УДК 539.3

Г. С. Кіт, Р. М. Андрійчук

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ВІЛЬНОЮ, ЖОРСТКО, ГЛАДКО АБО ГНУЧКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЇ В ОБЛАСТІ, РОЗМІЩЕНІЙ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО МЕЖІ ПЛОЩИНІ

За дії теплового диполя побудовано функції Ґріна задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для півпростору з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій задана нульова температура або теплоізоляція. При цьому використано гармонічні потенціали подвійного шару при розв'язуванні задачі теплопровідності і термопружні потенціали переміщень у безмежному просторі з двома дзеркально розміщеними відносно межі тепловими диполями. Для виконання крайових умов на межі побудовано бігармонічні функції Лява. Наведено явні вирази для температури, переміщень і напружень, які можна використати при визначенні термопружного стану півпростору, зумовленого збуренням заданого теплового потоку паралельним до межі теплонепроникним тонким включенням.

Багато елементів сучасних конструкцій та інженерних споруд працюють в умовах нерівномірного нагрівання, при якому виникають ґрадієнти температури і температурні напруження. Ці напруження разом з механічними напруженнями від зовнішніх сил можуть зумовити появу тріщин і руйнування конструкції із крихкого матеріалу. Важливим є вивчення розподілу температури та напружень в околі теплонепроникних тонких включень. У цьому випадку таке включення є тепловим екраном, ідеальність теплового контакту порушується, воно починає впливати на теплові і механічні поля у тілі, його поверхні прогріваються нерівномірно, внаслідок чого виникають дотичні напруження.

Під час дослідження напруженого стану тіла з теплоізольованими включеннями (тріщинами) проміжним етапом є визначення температурного поля за заданим на їх місці тепловим потоком. Загальний метод розв'язування просторових задач для безмежного тіла з плоскими тріщинами, на поверхнях яких задано різні теплові та силові навантаження, наведено у монографії [3]. За допомогою гармонічних потенціалів подвійного шару для теплоізольованих включень задачі зведено до розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому густинами потенціалів є густини диполів тепла на місці розташування включень. Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для безмежного тіла з круговими теплоізольованими включеннями (тріщинами) розв'язано у працях [2, 6, 7, 9, 11, 12, 15], а такі ж осесиметричні − у [1, 5, 8]. Задачам термопружності для біматеріальних тіл з міжфазними теплоізольованими круговими тріщинами або жорстким включенням присвячено праці [10, 13, 14, 16–18]. Задачі теплопровідності та термопружності для півбезмежних тіл з круговими теплоізольованими включеннями розв'язано у працях [4, 19].

У цій статті в замкнутому вигляді побудовано функції Ґріна задач термопружності для півбезмежного тіла за дії диполя тепла, межа якого вільна, жорстко, гладко або гнучко закріплена: ***1***) за умов нульової температури на ній або ***2***) теплоізоляції.

1. Постановка задачі. Розглянемо півпростір з вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція. Введемо циліндричну систему координат з початком на межі півпростору і віссю Oz, перпендикулярною до неї. На віддалі h від межі півпростору в паралельній до неї площині в області S знаходиться тонке теплонепроникне включення. Температурне поле у тілі з включенням подамо у вигляді

$$T(r,z) = t_0(r,z) + t(r,z)\,,$$

де $t_0(r,z)$ − температурне поле у тілі без включення; $t(r,z)$ − температурне поле від збурення включенням температури $t_0(r,z)$. Граничну умову теплоізоляції на включенні S запишемо так:

$$\frac{\partial T(r,z)}{\partial z} = 0 \qquad \text{або} \qquad \frac{\partial t\,(r,z)}{\partial z} = -\frac{\partial t_0\,(r,z)}{\partial z} \qquad \text{на} \quad S\,. \tag{1}$$

Температуру $t(r,z)$ шукаємо у вигляді гармонічного потенціалу подвійного шару з густиною диполів $\gamma(\rho)$.

Крайові умови для температури на межі $z = 0$ мають вигляд

$$\textit{1})\quad t(r,0) = 0 \quad \text{або} \quad \textit{2})\qquad \left.\frac{\partial t(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0\,.$$

Механічні крайові умови подамо так:

− *для жорстко закріпленої межі*

$$u_r(r,0) = 0, \qquad u_z(r,0) = 0\,, \tag{2}$$

− *для вільної межі*

$$\sigma_{zz}(r,0) = 0, \qquad \sigma_{rz}(r,0) = 0\,, \tag{3}$$

− *для гладко закріпленої межі*

$$u_z(r,0) = 0, \qquad \sigma_{rz}(r,0) = 0\,, \tag{4}$$

− *для гнучко закріпленої межі*

$$u_r(r,0) = 0, \qquad \sigma_{zz}(r,0) = 0\,. \tag{5}$$

Для обох задач компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді суми

$$u(r,z) = \bar{u}(r,z) + \bar{\bar{u}}(r,z), \qquad \sigma(r,z) = \bar{\sigma}(r,z) + \bar{\bar{\sigma}}(r,z)\,, \tag{6}$$

де доданки $\bar{u}(r,z)$, $\bar{\sigma}(r,z)$ характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а доданки $\bar{\bar{u}}(r,z)$, $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ − переміщення і напруження у півпросторі $z \ge 0$, які забезпечують виконання граничних умов (2)−(5).

2. Задача теплопровідності. Розглянемо безмежний простір з двома дзеркально розміщеними відносно площини $z = 0$ тепловими диполями сталої потужності γ, осі яких спрямовані в одну сторону по осі Oz (за нульової температури при $z = 0$) або в протилежні сторони (площина $z = 0$ теплоізольована).

Температурне поле запишемо у вигляді

$$t(r,z) = \frac{\gamma}{4\pi}\left(\frac{z-h}{R_1^3(r,z)} + (-1)^k\,\frac{z+h}{R_2^3(r,z)}\right), \tag{7}$$

$$R_1(r,z) = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}, \qquad R_2(r,z) = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}\,,$$

де $k = 1$ відповідає теплоізоляції, а $k = 2$ − нульовій температурі межі тіла.

Наведене співвідношення для температури є відповідною функцією Ґріна і може бути використане при визначенні у півпросторі термопружного стану, зумовленого диполями тепла, розподіленими по області S, обмеженій гладким контуром. Для цього необхідно перенести диполь тепла в точку $(\xi_1, \xi_2, 0)$ декартової системи координат Ox_1x_2z з початком в області S.

У циліндричній системі координат у формули для температури слід підставити

$$R_1(r,z) = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad R_2(r,z) = \sqrt{r^2 + (z+2h)^2}\,.$$

Якщо диполі тепла розподілені в паралельній до межі області S, що знаходиться на віддалі h від межі півпростору, то за відомою функцією Ґріна (7) температуру визначаємо за формулою

$$t(x_1,x_2,z) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma(\xi_1,\xi_2)\left(\frac{z}{R_1^3} + (-1)^k \frac{z+2h}{R_2^3}\right) d\xi_1\, d\xi_2\,. \tag{8}$$

У декартовій системі координат $r = \left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2\right]^{1/2}$.

За властивістю потенціалу подвійного шару

$$t(x_1,x_2,\pm 0) = \pm\frac{\gamma(x_1,x_2)}{2} + \frac{(-1)^k h}{2\pi}\iint_S \frac{\gamma(\xi_1,\xi_2)}{(r^2+4h^2)^{3/2}}\, d\xi_1\, d\xi_2\,.$$

Для визначення потужності теплових диполів $\gamma(\xi_1,\xi_2)$ знайдемо похідну по z від $t(x_1,x_2,z)$ і підставимо в граничну умову теплоізоляції (1). Тоді одержимо гіперсингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma(\xi_1,\xi_2)\left[\frac{1}{r^{3/2}} + \frac{(-1)^k}{(r^2+4h^2)^{3/2}}\right] d_\xi S = q(x_1,x_2)\,, \tag{9}$$

де $q(x_1,x_2) = -\left.\dfrac{\partial t_0(x_1,x_2,z)}{\partial z}\right|_{z=0}$.

Інтегральне рівняння (9) має гіперсингулярне і регулярне ядро і для кругової області його можна розв'язувати аналітично-числовим методом [3]. Для цього його регуляризуємо, розбиваємо область S на граничні елементи за радіусом та кутом і задовольняємо у колокаційних точках усередині введених елементів, використовуючи кусково-сталу апроксимацію шуканих функцій і різницеві схеми для її перших і других похідних. Так приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Якщо густина теплових диполів $\gamma(\rho)$ не залежить від кутової координати, вираз (8) для температури $t(r,z)$ можемо записати в циліндричній системі координат:

$$t(r,z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \alpha H(\alpha) J_0(\alpha r)\left(\operatorname{sgn} z\, e^{-\alpha|z|} + (-1)^k e^{-\alpha|z+2h|}\right) d\alpha\,, \tag{10}$$

$$H(\alpha) = \int_0^a \rho\gamma(\rho) J_0(\alpha\rho)\, d\rho\,, \tag{11}$$

де $J_0(u)$ – функція Бесселя, a – радіус області S.

Візьмемо з виразу (10) похідну по z і підставимо в граничну умову теплоізоляції. Тоді інтегральне рівняння (9) набуде вигляду

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \alpha^2 H(\alpha) J_0(\alpha r)\left(1 + e^{-2\alpha h}\right) d\alpha = q(r), \qquad q(r) = -\left.\frac{\partial t_0(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0}. \tag{12}$$

3. Напружено-деформований стан безмежного тіла. Зумовлені тепловими диполями напруження і переміщення у безмежному тілі визначаються термопружним потенціалом переміщень $\Phi(r,z)$, який задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta\Phi(r,z) = m t(r,z), \qquad m = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\,,$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона відповідно. Частковим розв'язком цього рівняння є функція

$$\Phi(r,z) = -A\gamma\int_0^\infty J_0(\alpha r) f(\alpha,z,h)\, d\alpha = -A\gamma\left[\frac{z-h}{R_1(r,z)} + (-1)^k \frac{z+h}{R_2(r,z)}\right],$$

де

$$f(\alpha,z,h) = e^{-\alpha|z-h|}(z-h) + (-1)^k e^{-\alpha|z+h|}(z+h), \qquad A = \frac{m}{8\pi}.$$

Компоненти тензора напружень і вектора переміщень виражаються формулами

$$\bar{u}_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \qquad \bar{u}_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi, \qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -2G\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi,$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi, \qquad \bar{\sigma}_{rz} = 2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z},$$

де G – модуль зсуву.

Після відповідних обчислень маємо:

$$\bar{u}_r = A\gamma\int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r) f(\alpha,z,h)\, d\alpha,$$

$$\bar{u}_z = -A\gamma\int_0^\infty J_0(\alpha r)\left[e^{-\alpha|z-h|}(1-\alpha|z-h|) + (-1)^k e^{-\alpha|z+h|}(1-\alpha|z+h|)\right] d\alpha, \tag{13}$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = -2G\left\{mt - \frac{A\gamma}{2}\int_0^\infty \alpha^2[J_0(\alpha r) - J_2(\alpha r)] f(\alpha,z,h)\, d\alpha\right\},$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -2G\left\{mt - \frac{A\gamma}{2}\int_0^\infty \alpha^2[J_0(\alpha r) + J_2(\alpha r)] f(\alpha,z,h)\, d\alpha\right\},$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -2GA\gamma\int_0^\infty \alpha^2 J_0(\alpha r) f(\alpha,z,h)\, d\alpha,$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = 2GA\gamma\int_0^\infty \alpha J_1(\alpha r)\left[e^{-\alpha|z-h|}(1-\alpha|z-h|) + (-1)^k e^{-\alpha|z+h|}(1-\alpha|z+h|)\right] d\alpha. \tag{14}$$

Обчисливши інтеграли, визначаємо

$$\bar{u}_r = A\gamma r\left[\frac{z-h}{R_1^3} + (-1)^k\frac{z+h}{R_2^3}\right], \qquad \bar{u}_z = -A\gamma r^2\left[\frac{1}{R_1^3} + (-1)^k\frac{1}{R_2^3}\right], \tag{15}$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = -2G\left\{\frac{mt}{2} + 3A\gamma r^2\left(\frac{z-h}{R_1^5} + \frac{(-1)^k(z+h)}{R_2^5}\right)\right\}, \qquad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -mGt,$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = 2GA\gamma\left\{\left(\frac{z-h}{R_1^3} + (-1)^k\frac{z+h}{R_2^3}\right) - 3\left(\frac{(z-h)^3}{R_1^5} + \frac{(-1)^k(z+h)^3}{R_2^5}\right)\right\},$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = -2GA\gamma r\left[\frac{2}{R_1^3} - \frac{3r^2}{R_1^5} + (-1)^k\left(\frac{2}{R_2^3} - \frac{3r^2}{R_2^5}\right)\right]. \tag{16}$$

Із аналізу цих формул випливає, що ними описується також напружено-деформований стан півпростору з диполем тепла (при $h \neq 0$), межа якого теплоізольована і гладко закріплена ($k = 1$, $u_z = 0$, $\sigma_{rz} = 0$) або закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою за нульової температури на ній ($k = 2$, $u_r = 0$, $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$).

4. Визначення переміщень і напружень через функцію Лява. Переміщення $\bar{\bar{u}}(r,z)$ і напруження $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ визначимо за допомогою функції Лява φ, яка задовольняє бігармонічне рівняння $\Delta^2\varphi = 0$ у пружному півпросторі:

$$\bar{\bar{u}}_r = -\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}, \qquad \bar{\bar{u}}_z = \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right], \tag{17}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right), \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right), \quad \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right). \tag{18}$$

Подамо цю функцію у вигляді інтеграла Ганкеля

$$\varphi(r,z) = \int_0^\infty e^{-\alpha z}(C + D\alpha z)J_0(\alpha r)\,d\alpha. \tag{19}$$

Тут $C(\alpha)$ і $D(\alpha)$ – невідомі функції.

Підставляючи вираз (19) у формули (17) і (18), одержимо

$$\bar{\bar{u}}_r = -\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha z}[C - D(1-\alpha z)]J_1(\alpha r)\,d\alpha,$$

$$\bar{\bar{u}}_z = -\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha z}[C + D(2-4\nu+\alpha z)]J_0(\alpha r)\,d\alpha, \tag{20}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = -\frac{2G}{1-2\nu}\left\{\int_0^\infty \alpha^3 e^{-\alpha z}[C - D(1+2\nu-\alpha z)]J_0(\alpha r) - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha z}[C - D(1-\alpha z)]\frac{J_1(\alpha r)}{r}\,d\alpha\right\},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\nu}\left\{\int_0^\infty 2\nu\alpha^3 e^{-\alpha z}DJ_0(\alpha r)\,d\alpha - \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha z}[C-D(1-\alpha z)]\frac{J_1(\alpha r)}{r}\,d\alpha\right\},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha^3 e^{-\alpha z}[C + D(1-2\nu+\alpha z)]J_0(\alpha r)\,d\alpha,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty \alpha^3 e^{-\alpha z}[C - D(2\nu-\alpha z)]J_1(\alpha r)\,d\alpha. \tag{21}$$

4.1. Нульова температура на жорстко закріпленій межі. Використовуючи умову (2), подання (6), (13) при $k = 2$ і (20) та прирівнюючи підінтегральні вирази до нуля, маємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих C і D:

$$D - C = 0,$$

$$-\frac{1}{1-2\nu}\alpha^2[C + D(2-4\nu)] + 2A\gamma(1-\alpha h)e^{-\alpha h} = 0,$$

розв'язком якої є

$$C = D = -\frac{2A\gamma(1-2\nu)(1-\alpha h)e^{-\alpha h}}{(3-4\nu)\alpha^2}. \tag{22}$$

Підставивши вираз (22) у формули (20) і (21), маємо

$$\bar{\bar{u}}_r = \frac{2A\gamma zr}{3-4\nu}\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{3h(z+h)}{R_2^5}\right),$$

$$\bar{\bar{u}}_z = \frac{2A\gamma}{3-4\nu}\left[\frac{3-4\nu}{R_2} + \frac{z^2 - zh - (3-4\nu)(z+h)h}{R_2^3} + \frac{3r^2zh}{R_2^5}\right], \tag{23}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = -\frac{4A\gamma G}{3-4\nu}\left[\frac{2(1+\nu)z + 4\nu h}{R_2^3} - 3(z+h)\frac{(z+2\nu h)(z+h) - zh}{R_2^5} - \right.$$

$$\left. - \frac{15r^2zh(z+h)}{R_2^7}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = -\frac{4A\gamma G}{3-4\nu}\left[\frac{4\nu h - (1-2\nu)z}{R_2^3} - 3h(z+h)\frac{2\nu h - z(1-2\nu)}{R_2^5}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = -\frac{4A\gamma G}{3-4\nu}\left[\frac{(1-2\nu)z + 4(1-\nu)h}{R_2^3} + 3(z+h)\frac{(z-2(1-\nu)h)(z+h) - 2zh}{R_2^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{15r^2zh(z+h)}{R_2^7}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = -\frac{4A\gamma Gr}{3-4\nu}\left[\frac{1-2\nu}{R_2^3} + 3\frac{(z+h)(z-(1-2\nu)h) - 4zh}{R_2^5} + \frac{15r^2zh}{R_2^7}\right]. \tag{24}$$

Напружено-деформований стан півпростору визначаємо за формулами (6), (15), (16) і (23), (24).

4.2. Теплоізольована жорстко закріплена межа. Використовуючи умову (2), подання (6), (13) при $k = 1$ і (20), маємо

$$C = -2(1-2\nu)D, \qquad D = \frac{2A\gamma(1-2\nu)he^{-\alpha h}}{(3-4\nu)\alpha}. \tag{25}$$

Підставивши вирази (25) у формули (20) і (21), визначаємо

$$\bar{\bar{u}}_r = \frac{2A\gamma hr}{3-4\nu}\left(\frac{3-4\nu}{R_2^3} - \frac{3z(z+h)}{R_2^5}\right), \qquad \bar{\bar{u}}_z = -\frac{2A\gamma zh}{3-4\nu}\left[\frac{2}{R_2^3} - \frac{3r^2}{R_2^5}\right], \tag{26}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = -\frac{12A\gamma Gh}{3-4\nu}\left[\frac{2(1-\nu)}{R_2^3} - (z+h)\frac{(3-2\nu)(z+h) + 3z}{R_2^5} + \frac{5r^2z(z+h)}{R_2^7}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = -\frac{12A\gamma Gh}{3-4\nu}\left[\frac{1-2\nu}{R_2^3} - (z+h)\frac{z-6\nu(z+h)}{R_2^5}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{4A\gamma Gh}{3-4\nu}\left[\frac{1-2\nu}{R_2^3} - 3(z+h)\frac{(1-2\nu)(z+h) + 2z}{R_2^5} - \frac{15r^2z(z+h)}{R_2^7}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = -\frac{12A\gamma Ghr}{3-4\nu}\left[\frac{-2z(2-\nu) + 2h(1-\nu)}{R_2^5} + \frac{5zr^2}{R_2^7}\right]. \tag{27}$$

Напружено-деформований стан півпростору визначаємо за формулами (6), (15), (16) і (26), (27).

4.3. Нульова температура на вільній межі. Використовуючи умову (3), подання (6), (14) при $k = 2$ і (21), маємо

$$C = -(1-2\nu)D, \qquad D = \frac{2A\gamma(1-2\nu)(1-\alpha h)e^{-\alpha h}}{\alpha^2}. \tag{28}$$

Підставивши вирази (28) у формули (20) і (21), визначаємо

$$\bar{\bar{u}}_r = 2A\gamma r\left(\frac{2(1-\nu)}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{z+2(1-\nu)h}{R_2^3} + \frac{3zh(z+h)}{R_2^5} \right),$$

$$\bar{\bar{u}}_z = -2A\gamma\left[\frac{1-2\nu}{R_2} + \frac{(z+h)(z-(1-2\nu)h)-2zh}{R_2^3} + \frac{3r^2zh}{R_2^5} \right], \tag{29}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = -4A\gamma G\left[\frac{2(1-\nu)}{R_2(R_2+z+h)} - 2\frac{2(z+h)+(1-\nu)h}{R_2^3} + \right.$$

$$\left. + 3(z+h)\frac{(z+2h)(z+h)-zh}{R_2^5} - + \frac{15r^2zh(z+h)}{R_2^7} \right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = 4A\gamma G\left[\frac{2(1-\nu)}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{(z+2h)(1-2\nu)-2\nu h}{R_2^3} - \right.$$

$$\left. - 3h(z+h)\frac{2\nu h - z(1-2\nu)}{R_2^5} \right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = -4A\gamma Gz\left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{3(z+h)(z-h)}{R_2^5} - \frac{15r^2h(z+h)}{R_2^7} \right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = -4A\gamma Gr\left(\frac{1}{R_2^3} - 3\frac{(z+h)^2-4zh}{R_2^5} - \frac{15r^2zh}{R_2^7} \right). \tag{30}$$

Напружено-деформований стан півпростору визначаємо за формулами (6), (15), (16) і (29), (30).

4.4. Теплоізольована вільна межа. Використовуючи умову (3), подання (6), (14) при $k = 1$ і (21), маємо

$$C = 2\nu D, \qquad D = -\frac{2A\gamma(1-2\nu)he^{-\alpha h}}{\alpha}. \tag{31}$$

Підставивши вирази (31) у формули (20) і (21), визначаємо

$$\bar{\bar{u}}_r = -2A\gamma hr\left(\frac{1-2\nu}{R_2^3} - \frac{3z(z+h)}{R_2^5} \right),$$

$$\bar{\bar{u}}_z = -2A\gamma h\left[\frac{2(z-h)(1-\nu)}{R_2^3} + \frac{3zr^2}{R_2^5} \right], \tag{32}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = 4A\gamma Gh\left[\frac{2(1-\nu)}{R_2^3} - \frac{3h(z+h)}{R_2^5} + \frac{15r^2z(z+h)}{R_2^7} \right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = -4A\gamma Gh\left[\frac{1-4\nu}{R_2^3} + 3(z+h)\frac{2\nu h-(1-2\nu)z}{R_2^5} \right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = 4A\gamma Gh\left[\frac{1}{R_2^3} + \frac{3(z-h)(z+h)}{R_2^5} - \frac{15r^2z(z+h)}{R_2^7} \right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = 12A\gamma Ghrz\left(-\frac{4}{R_2^5} + \frac{5r^2}{R_2^7} \right). \tag{33}$$

Напружено-деформований стан півпростору визначаємо за формулами (6), (15), (16) і (32), (33).

4.5. Нульова температура на гладко закріпленій межі. Використовуючи граничну умову (4), подання (6), (13) і (14) при $k = 2$, (20) і (21), маємо

$$C = -\frac{2A\gamma(1-2\nu)(1-\alpha h)e^{-\alpha h}}{\alpha^2}, \qquad D = 0. \tag{34}$$

Тоді за формулами (20) і (21) одержуємо

$$\bar{\bar{u}}_r = 2A\gamma r\left(\frac{1}{R_2\,(R_2+z+h)} - \frac{h}{R_2^3}\right), \qquad \bar{\bar{u}}_z = 2A\gamma\left(\frac{1}{R_2} - \frac{zh}{R_2^3}\right), \tag{35}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = -4A\gamma G\left[\frac{1}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{z+3h}{R_2^3} + \frac{3h(z+h)^2}{R_2^5}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = 4A\gamma G\left(\frac{1}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{h}{R_2^3}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = -4A\gamma G\left[\frac{z+2h}{R_2^3} - \frac{3h(z+h)^2}{R_2^5}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = -4A\gamma G r\left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{3h(z+h)}{R_2^5}\right]. \tag{36}$$

Напружено-деформований стан півпростору з гладко закріпленою межею, яка підтримується за нульової температури, визначаємо за формулами (6), (15), (16) і (35), (36).

4.6. Теплоізольована гнучко закріплена межа. Використовуючи граничну умову (5), подання (6), (13) і (14) при $k = 1$, (20) і (21), маємо

$$C = -\frac{2A\gamma(1-2\nu)he^{-\alpha h}}{\alpha}, \qquad D = 0.$$

Тоді

$$\bar{\bar{u}}_r = \frac{2A\gamma hr}{R_2^3}, \qquad \bar{\bar{u}}_z = \frac{2A\gamma h(z+h)}{R_2^3}, \tag{37}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr} = -4A\gamma Gh\left[\frac{2}{R_2^3} - \frac{3(z+h)^2}{R_2^5}\right], \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \frac{4A\gamma Gh}{R_2^3},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = 4A\gamma Gh\left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{3(z+h)^2}{R_2^5}\right], \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = -\frac{12A\gamma Grh(z+h)}{R_2^5}. \tag{38}$$

Напружено-деформований стан півпростору з теплоізольованою гнучко закріпленою межею визначаємо за формулами (6), (15), (16) і (37), (38).

5. Теплоізоляція у паралельній до межі півпростору круговій області. Наведені співвідношення для переміщень і напружень є відповідними функціями Ґріна і можуть бути використані при визначенні у півпросторі термопружного стану, зумовленого диполями тепла, розподіленими по області S, обмеженій гладким контуром. Для цього необхідно перенести диполь тепла в точку $(\xi_1, \xi_2, 0)$ декартової системи координат з початком в області S. У прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ напруження виражаються формулами

$$\sigma_{11} = \sigma_{rr}\cos^2\varphi + \sigma_{\varphi\varphi}\sin^2\varphi, \quad \sigma_{22} = \sigma_{rr}\sin^2\varphi + \sigma_{\varphi\varphi}\cos^2\varphi, \quad \sigma_{33} = \sigma_{zz},$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\sin 2\varphi, \qquad \sigma_{13} = \sigma_{rz}\cos\varphi, \qquad \sigma_{23} = \sigma_{rz}\sin\varphi,$$

де

$$\cos\varphi = \frac{x_1 - \xi_1}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{x_2 - \xi_2}{r}, \qquad r = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2\right]^{1/2}.$$

У формули для температури, переміщень і напружень слід підставити

$$R_1(r,z) = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad R_2(r,z) = \sqrt{r^2 + (z+2h)^2}.$$

За відомою функцією Ґріна визначаємо переміщення і напруження, зумовлені розподіленими в області S диполями тепла з потужністю $\gamma(\xi_1,\xi_2)$, за формулами

$$u_i^*(x_1,x_2,z) = \iint\limits_S \gamma(\xi_1,\xi_2) u_i(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

$$\sigma_{ij}^*(x_1,x_2,z) = \iint\limits_S \gamma(\xi_1,\xi_2) \sigma_{ij}(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2. \qquad (39)$$

6. Теплоізольована в круговій області межа. Розглянемо півпростір, межа якого теплоізольована в круговій області одиничного радіуса за нульової температури поза нею. Задамо у півпросторі температурне поле $t_0(z) = \frac{q}{\lambda} z$, що відповідає однорідному тепловому потоку q на безмежності, спрямованому перпендикулярно до межі. Тоді рівняння (12) при $h = 0$ має обмежений на контурі розв’язок

$$\gamma(\rho) = q_0 \sqrt{1-\rho^2}, \qquad q_0 = \frac{4q}{\pi\lambda},$$

і з формули (11) одержимо

$$H(\alpha) = q_0 \int_0^a \rho\sqrt{1-\rho^2} J_0(\alpha\rho)\, d\rho = q_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha^{-3/2} J_{3/2}(\alpha). \qquad (40)$$

Підставивши у формулу (39) в циліндричній системі координат компоненти (14) і (21) з використанням (40) і (22), на жорстко закріпленій межі при $z = 0$ одержуємо напруження

$$\sigma_{rr}^*(r,0) = \sigma_{\varphi\varphi}^*(r,0) = B_2 \sigma_{zz}^*(r,0) = \begin{cases} -8AB_1Gq_0\sqrt{1-r^2}, & 0 < r \le 1, \\ 0, & r \ge 1, \end{cases}$$

$$\sigma_{rz}^*(r,0) = \begin{cases} 2AB_3Gq_0\pi r, & 0 < r \le 1, \\ \dfrac{8AB_3Gq_0}{3r^2} F\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{r^2}\right), & r \ge 1, \end{cases}$$

де

$$B_1 = \frac{3(1-\nu)}{3-4\nu}, \qquad B_2 = \frac{4-5\nu}{3(1-\nu)}, \qquad B_3 = \frac{1-\nu}{3-4\nu},$$

$F(a,b;c;x)$ − гіпергеометрична функція.

На рис. 1 наведено розподіл напружень $\bar{\sigma}^* = \sigma_{rr}^* / (8AB_1Gq_0) = \sigma_{\varphi\varphi}^* / (8AB_1Gq_0) = \sigma_{zz}^* / (8AB_1B_2Gq_0)$ від збуреного температурного поля, а на рис. 2 − напружень $\bar{\sigma}_{rz}^* = \sigma_{rz}^* / (2AB_3Gq_0)$ на жорстко закріпленій межі півпростору вздовж осі Or. Нормальні напруження пропорційні температурі, максимальні за модулем в центрі області і відсутні поза нею. Дотичні напруження є максимальними на межі області.

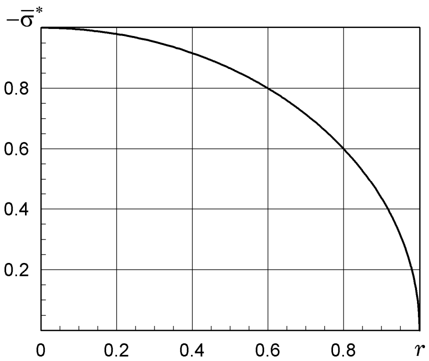

Рис. 1

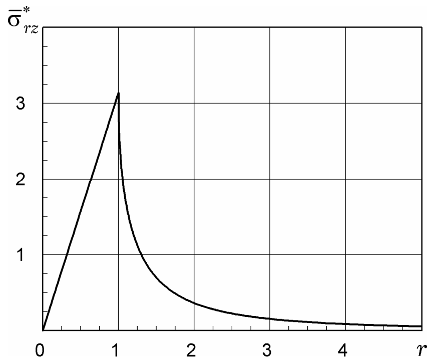

Рис. 2

На вільній межі при $z = 0$, згідно зі співвідношеннями (39), (14) і (21) з використанням (40) і (28), маємо

$$\sigma^*_{rr}(r,0) = \begin{cases} -4AGq_0(1-\nu)F\left(1,-\dfrac{1}{2};2;r^2\right), & 0 < r \le 1, \\ -\dfrac{8AGq_0(1-\nu)}{3r^2}, & r \ge 1, \end{cases}$$

$$\sigma^*_{\varphi\varphi}(r,0) = \begin{cases} -4AGq_0(1-\nu)\left[2\sqrt{1-r^2} - F\left(1,-\dfrac{1}{2};2;r^2\right)\right], & 0 < r \le 1, \\ \dfrac{8AGq_0(1-\nu)}{3r^2}, & r \ge 1. \end{cases}$$

На рис. 3 наведено розподіл напружень $\bar{\sigma}^*_{rr} = \sigma^*_{rr}/(4AGq_0(1-\nu))$, а на рис. 4 – розподіл напружень $\bar{\sigma}^*_{\varphi\varphi} = \sigma^*_{\varphi\varphi}/(4AGq_0(1-\nu))$ на вільній межі півпростору вздовж осі Or. Радіальні напруження є стискальними, а колові міняють знак в околі межі області.

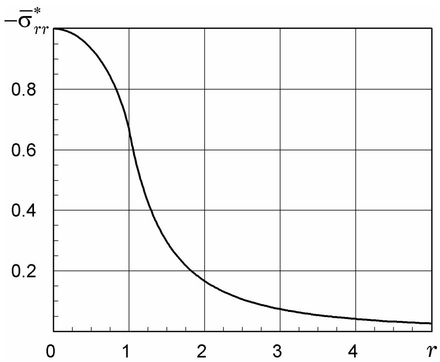

Рис. 3

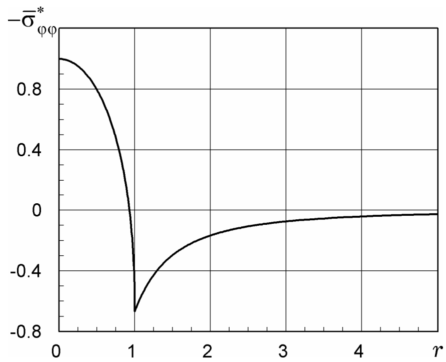

Рис. 4

На гладко закріпленій межі при $z = 0$, згідно зі співвідношеннями (39), (14) і (21) з використанням (40) і (34), маємо

$$\sigma^*_{rr}(r,0) = \begin{cases} -4AGq_0\left[\sqrt{1-r^2} + \dfrac{1}{2}F\left(1,-\dfrac{1}{2};2;r^2\right)\right], & 0 < r \le 1, \\ -\dfrac{4AGq_0}{3r^2}, & r \ge 1, \end{cases}$$

$$\sigma^*_{\varphi\varphi}(r,0) = \begin{cases} -4AGq_0\left[\sqrt{1-r^2} + \dfrac{1}{2}F\left(1,-\dfrac{1}{2};2;r^2\right)\right], & 0 < r \le 1, \\ \dfrac{4AGq_0}{3r^2}, & r \ge 1. \end{cases}$$

На рис. 5 наведено розподіл напружень $\bar{\sigma}^*_{rr} = \sigma^*_{rr}/(4AGq_0)$, а на рис. 6 – напружень $\bar{\sigma}^*_{\varphi\varphi} = \sigma^*_{\varphi\varphi}/(4AGq_0)$ на гладко закріпленій межі півпростору вздовж осі Or. На жорстко і гладко закріпленій межі напруження σ^*_{zz} пропорційні температурі, як показано на рис. 1. На гнучко закріпленій межі $u^*_r = 0$ і $\sigma^*_{zz} = 0$, а напруження σ^*_{rr} і $\sigma^*_{\varphi\varphi}$ пропорційні температурі.

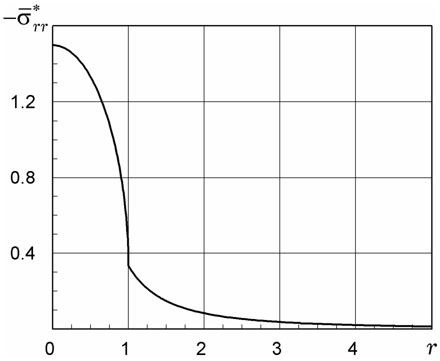

Рис. 5

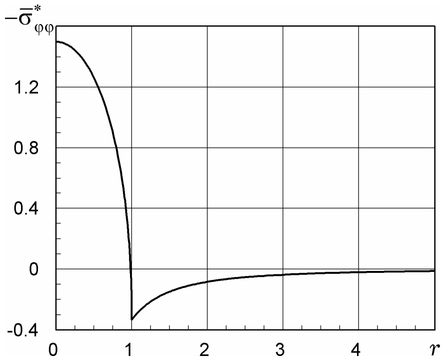

Рис. 6

Висновки. Побудовано функції Ґріна стаціонарних задач теплопровідності й термопружності для півпросторів із вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури на ній або теплоізоляції при дії диполя тепла. Із використанням потенціалів подвійного шару, термопружних потенціалів переміщень і функцій Лява записано інтегральні рівняння для визначення температури, переміщень і напружень за теплоізоляції у паралельній до межі круговій області Ці співвідношення можна використати при дослідженні напружено-деформованого стану тіл за наявності в теплоізольованій області тріщин або жорстких включень.

Розв'язок задачі теплопровідності можна використати під час розв'язування задач електростатики для півпростору із нульовим електричним потенціалом на межі або її електроізоляцією при збуренні заданої напруженості електричного поля паралельною до межі тонкою електроізольованою пластинкою. При цьому температурі відповідає електричний потенціал, а тепловому потоку – напруженість електричного поля.

1. *Галазюк В. А., Кіт Г. С.* Осесиметричний напружено-деформований стан у тілі з плоскою пеленою теплових джерел або диполів // Доп. НАН України. – 2011. – № 10. – С. 54–60.
2. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние тела с теплонепроницаемым тонким жестким дисковым включением // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вип. 6 (52). – С. 25–36.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
4. *Кіт Г. С., Андрійчук Р. М.* Термонапружений стан півпростору з вільною межею за теплоізоляції у паралельній до неї круговій області // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2017. – Вип. 3. – С. 79–82.
5. *Кіт Г. С., Галазюк В. А.* Осесиметричний напружено-деформований стан тіла з тонким жорстким дисковим теплонепроникним включенням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 3. – С. 95–109.

Те саме: *Kit H. S., Halazyuk V. A.* Axisymmetric stress-strain state of a body with thin rigid disk-shaped heat-resistant inclusion // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, No. 4. – P. 602–620. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2269-9.

6. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Вплив джерела тепла на напружений стан тіла з тепло-ізольованою круговою тріщиною // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2011. – Вип. 9. – С. 111–121.
7. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Задачі стаціонарної теплопровідності і термопружності для тіла з теплопроникним дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 150–159.
   Те саме: *Kit H. S., Sushko O. P.* Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with a heat permeable disk-shaped inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 3. – P. 309–321. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0300-3.
8. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 1. – С. 58–70.
   Те саме: *Kit H. S., Sushko O. P.* Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 561–577. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0422-7.
9. *Кіт Г., Сушко О.* Стаціонарне температурне поле у півбезмежному тілі з тепло-активним або теплоізольованим дисковим включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
10. *Кривий А. Ф., Морозов Ю. О.* Кругова міжфазна тріщина в кусково-однорідно-му трансверсально-ізотропному просторі під дією теплового потоку // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Спецвипуск. – С. 133–138.
11. *Стадник М. М.* Еліптична тріщина у просторі під дією теплового потоку на безмежності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 38–41.
    Те саме: *Stadnyk M. M.* Elliptic crack in a space under the action of a heat flow at infinity // Mater Sci. – 2010. – **46**, No. 3. – P. 325–329. https://doi.org/10.1007/s11003-010-9293-1.
12. *Стадник М. М.* Пружне еліпсоїдальне теплопровідне включення у тілі за дії теплового потоку на безмежності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 3. – С. 16–23.
    Те саме: *Stadnyk M. M.* Elastic ellipsoidal heat-conducting inclusion in a body under the action of a heat flux applied at infinity // Mater. Sci. – 2011. – **47**, No. 3. – P. 284–293. – https://doi.org/10.1007/s11003-011-9394-5.
13. *Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 2: Imperfect contact // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1983. – **50**, No. 4a. – P. 770–776. – doi:10.1115/1.3167144.
14. *Brown E. J., Erdogan F.* Thermal stresses in bonded materials containing cuts on the interface // Int. J. Eng. Sci. – 1968. – **6,** No. 9. – P. 517–529. – https://doi.org/10.1016/0020-7225(68)90003-7.
15. *Florence A. I., Goodier I. N.* The linear thermoelastic problem of uniform heat flow disturbed by a penny-shaped insulated crack // Int. J. Eng. Sci. – 1963. – **1**, No. 4. – P. 533–540. – https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90008-9.
16. *Lee K. Y., Shul C. W.* Determination of thermal stress intensity factors for an interface crack under uniform heat flow // Eng. Fract. Mech. – 1991. – **40**, No. 6. – P. 1067–1074. – https://doi.org/10.1016/0013-7944(91)90171-V.
17. *Martin-Moran C. J., Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 1: Perfect contact // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1983. – **50**, No. 1. – P. 29–36. – doi:10.1115/1.3167013.
18. *Mkhitaryan S. M., Shekyan L. A., Verlinski S. V., Aidun D., Marzocca P.* Stationary theory of heat-conductivity for an axi-symmetrical piece homogeneous space with circular inclusion // J. Therm. Stresses. – 2012. – **35**, No. 5. – P. 424–447. https://doi.org/10.1080/01495739.2012.663691.
19. *Srivastava K. N., Palaiya R. M.* The distribution of thermal stress in a semi-infinite elastic solid containing a penny-shaped crack // Int. J. Eng. Sci. – 1969. – **7**, No. 7. – P. 641–666. – https://doi.org/10.1016/0020-7225(69)90045-7.

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СВОБОДНОЙ, ЖЕСТКО, ГЛАДКО ИЛИ ГИБКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ В ОБЛАСТИ, РАЗМЕЩЕННОЙ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ К ГРАНИЦЕ ПЛОСКОСТИ

При действии теплового диполя построены функции Грина задач стационарной теплопроводности и термоупругости для полупространства со свободной, жестко, гладко или гибко закрепленной границей, на которой задана нулевая температура или теплоизоляция. При этом использованы гармонические потенциалы двойного слоя при решении задачи теплопроводности и термоупругие потенциалы перемещений в бесконечном пространстве с двумя зеркально расположенными относительно границы полупространства тепловыми диполями. Для выполнения краевых условий на границе построены бигармонические функции Лява. Приведены выражения для температуры, перемещений и напряжений, которые можно использовать при определении термоупругого состояния полупространства, вызванного возмущением заданного теплового потока параллельным к границе теплонепроницаемым тонким включением.

THERMAL STRESS STATE OF HALF-SPACE WITH A FREE, RIGIDLY, SMOOTHLY OR FLEXIBLY FASTENED BOUNDARY AT HEAT-INSULATION IN A DOMAIN LOCATED ON THE PLANE PARALLEL TO BOUNDARY

At the action of a thermal dipole, Green's functions of the stationary heat conduction and thermoelasticity problems for half-space with free, rigidly, smoothly or flexibly fastened boundary, on which zero temperature or thermal insulation is given, are constructed. The harmonic double layer potentials are used in solving the heat conduction problem and the thermoelastic displacements potentials are used in an infinite space with two mirror-like thermal dipoles relative to the half-space boundary. To satisfy the boundary conditions, the biharmonic Love functions are constructed. Expressions for temperature, displacements and stresses that can be used to determine thermoelastic state of the half-space caused by perturbation of a given heat flux by heat-proof thin inclusion parallel to the boundary of a half-space are presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.10.17