

УДК 536.21

А. П. Янковский✉

КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСА КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. I. ОБЩИЕ ДВУМЕРНЫЕ ТЕОРИИ

На основе использования вариационных принципов рассмотрены два подхода к получению двумерных уравнений теории стационарной теплопроводности композитных пластин. Температура пластин аппроксимируется полиномом по поперечной координате с неизвестными коэффициентами разложения. В рамках первого подхода тепловые граничные условия на лицевых поверхностях пластин не учитываются, но получающиеся двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках являются согласованными с теплофизической точки зрения, так как согласно этим уравнениям для любой подобласти пластины и всей конструкции в целом выполняется уравнение теплового баланса. В рамках второго подхода учитываются тепловые граничные условия на лицевых поверхностях. Последнее обстоятельство приводит к необходимости введения неопределенных множителей Лагранжа, т. е. к решению вариационной задачи на условный экстремум. Показано, что получающиеся при этом двумерные уравнения Эйлера и соответствующие им граничные условия на кромках являются несогласованными (противоречивыми) с теплофизической точки зрения, так как для произвольной подобласти пластины и всей конструкции в целом не выполняется уравнение теплового баланса.

Ключевые слова: композитные пластины, теория теплопроводности, уравнение теплового баланса, методы понижения размерности, вариационные принципы, метод взвешенных невязок.

КРИТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДВОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСУ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН, ОТРИМАНИХ НА ОСНОВІ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ. I. ЗАГАЛЬНІ ДВОВИМІРНІ ТЕОРІЇ

На основі використання варіаційних принципів розглянуто два підходи до отримання двовимірних рівнянь теорії стаціонарної теплопровідності композитних пластин. Температура пластин апроксимується поліномом від поперечної координати з невідомими коефіцієнтами розкладу. В рамках першого підходу теплові граничні умови на лицевих поверхнях пластин не враховуються, але отримані двовимірні рівняння Ейлера і відповідні їм граничні умови на кромках є узгодженими з теплофізичної точки зору, оскільки згідно з цим рівнянням для довільної підобласті пластины і всієї конструкції в цілому виконується рівняння теплового балансу. В рамках другого підходу враховуються теплові граничні умови на лицевих поверхнях, що приводить до необхідності введення неозначених множників Лагранжа, тобто до розв'язання варіаційної задачі на умовний екстремум. Показано, що отримані при цьому двовимірні рівняння Ейлера і відповідні їм граничні умови на кромках є неузгодженими (суперечливими) з теплофізичної точки зору, оскільки для довільної підобласті пластины і всієї конструкції в цілому не виконується рівняння теплового балансу.

Ключові слова: композитні пластины, теорія теплопровідності, рівняння теплового балансу, методи зниження розмірності, варіаційні принципи, метод зв'язаних невязок.

✉ yankovsky_ap@rambler.ru

CRITICAL ANALYSIS OF THE TWO-DIMENSIONAL HEAT BALANCE EQUATIONS OF COMPOSITE PLATES, OBTAINED ON THE BASIS OF THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE THEORY OF THERMAL CONDUCTIVITY. I. GENERAL TWO-DIMENSIONAL THEORIES

Based on the use of variational principles, two approaches to obtaining two-dimensional equations of the theory of stationary thermal conductivity of composite plates are considered. The temperature of the plates is approximated by a polynomial in the transverse coordinate with unknown decomposition coefficients. In the framework of the first approach, thermal boundary conditions on the facial surfaces of the plates are not taken into account. The resulting two-dimensional Euler equations and the corresponding boundary conditions at the edges are consistent from the thermophysical point of view. In this case, for an arbitrary subdomain of the plate and the entire structure as a whole, the heat balance equation is satisfied. In the framework of the second approach, thermal boundary conditions on the facial surfaces are taken into account. The latter circumstance leads to the necessity of introducing undetermined Lagrange multipliers and to solving a variational problem for a conditional extremum. It is shown that the resulting two-dimensional Euler equations and the corresponding boundary conditions at the edges are inconsistent (contradictory) from a thermophysical point of view. In this case, for an arbitrary subdomain of the plate and the entire structure as a whole, the heat balance equation is not satisfied.

Keywords: composite plates, heat conduction theory, heat balance equation, dimensionality reduction techniques, variational principles, weighted residuals method.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
01.06.19