

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПІВПРОСТОРУ ТА ШАРУ

З використанням числового обернення перетворення Лапласа, яке базується на модифікованій формулі Пруднікова, побудовано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для контактуючих термочутливих півпростору та шару за умов конвективного теплообміну з середовищем сталої температури. Досліджено термопружний стан такої термочутливої кусково-однорідної структури, коли на поверхні задано сталу температуру.

Ключові слова: термопружний стан, нелінійна задача теплопровідності, термочутливі півпростір та шар, метод лінеаризувальних параметрів, числове обернення перетворення Лапласа.

Вступ. Дослідження термопружного стану елементів конструкцій на основі моделей, що враховують термочутливість матеріалів, складний теплообмін, контактну взаємодію тощо, є актуальними в різних галузях промисловості. Визначення змінних у часі температури та напружень у термочутливих тілах вимагає розв'язання відповідних нелінійних задач, аналітичні розв'язки яких вдається отримати лише в окремих випадках. У зв'язку з цим у літературі для розв'язування такого класу задач здебільшого застосовують числові або аналітично-числові методи (див. короткий огляд в [7]). Приклади та практичне застосування деяких методів наведено в працях [4, 9, 12–15, 17]. У [7, 18] запропоновано та апробовано на задачах теплопровідності для термочутливих тіл простої геометричної форми аналітично-числову методику, що ґрунтується на застосуванні перетворення Кірхгофа та методу лінеаризувальних параметрів для лінеаризації вихідної задачі з подальшим використанням інтегральних перетворень, зокрема перетворення Лапласа за часовою змінною. Застосування цього перетворення може ускладнити знаходження оригіналу температури на основі визначених її трансформант. Тому розроблено низку наближених методів обернення інтегрального перетворення Лапласа, які базуються на: спеціальних квадратурних формулах, рядах Лагерра [10], згортках вихідного зображення зі зображенням допоміжного фінітного нескінченно диференційовного оригіналу [1] та інші. У працях [2, 3] для двох контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділенням на межі дотику та півпростору за конвективного теплообміну зі середовищем проілюстровано ефективність числового обернення перетворення Лапласа на основі формули Пруднікова [6, 11, 16]. У цій статті таким підходом розв'язано квазістатичну незв'язану задачу термопружності для ідеально контактуючих термочутливих півпростору та шару за умов конвективного теплообміну з середовищем. На основі отриманих розв'язків досліджено термопружний стан такої термочутливої кусково-однорідної структури, коли на її поверхні задано сталу температуру.

1. Формулювання задачі теплопровідності. Розглянемо задачу про визначення нестационарних температурних полів t_1 , t_2 ідеально контактуючих різномірних термочутливих шару $0 < z < z_0$ та півпростору $z < 0$ з однаковим початковим розподілом температури t_p , що перебувають в умовах конвективного теплообміну з середовищем сталої температури t_c . Ці поля визначимо з рівнянь теплопровідності

* dept19@iapmm.lviv.ua

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}\right) &= c_v^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial \tau}, & 0 < z < z_0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z}\right) &= c_v^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial \tau}, & z < 0,\end{aligned}\quad (1)$$

за початкових умов

$$t_j|_{\tau=0} = t_p, \quad (2)$$

крайових

$$\left(\lambda_t(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z} + \alpha(t_1 - t_c)\right)\Big|_{z=z_0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial z}\Big|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad t_2|_{z \rightarrow -\infty} = t_p \quad (4)$$

і контактних

$$t_1|_{z=0} = t_2|_{z=0}, \quad \left(\lambda_t^{(2)}(t_2)\frac{\partial t_2}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \left(\lambda_t^{(1)}(t_1)\frac{\partial t_1}{\partial z}\right)\Big|_{z=0}, \quad (5)$$

де α – коефіцієнт теплообміну через поверхню $z = z_0$; $\lambda_t^{(j)}(t_j)$, $c_v^{(j)}(t_j)$, $j = 1, 2$, – залежні від шуканих температур коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів шару і півпростору відповідно. Вважаємо ці матеріали такими, що їхні коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності залежать від температури, а їх відношення від температури залежить неістотно, тому приймаємо $\frac{\lambda_t^{(j)}(t_j)}{c_v^{(j)}(t_j)} = a_{j0} \approx \text{const}$.

2. Побудова розв'язку задачі теплопровідності (1)–(5). Виберемо за відлікову температуру деяке її значення t_0 , а за характерний розмір – одиницю виміру довжини z_0 – товщину шару. Подамо характеристики матеріалів півпростору та шару у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де величини з індексом «0» мають відповідні розмірності, а співмножники з індексом «*» описують залежність характеристики від безрозмірної температури. Запишемо задачу (1)–(5) у безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\lambda_t^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}}\right) &= c_v^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \text{Fo}}, & 0 < \bar{z} < 1, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\lambda_t^{(2)*}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}}\right) &= c_v^{(2)*}(T_2)K_a\frac{\partial T_2}{\partial \text{Fo}}, & \bar{z} < 0,\end{aligned}\quad (6)$$

$$T_j|_{\text{Fo}=0} = T_p, \quad (7)$$

$$\left(\lambda_t^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}(T_1 - T_c)\right)\Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}}\Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad T_2|_{z \rightarrow -\infty} = T_p, \quad (9)$$

$$T_1|_{\bar{z}=0} = T_2|_{\bar{z}=0}, \quad \left(K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}}\right)\Big|_{\bar{z}=0} = \left(\lambda_t^{(1)*}(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}}\right)\Big|_{\bar{z}=0}, \quad (10)$$

де $\bar{z} = \frac{z}{z_0}$, $T_j = \frac{t_j}{t_0}$, $T_p = \frac{t_p}{t_0}$, $\text{Fo} = \frac{a_0^{(1)}\tau}{z_0^2}$, $a_0^{(j)} = \frac{\lambda_{t_0}^{(j)}}{c_{v_0}^{(j)}}$, $K_a = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(2)}}$, $K_\lambda = \frac{\lambda_{t_0}^{(2)}}{\lambda_{t_0}^{(1)}}$, $\text{Bi} = \frac{\alpha z_0}{\lambda_{t_0}^{(1)}}$.

Застосуємо до задачі (6)–(10) інтегральне перетворення Кірхгофа

$$\theta_j = \int_{T_p}^{T_j} \lambda_t^{(j)*}(T) dT, \quad (11)$$

і запишемо її для змінних θ_j :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial \text{Fo}}, \quad \bar{z} > 0, \quad \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{z}^2} = K_a \frac{\partial \theta_2}{\partial \text{Fo}}, \quad \bar{z} < 0, \quad (12)$$

$$\theta_j \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}(T(\theta_1) - T_c) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta_2 \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad (15)$$

$$T_1(\theta_1) \Big|_{\bar{z}=0} = T_2(\theta_2) \Big|_{\bar{z}=0}, \quad K_\lambda \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0}. \quad (16)$$

Отже, задачу (6)–(10) за допомогою перетворення Кірхгофа (11) частково лінеаризовано. Однак залишилися нелінійності в умові (14) і в першій з умов (16), які усунемо із застосуванням методу лінеаризувальних параметрів [7, 18]. Згідно з цим методом побудуємо розв'язок задачі (12)–(16), у якій замість умови (14) використаємо лінійну умову

$$\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}^*(\theta_1 - \theta_c) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0,$$

а замість першої з умов (16) –

$$\theta_1 \Big|_{\bar{z}=0} = (1 + \alpha_2) \theta_2 \Big|_{\bar{z}=0}.$$

Тут $\text{Bi}^* = (1 + \alpha_1) \text{Bi}$, $\theta_c = T_c / (1 + \alpha_1)$, а α_1 , α_2 – невідомі лінеаризувальні параметри.

Для розв'язання такої лінійної задачі на змінні Кірхгофа скористаємось перетворенням Лапласа за часом Fo . У результаті отримаємо задачу на трансформанти змінних Кірхгофа:

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_1}{d\bar{z}^2} = s \tilde{\theta}_1, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad \frac{d^2 \tilde{\theta}_2}{d\bar{z}^2} = K_a s \tilde{\theta}_2, \quad \bar{z} < 0, \quad (17)$$

$$\left(\frac{d \tilde{\theta}_1}{d\bar{z}} + \text{Bi}^* \left(\tilde{\theta}_1 - \frac{\theta_c}{s} \right) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d \tilde{\theta}_2}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad \tilde{\theta}_2 \Big|_{\bar{z} \rightarrow -\infty} = 0, \quad (19)$$

$$\tilde{\theta}_1 \Big|_{\bar{z}=0} = (1 + \alpha_2) \tilde{\theta}_2 \Big|_{\bar{z}=0}, \quad K_\lambda \frac{d \tilde{\theta}_2}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = \frac{d \tilde{\theta}_1}{d\bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0}, \quad (20)$$

де $\tilde{\theta}_j = \int_0^\infty \theta_j e^{-s \text{Fo}} d\text{Fo}$, s – параметр перетворення Лапласа.

Розв'язки рівнянь (17) мають вигляд

$$\tilde{\theta}_1 = C_1^1 e^{\bar{z} \sqrt{s}} + C_2^1 e^{-\bar{z} \sqrt{s}}, \quad 0 < \bar{z} < 1,$$

i

$$\tilde{\theta}_2 = C_1^2 e^{\bar{z}\sqrt{sK_a}}, \quad \bar{z} < 0,$$

де $C_2^2 = 0$ згідно з умовою (19). Сталі інтегрування, визначені з умов (18), (20), матимуть вигляд

$$\begin{aligned} C_1^1 &= K_\lambda \sqrt{K_a} \text{Bi}^* \theta_c(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2) \left[s(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2) \times \right. \\ &\quad \times \left(e^{\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2)(\sqrt{s} + \text{Bi}^*) + \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2)(\sqrt{s} - \text{Bi}^*) \right) \right]^{-1}, \\ C_2^1 &= -K_\lambda \sqrt{K_a} \text{Bi}^* \theta_c \left[s \left(e^{\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2)(\sqrt{s} + \text{Bi}^*) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2)(\sqrt{s} - \text{Bi}^*) \right) \right]^{-1}, \\ C_1^2 &= \left[\text{Bi}^* \theta_c(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2) + \text{Bi}^* \theta_c(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2) \right] \times \\ &\quad \times \left[s(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2) \left(e^{\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2)(\sqrt{s} + \text{Bi}^*) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2)(\sqrt{s} - \text{Bi}^*) \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Враховавши ці вирази, отримаємо трансформанти змінних Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= e^{\bar{z}\sqrt{s}} K_\lambda \sqrt{K_a} \text{Bi}^* \theta_c(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2) \left[s(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2) \times \right. \\ &\quad \times \left(e^{\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2)(\sqrt{s} + \text{Bi}^*) + \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2)(\sqrt{s} - \text{Bi}^*) \right) \right]^{-1} + \\ &\quad + e^{-\bar{z}\sqrt{s}} \left\{ -K_\lambda \sqrt{K_a} \text{Bi}^* \theta_c \left[s \left(e^{\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times (\sqrt{s} + \text{Bi}^*) + e^{-\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2)(\sqrt{s} - \text{Bi}^*) \right) \right]^{-1} \right\}, \quad 0 < \bar{z} < 1, \\ \tilde{\theta}_2 &= e^{\bar{z}\sqrt{sK_a}} \left[\text{Bi}^* \theta_c(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2) + \text{Bi}^* \theta_c(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2) \right] \times \\ &\quad \times \left[s(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2) \times \right. \\ &\quad \times \left(e^{\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \alpha_2)(\sqrt{s} + \text{Bi}^*) + \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\sqrt{s}}(K_\lambda \sqrt{K_a} - 1 - \alpha_2)(\sqrt{s} - \text{Bi}^*) \right) \right]^{-1}, \quad \bar{z} < 0. \end{aligned}$$

Оскільки за отриманими трансформантами визначення оригіналів за допомогою таблиць оберненого перетворення є неможливим, використаємо для їх знаходження формулу Пруднікова [5], адаптовану до розв'язування такого класу задач. За відомих зображенням Лапласа $\tilde{\theta}(s)$ невідомої функції $\theta(\text{Fo})$, значень оригіналу і його похідної при $\text{Fo} = 0$, тобто $\theta(0)$, $\theta'(0)$, а також значення оригіналу при $\text{Fo} \rightarrow \infty$, а саме $\theta_\infty = \text{const}$, маємо таку регуляризовану формулу обернення перетворення Лапласа [6, 16, 19, 20]:

$$\theta(\text{Fo}) = \frac{1}{\ell} \exp\left(c \frac{\text{Fo}}{\ell}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_n \exp\left(2\pi n i \frac{\text{Fo}}{\ell}\right) + (1 + \gamma)(\theta(0) + \theta'(0)(\text{Fo} + \gamma\ell)) - \gamma\theta_\infty - R, \quad (21)$$

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nc)(\theta(\text{Fo} + n\ell) - \theta_\infty), \quad (22)$$

де $\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}(s_n) - \frac{\tilde{\theta}(0)}{s_n} - \frac{\tilde{\theta}'(0)}{s_n^2}$, $\gamma = \frac{1}{\exp(c) - 1}$, $0 < \text{Fo} < \ell$, $s_n = \frac{c + 2\pi n i}{\ell}$, c і ℓ – сталі, вибір яких дозволяє покращувати збіжність розв'язку, причому $\text{Re}(c) > 0$, $i = \sqrt{-1}$.

Температури за відомими змінними Кірхгофа обчислюємо для конкретних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури у виразах (11). Якщо вони є лінійними, $\lambda_i^{(j)*}(T_j) = 1 + k_j(T_j - T_p)$, формули для обчислення просторово-часових розподілів температур півпростору та шару мають вигляд

$$T_j(\text{Fo}, \bar{z}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{k_j} \left(\sqrt{1 + 2k_j\theta_j(\text{Fo}, \bar{z}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} - 1 \right) + T_p,$$

де $k_j = \text{const}$. Невідомі лінеаризувальні параметри \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 визначаємо з нелінійних умов конвективного теплообміну на поверхні шару та рівності температур на межі контакту. В результаті отримаємо систему двох нелінійних алгебричних рівнянь:

$$T_1(\text{Fo}, 0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - T_2(\text{Fo}, 0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0,$$

$$\frac{\partial T_1(\text{Fo}, 1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}(T_1(\text{Fo}, 1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - T_c) = 0,$$

для розв'язування якої можемо скористатися будь-яким числовим методом, зокрема, методом Ньютона.

3. Визначення термопружного стану. У випадку зміни температури лише за однією координатою термопружний стан описується співвідношеннями [8]

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \sigma_{yy}^{(i)} = \sigma_i(\bar{z}, \text{Fo}) = \frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} (C_1(\text{Fo}) + C_2(\text{Fo})z - \Phi_i(t_i)),$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = \sigma_{xz}^{(i)} = \sigma_{yz}^{(i)} = \sigma_{xy}^{(i)} = 0,$$

де $C_1(\text{Fo})$, $C_2(\text{Fo})$ – невідомі функції; $\Phi_i(t_i) = \int_{t_p}^{t_i} \alpha_{ti}(t_i) dt_i$ – суто теплові

деформації; $E_i(t_i)$, $\nu_i(t_i)$, $\alpha_{ti}(t_i)$ – залежні від температури модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона і коефіцієнти лінійного температурного розширення матеріалів півпростору та шару. За відсутності навантажень на поверхні кусково-однорідного півпростору та обмеженості напружень на нескінченності маємо, що $C_1(\text{Fo}) = 0$, $C_2(\text{Fo}) = 0$. Таким чином,

$$\sigma_i(\bar{z}, \text{Fo}) = -\frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} \Phi_i(t_i). \quad (23)$$

Подамо механічні характеристики аналогічно до теплових у вигляді добутку розмірної величини на безрозмірну функцію, ввівши безрозмірні напруження $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / (E_0^{(0)} \alpha_{t_0}^{(0)} t_0)$. Тоді формула (23) набуде вигляду

$$\bar{\sigma}_i(\bar{z}, \text{Fo}) = -K_\sigma^{(i)} \frac{E_i^*(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} \bar{\Phi}_i(t_i),$$

де $K_\sigma^{(i)} = E_0^{(i)} \alpha_{t_0}^{(i)} / E_0^{(0)} \alpha_{t_0}^{(0)}$; $E_0^{(0)}$, $\alpha_{t_0}^{(0)}$ – вибрані відлікові значення модуля Юнга і коефіцієнта лінійного температурного розширення.

4. Числові дослідження. Розраховано температуру та термонапруження у півпросторі та шарі за теплофізичних характеристик оксиду цирконію та титанового сплаву, температурні залежності яких змінюються за відповідними законами у діапазоні температур 300 ÷ 1100 К [21]. За відлікову t_0 вибрано максимальну температуру з проміжку зміни характеристик 1100 К, а початкову t_p вважаємо рівною 300 К. Для перевірки достовірності отриманого з використанням формули (21) наближеного розв'язку розглянуто частковий випадок однорідного півпростору та шару з оксиду цирконію, коли $K_\lambda = K_a = 1$, і здійснено порівняння з точним розв'язком задачі теплопровідності для півпростору, коли на його поверхні задано сталу температуру T_0 . Цей розв'язок для змінної Кірхгофа має вигляд

$$\theta = \theta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{1 - \bar{z}}{2\sqrt{\text{Fo}}}\right), \quad \theta_0 = \int_{T_p}^{T_0} \lambda_t^{(1)*}(T) dT.$$

Досліджено відхилення наближеного розв'язку від точного для різних значень координати, часу та параметрів ℓ і c , нехтуючи при цьому залишковим членом (22). Результати обчислень подано в табл. 1–4.

Таблиця 1

\bar{z}	-0.1	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
T	0.3352	0.3592	0.3899	0.4747	0.5931	0.7423	1.0
T^a	0.3356	0.3596	0.3903	0.4748	0.5933	0.7471	1.004

У табл. 1 подано залежності температурного поля півпростору ($\bar{z} < 0$) та шару ($0 < \bar{z} < 1$) від координати, обчислені при $\ell = 1.5$, $c = 7$ у момент часу $\text{Fo} = 0.2$. Максимальна розбіжність між точними T і наближеними T^a значеннями температурного поля не перевищує 2%.

Таблиця 2

Fo	0.001	0.01	0.1	0.3	0.5	1.0	1.7
T_1	0.2924	0.6298	0.876	0.9282	0.9444	0.9607	0.9699
T_1^a	0.3016	0.6323	0.859	0.9185	0.9343	0.9828	0.9842
T_2	0.273	0.273	0.2846	0.3906	0.4769	0.5986	0.6815
T_2^a	0.273	0.273	0.2865	0.3936	0.4799	0.6019	0.6847

У табл. 2 наведено залежності температурного поля шару T_1 в точці $\bar{z} = 0.9$ та півпростору T_2 в точці $\bar{z} = -0.1$ від часу, обчислені при $\ell = 0.1$, $c = 7$ для моментів часу $\text{Fo} = 0.001, 0.01$, $\ell = 2$, $c = 5$ – для $\text{Fo} = 0.1, 0.3, 0.5$, а також при $\ell = 4.5$, $c = 5$ для решти часових моментів. Максимальна розбіжність між точними T_j і наближеними T_j^a значеннями не перевищує 2%.

Табл. 3, 4 демонструють, як вибір параметрів ℓ і c може впливати на точність розрахунків, а рекомендації щодо вибору цих параметрів детально розглянуто в працях [6, 16].

Таблиця 3

ℓ	1.0	1.5	2.	2.5	3.	3.5	4.0
T_1^a	0.8343	0.8431	0.8356	0.8352	0.8363	0.8401	0.8441
T_2^a	0.4487	0.4487	0.4492	0.4494	0.4497	0.4495	0.4497

Результати, наведені в табл. 3, отримано за фіксованого значення параметра $c = 5$ у точках $\bar{z} = 0.7$ і $\bar{z} = -0.2$ в момент часу $Fo = 0.5$ (максимальна похибка не перевищує 1.5 %). Відповідні точні значення температури $T_1 = 0.8343$ та $T_2 = 0.4463$.

Таблиця 4

c	2	3	4	5	6	7	8
T_1^a	0.9291	0.8649	0.8432	0.8343	0.8289	0.8234	0.8154
T_2^a	0.5047	0.4655	0.4531	0.4487	0.4472	0.4466	0.4464

Наведені в табл. 4 результати отримано при $\ell = 1$, $Fo = 0.5$, $\bar{z} = -0.2$, 0.7. Максимальну похибку (близько 11%) спостерігаємо при $c = 2$.

Як зазначено в [16], величину R , подану формулою (22), можна визначити наближено за відомого асимптотичного значення функції $\theta(Fo)$ при $Fo \rightarrow \infty$. Позначимо його θ_∞ , тоді $R \approx \theta_\infty / (\exp(c) - 1)$. Коли на поверхні шару задано сталу температуру T_0 або відбувається конвективний теплообмін з середовищем постійної температури T_c , тоді

$$\theta_\infty = \int_{T_p}^{T_\infty} \lambda_t^{(1)*}(T) dT, \quad T_\infty = \{T_0, T_c\}.$$

Врахування залишкового члена в числових дослідженнях дає змогу отримати результати задовільної точності за значно нижчих значень параметра c , знизивши при цьому похибку обчислення ряду, яка безпосередньо залежить від величини цього параметра. Результати досліджень розподілів температури і напружень для кусково-однорідного півпростору, виготовленого з оксиду цирконію та титанового сплаву, коли на його поверхні задано сталу температуру, наведено на рис. 1, рис. 2.

На рис. 1 наведено графіки розподілу вздовж координати \bar{z} температури (рис. 1а) і напружень (рис. 1б) для значень $Fo = 0.01, 0.5$ при температурах на поверхні шару $T_0 = 0.8$ (штрихові лінії) та $T_0 = 1$ (суцільні лінії).

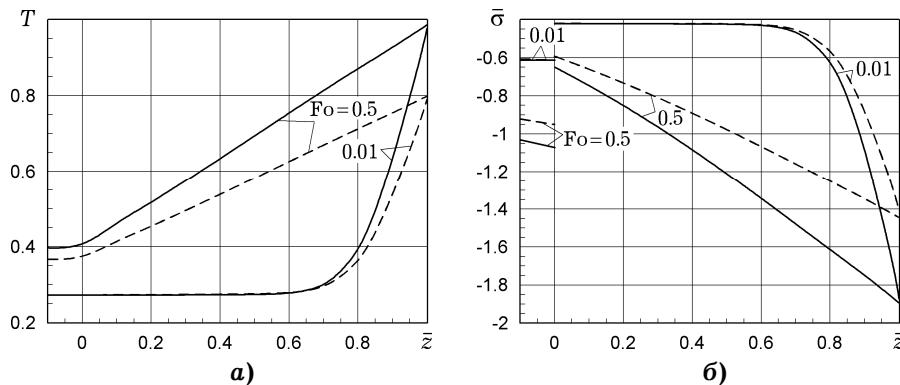


Рис. 1

Графіки на рис. 2 ілюструють залежності від часу Fo температури T (рис. 2а) і напружень $\bar{\sigma}$ (рис. 2б) у фіксованих точках $\bar{z} = -0.8, -0.2, 0.2, 0.7$ при заданій на поверхні температурі $T_0 = 1$.

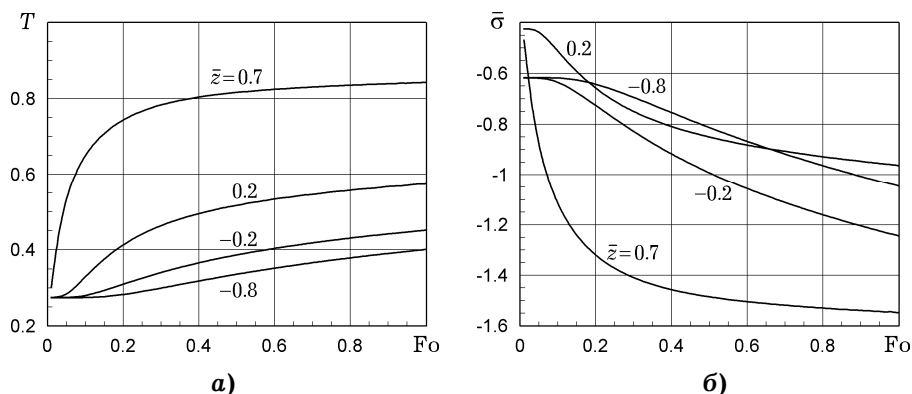


Рис. 2

Зазначимо, що за розглянутої в числових дослідженнях крайової умови отримано фізично очікувані розподіли температурного поля за координатою та часом та відповідні стискальні стрибкоподібні напруження.

Висновки. На прикладі квазістатичної задачі термопружності для термочутливих ідеально контактуючих півпростору та шару за умов конвективного теплообміну з середовищем сталої температури апробовано аналітично-числовий підхід до розв'язування задач термопружності для кусково-однорідних термочутливих тіл. Особливістю цього підходу є застосування методу лінеаризувальних параметрів та регуляризованої формули Пруднікова для числового обернення перетворення Лапласа в нестационарній задачі теплопровідності.

Доведено достовірність результатів шляхом порівняння наближеного розв'язку з точним у частковому випадку за припущення однорідності півпростору та шару, а в загальному випадку – шляхом визначення температури на поверхні шару і порівнянні отриманих значень із заданою в межовій умові температурою. Розбіжність між точним та наближеним значеннями температури не перевищувала 0.2% за оптимально підібраних параметрів ℓ , s . Досліджено розподіли температури і напружень термочутливих шару та півпростору, виготовлених з оксиду цирконію і титанового сплаву, залежно від координати та часу, коли на поверхні задано сталу температуру.

У подальших дослідженнях планується використання отриманих результатів для знаходження розподілів температур та спричинених ними напружень для термочутливих кусково-однорідних структур без обмежень на характер зміни теплових характеристик від температури та за інших умов нагрівання і силових навантажень.

Роботу виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень» КПКВК 6541230

1. Андрейченко Д. К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. – 40, № 7. – С. 1030–1044.
2. Вовк О. М. Використання числового обернення перетворення Лапласа в задачах теплопровідності контактуючих термочутливих тіл // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 124–131.
3. Вовк О., Соляр Т. Числове обернення перетворення Лапласа в задачі теплопровідності для термочутливого півпростору // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2018. – Вип. 27. – С. 9–18.

4. Гарматій Г. Ю. Визначення неусталеного теплового стану термочутливої двохшарової пластини за складного теплообміну // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 132–138.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 466 с.
6. Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 2. – С. 18–26.
Te same: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperatures with the help of improved formulas of the inverse Laplace transformation // *Mater. Sci.* – 2002. – **38**, No. 2. – P. 172–184.
<https://doi.org/10.1023/A:1020929818010>.
7. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Споллом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
8. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
9. Процюк Б. В., Горун О. П. Термопружний стан півбезмежного термочутливого трикомпонентного стрижня за конвективно-променевого теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 3. – С. 15–22.
Te same: *Protsyuk B. V., Horun O. P.* Thermoelastic state of a semiinfinite thermally sensitive three-component rod under convective-radiative heat exchange // *Mater. Sci.* – 2016. – **52**, No. 3. – P. 305–314.
– <https://doi.org/10.1007/s11003-016-9958-5>.
10. Рябов В. М. Численное обращение преобразования Лапласа. – Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 2013. – 188 с.
11. Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температурних полів і напружень у кусково-однорідних кільцевих пластинках на основі чисельно-аналітичної формули обернення перетворення Лапласа // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 3. – С. 201–208.
Te same: *Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperature fields and stresses in piecewise homogeneous circular plates on the basis of a numerical-analytic Laplace inversion formula // *J. Math. Sci.* – 2010. – **171**, No. 5. – P. 673–681. – <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0166-9>.
12. Турчин І. М., Колодій Ю. О. Плоска квазістатична задача термопружності для півпростору з покриттям за змішаних умов нагріву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 2. – С. 118–128.
Te same: *Turchyn I. M., Kolodiy Yu. O.* Quasistatic plane problem of thermoelasticity for the half space with coating under mixed conditions of heating // *J. Math. Sci.* – 2017. – **223**, No. 2. – P. 145–158.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3344-1>.
13. Шевчук В. А., Гаврись О. П. Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покривом за променево-конвективного теплообміну // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. – С. 171–179.
14. *Hachkevych O., Terlets'kyi R., Turii O.* The formulation and development of methods of solving thermomechanics problems for irradiated layered solids // *Mathematical Modeling and Computing.* – 2017. – **4**, No. 1. – P. 21–36.
– <https://doi.org/10.23939/mmc2017.01.021>.
15. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: *Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.).* – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.) – <http://www.intechopen.com/books/show/title/heat-conduction-basic-research>.
16. *Kushnir R., Solyar T.* A numerical-analytical approach to the analysis of non-stationary temperature fields in multiply-connected solids // *Mechanics, Materials Science & Engineering Journal.* – 2016. – **3**. – P. 90–106.
– DOI 10.13140/RG.2.1.1167.0165.
17. *Manthana V. R., Kedar G. D.* Mathematical modeling of thermoelastic state of a functionally graded thermally sensitive thick hollow cylinder with internal heat generation // *Int. J. Thermodynamics.* – 2018. – **21**, No. 4. – P. 202–212.
– <https://doi.org/10.5541/ijot.434180>.
18. *Popovych V.* Methods for determination of the thermo-stressed state of thermosensitive solids under complex heat exchange conditions // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski.* – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 6.

- P. 2997–3008. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_617.
19. *Solyar T. Ya.* Improvement of Fourier series convergence on the basis of splines and its application for numerical inversion of Laplace transform // *Mechanics, Materials Science & Engineering Journal*. – 2016. – **5**. – P. 189–203.
– DOI 10.13140/RG.2.1.4069.2727.
20. *Solyar T.* Ways to improve Fourier series convergence and its application for Laplace numerical inversion // *Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту*. – 2016. – № 1. – P. 136–144.
21. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *J. Therm. Stresses*. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.
– <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И СЛОЯ

С использованием численного обращения преобразования Лапласа, базирующегося на модифицированной формуле Прудникова, построено решение нестационарной задачи теплопроводности для контактирующих термочувствительных полупространства и слоя в условиях конвективного теплообмена со средой постоянной температуры. Исследовано термоупругое состояние такой термочувствительной кусочно-однородной структуры, когда на поверхности задана постоянная температура.

Ключевые слова: термоупругое состояние, нелинейная задача теплопроводности, термочувствительные полупространство и слой, метод линеаризующих параметров, числовое обращение преобразования Лапласа.

THERMOELASTIC STATE OF THE CONTACTING THERMOSENSITIVE HALF-SPACE AND LAYER

By making use of a numerical inversion of the Laplace transform based on the modified Prudnikov formula, a solution to the non-stationary heat conduction problem is constructed for the contacting thermosensitive half-space and layer under the convective heat exchange with the environment of a constant temperature. The thermoelastic state of this thermosensitive piecewise-homogeneous structure is analyzed, when a constant temperature is set its surface.

Key words: thermoelastic state, non-linear heat conduction problem, thermosensitive half-space and layer, method of linearizing parameters, a numerical inversion of the Laplace transform.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
11.08.18