амплитуда этих осцилляций зависят от относительной толщины конструкции, причем амплитуда осцилляций может на несколько порядков превышать истинное значение интегрального теплового потока. Аналогичный осциллирующий характер имеет и температурное поле в пластине, рассчитанное с использованием этого метода понижения размерности задачи теплопроводности.

Ключевые слова: композитные пластины, теория теплопроводности, уравнение теплового баланса, методы понижения размерности, вариационные принципы, метод взвешенных невязок.

КРИТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДВОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСУ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН, ОТРИМАНИХ НА ОСНОВІ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ. II. МОДЕЛЬНА ЗАДАЧА

Отримано аналітичні розв'язки модельної задачі стаціонарної теплопровідності для композитної пластини. Розв'язки побудовано з використанням двох методів зниження розмірності: методу зважених невязок (узагальненого методу Гальоркіна) і на основі варіаційного методу. Розглядається однорідна прямокутна видовжена пластина з анізотропією матеріалу загального вигляду. Лицьові поверхні конструкції теплоізолювані, на одній поздовжній торцевій поверхні задано температуру, а на іншій – задано тепловий потік. Передбачається, що вхідні дані задачі і її розв'язок не залежать від поздовжньої координати. Температура апроксимується поліномом другого порядку за поперечною координатою. Граничні умови на лицьових поверхнях враховуються. Показано, що розв'язувальне диференціальне рівняння задачі у випадку використання методу зважених невязок є другого порядку, а при використанні варіаційного методу – четвертого. У рамках розв'язку, отриманого з використанням методу зважених невязок, інтегральний тепловий потік у тангенціальному напрямку є постійним і рівним істинному його значенню. У рамках розв'язку, отриманого з використанням варіаційного методу, цей інтегральний тепловий потік осцилює в тангенціальному напрямку, ор-

✉ yankovsky_ap@rambler.ru

тогональному до поздовжнього напрямку пластини. Частота і амплітуда осциляцій залежать від відносної товщини конструкції, причому амплітуда осциляцій може на декілька порядків перевищувати реальне значення інтегрального теплового потоку. Аналогічний осцилюючий характер має і температурне поле в пластині, обчислене з використанням цього методу зниження розмірності задачі теплопровідності.

Ключові слова: композитні пластини, теорія теплопровідності, рівняння теплового балансу, методи зниження розмірності, варіаційні принципи, метод зважених нев'язок.

CRITICAL ANALYSIS OF THE TWO-DIMENSIONAL HEAT BALANCE EQUATIONS OF COMPOSITE PLATES, OBTAINED ON THE BASIS OF THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE THEORY OF THERMAL CONDUCTIVITY. II. MODEL PROBLEM

Analytical solutions of the model problem of stationary thermal conductivity for a composite plate are obtained. These solutions are constructed using two methods of reducing the dimension: the generalized Galerkin method and the variational method. A uniform rectangular elongated plate with anisotropy of a general form material is considered. The front surfaces of the structure are thermally insulated; temperature is set on one longitudinal end surface; on the other longitudinal end surface the heat flux is set. It is assumed that the input data of the problem and its solution are independent of the longitudinal coordinate. The temperature is approximated by a second-order polynomial in the transverse coordinate. Boundary conditions on the front surfaces are taken into account. It is shown that in the case of using the generalized Galerkin method, the resolving differential equation of the problem is of the second order, and when using the variational method, it is of the fourth order. In the framework of the solution obtained using the generalized Galerkin method, the integral heat flux in the tangential direction is constant and equal to the true value of this quantity. In the framework of the solution obtained using the variational method, this integral heat flux oscillates in the tangential direction orthogonal to the longitudinal direction of the plate. The frequency and amplitude of these oscillations depend on the relative thickness of the structure, and the amplitude of the oscillations can be several orders of magnitude higher than the true value of the integral heat flux. The temperature field in the plate, calculated using this method of reducing the dimension of the heat conduction problem, has a similar oscillating character.

Keywords: composite plates, heat conduction theory, heat balance equation, dimensionality reduction techniques, variational principles, weighted residuals method.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
01.09.19