

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО
РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ**

В качестве примера применения современных методов численно-аналитического решения краевых задач для неканонических областей рассматривается краевая задача Дирихле теории потенциала в области, ограниченной параллелограммом. Простота и прозрачность процедуры построения решения этой задачи позволяет достаточно наглядно проиллюстрировать отдельные особенности некоторых современных подходов к решению задач математической физики. Для многих типов областей, включая широкий круг неканонических областей, использование понятия общего решения граничной задачи дает возможность построить численно-аналитическое решение. При этом используются хорошо известные наборы частных решений основных уравнений математической физики. Главный вопрос заключается в том, чтобы указать эффективные способы определения произвольных коэффициентов и функций, которые входят в общее решение. Использование традиционного подхода для получения численно-аналитических решений, основанного на минимизации среднеквадратических отклонений, в случае неканонических областей часто ведет к сложным выкладкам. Альтернативой этому методу служит современный метод граничных интегральных уравнений. Этим двум подходам к решению краевых задач и их сравнению посвящена работа.

Введение. Численно-аналитические решения граничных задач математической физики сыграли важную роль в развитии этого раздела математики [1, 2, 13]. Процедура получения таких решений и систематизация накопленных результатов наиболее полно представлены в энциклопедическом издании Р. М. Morse, Н. Feshbach [12].

С точки зрения решения прикладных задач аналитические решения имеют лишь один недостаток – количество таких решений существенно ограничено. В связи с этим уже довольно давно формировались подходы, позволяющие расширить количество областей, для которых можно построить эффективные и полезные с точки зрения количественной оценки характеристик физических полей решения. В качестве примеров здесь можно указать на развитие так называемого алгоритма Шварца [3, 11, 16], разработку метода Т-матриц [17], метод задачи Римана – Гильберта [9]. Такие подходы основаны на выделении в сложных областях относительно простых подобластей, для которых удается построить аналитические представления искомых функций. Последующее выполнение граничных условий, как правило, приводит к бесконечным системам алгебраических уравнений [4, 6], свойства которых позволяют использовать метод редукции. В некоторых случаях, например, в случае использования метода Т-матриц, полученные решения являются справедливыми лишь в ограниченном диапазоне изменения геометрии области. Анализ существующих работ в этой области показывает, что потенциальные возможности метода декомпозиции областей недостаточно полно используются. Во многих практических случаях удается представить неканоническую область в виде объединения нескольких канонических подобластей, например, прямоугольников, в которых решение известно. Такой численно-аналитический подход известен как метод частичных областей [5, 8, 13–15]. Особенностью реализации метода частичных областей в данном случае является то, что аналитическое решение в рассматриваемой области разыскивается в виде суммы более простых решений, представленных в виде рядов Фурье для прямоугольных областей,

¹ pouyan.shakeri@gmail.com

пересечением которых может служить и заданная область. Эффективное нахождение произвольных коэффициентов рядов, входящих в общее решение, базируется на применении разных методов (минимизации среднеквадратических отклонений, коллокаций и др.) для как можно более точного выполнения краевых условий.

Для численного решения задач теории потенциала существует достаточно много развитых методов, каждый из которых используется под конкретные свойства этих задач. В данной работе при решении задачи Дирихле для неканонической области продемонстрировано успешное использование такого современного численно-аналитического метода, как метод граничных интегральных уравнений [7]. За историю своего существования этот метод активно используется, в частности, в задачах механики (удар и погружение тел в жидкость, задача о штампе и пр.). Как правило, реализация метода граничных интегральных уравнений приводит к интегральному уравнению Фредгольма. Для задач Дирихле реализация метода граничных интегральных уравнений осложняется известными проблемами численного решения интегрального уравнения Фредгольма I-го рода и, кроме того, наличием слабой особенности ядра этого уравнения.

1. Постановка задачи. Пусть дана область Ω , ограниченная параллелограммом (рис. 1). Необходимо найти гармоническую функцию $\varphi(x, y)$ в области Ω , которая принимает на ее границе Γ заданные значения $\Phi(x, y)$ (задача Дирихле):

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \varphi(x, y) = \Phi(x, y), & (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Введем далее обозначения для заданной функции $\Phi(x, y)$ в зависимости от принадлежности граничной точки (x, y) к той или иной стороне параллелограмма. Пусть $\Gamma = \bigcup_{i=I}^{IV} \Gamma_i$, где $\Gamma_I, \Gamma_{II}, \Gamma_{III}, \Gamma_{IV}$ – стороны параллелограмма соответственно OD, BC, DC, OB . Тогда обозначим $\varphi_i(x, y) = \Phi(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma_i, i = I, II, III, IV$.

В дальнейшем в качестве тестовой рассмотрим гармоническую функцию:

$$U(x, y) = x^2 - y^2 - a'x + \frac{h}{\sin \alpha} + \cos \alpha \frac{y}{\sin \alpha} - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} xy, \quad (2)$$

где обозначено $a' = OD, h = OG, \alpha$ – угол $\angle BOD$ (рис. 1). Здесь функция $U(x, y)$ (2) подобрана так, чтобы она принимала нулевые значения в вершинах параллелограмма.

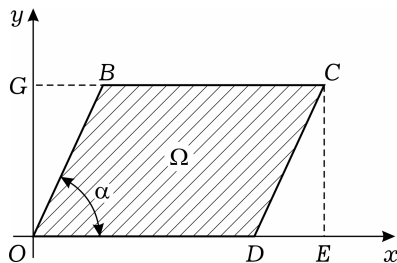


Рис. 1. Область краевой задачи.

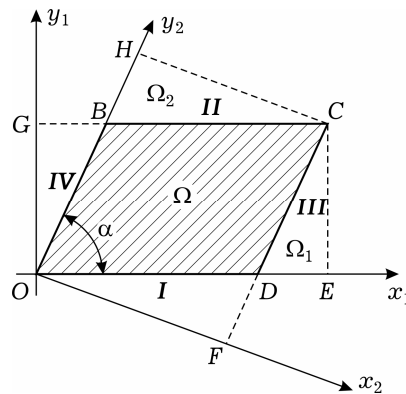


Рис. 2. Системы координат.

2. Решение методом частичных областей. Идеиные основы метода частичных областей (или метода суперпозиции) [1, 2, 5, 8, 13–15] тесно связаны с методом задачи Римана – Гильберта [9] и альтернирующим методом Неймана – Шварца [3, 11, 16]. Использование наборов частных решений для канонических областей при построении аналитических решений в неканонических областях наиболее последовательно проводится в рамках метода частичных областей. Для того чтобы сделать более ясным смысл предлагаемых обобщений, рассмотрим этот метод более подробно. Рассмотрим две системы координат (рис. 2): $(x_1, y_1) \equiv (x, y)$ и (x_2, y_2) , которые связаны такими соотношениями:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, \\ y_1 = -x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha, \\ y_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (4)$$

Введем обозначения (рис. 2): Ω_1 – область, ограниченная прямоугольником $OGCE$; Ω_2 – область, ограниченная прямоугольником $ОНCF$. Таким образом, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Пусть a, b, a', b', h, L – длины отрезков OF, OH, OD, OB, OG, OE соответственно. Очевидно, что $a = a' \sin \alpha$, $b = b' + DF = b' + a' \cos \alpha$, $h = b' \sin \alpha$ и множество точек компонент границы Γ можно описать так:

$$\Gamma_I : \quad y_1 = 0, \quad x_1 \in [0, a'], \quad (5)$$

$$\Gamma_{II} : \quad y_1 = h, \quad x_1 \in [b' \cos \alpha, a' + b' \cos \alpha], \quad (6)$$

$$\Gamma_{III} : \quad x_2 = a, \quad y_2 \in [a' \cos \alpha, b' + a' \cos \alpha], \quad (7)$$

$$\Gamma_{IV} : \quad x_2 = 0, \quad y_2 \in [0, b']. \quad (8)$$

Тестовая функция (2) в системах координат (3), (4) примет вид

$$U(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1)) = U_1(x_1, y_1) = x_1^2 - y_1^2 + c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 x_1 y_1, \quad (9)$$

где $c_1 = -a'$, $c_2 = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{(b' + a' \cos \alpha)}{\sin \alpha}$, $c_3 = -2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$,

$$U(x(x_2, y_2), y(x_2, y_2)) = U_2(x_2, y_2) = x_2^2 - y_2^2 + c'_1 x_2 + c'_2 y_2 + c'_3 x_2 y_2, \quad (10)$$

где $c'_1 = \frac{-(a' + b' \cos \alpha)}{\sin \alpha}$, $c'_2 = -b'$, $c'_3 = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Запишем попутно граничные значения тестовой функции в системах координат (3), (4):

$$\varphi_I(x_1) \equiv U_1(x_1, y_1) \Big|_{y_1=0} = x_1^2 - a' x_1, \quad x_1 \in [0, a'], \quad (11)$$

$$\varphi_{II}(x_1) \equiv U_1(x_1, y_1) \Big|_{y_1=h} = x_1^2 - (a' + 2b' \cos \alpha)x_1 + b' \cos \alpha(a' + b' \cos \alpha), \\ x_1 \in [b' \cos \alpha, a' + b' \cos \alpha], \quad (12)$$

$$\varphi_{III}(y_2) \equiv U_2(x_2, y_2) \Big|_{x_2=a} = -y_2^2 + (2a' \cos \alpha + b')y_2 - (a' \cos \alpha + b')a' \cos \alpha, \\ y_2 \in [a' \cos \alpha, b' + a' \cos \alpha], \quad (13)$$

$$\varphi_{IV}(y_2) \equiv U_2(x_2, y_2) \Big|_{x_2=0} = y_2^2 + b' y_2, \quad y_2 \in [0, b']. \quad (14)$$

В соответствии с методом частичных областей, искомую функцию $\varphi(x, y)$ представим суммой решений задач Дирихле $\varphi_1(x_1, y_1)$ в прямоугольной области Ω_1 , а $\varphi_2(x_2, y_2)$ – в прямоугольной области Ω_2 :

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x_1, y_1) + \varphi_2(x_2, y_2), \quad (15)$$

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x \sin \alpha - y \cos \alpha, \\ y_2 = x \cos \alpha + y \sin \alpha. \end{cases} \quad (16)$$

При этом будем использовать произвольность при выборе граничных условий для функций φ_1 и φ_2 на отдельных границах областей Ω_1 и Ω_2 . Таким приемом известен и метод Шварца – Неймана [3, 11, 16]. Так, будем требовать нулевых значений для функций φ_1 и φ_2 на отрезках DE , GB , BH и DF .

Обозначая

$$\bar{\varphi}_1(x_2, y_2) = \varphi_1(x_1(x_2, y_2), y_1(x_2, y_2)), \quad (17)$$

$$\bar{\varphi}_2(x_1, y_1) = \varphi_2(x_2(x_1, y_1), y_2(x_1, y_1)), \quad (18)$$

сформулируем граничные условия для суммы функций (15):

$$\varphi_1(x_1, 0) + \bar{\varphi}_2(x_1, 0) = \begin{cases} \varphi_I(x_1), & 0 < x_1 < a', \\ 0, & a' < x_1 < L, \end{cases} \quad (19)$$

$$\varphi_1(x_1, h) + \bar{\varphi}_2(x_1, h) = \begin{cases} \varphi_{II}(x_1), & b' \cos \alpha < x_1 < a' + b' \cos \alpha, \\ 0, & 0 < x_1 < b' \cos \alpha, \end{cases} \quad (20)$$

$$\bar{\varphi}_1(a, y_2) + \varphi_2(a, y_2) = \begin{cases} \varphi_{III}(y_2), & a' \cos \alpha < y_2 < b' + a' \cos \alpha, \\ 0, & 0 < y_2 < a' \cos \alpha, \end{cases} \quad (21)$$

$$\bar{\varphi}_1(0, y_2) + \varphi_2(0, y_2) = \begin{cases} \varphi_{IV}(y_2), & 0 < y_2 < b', \\ 0, & b' < y_2 < b. \end{cases} \quad (22)$$

Вид областей Ω_1 и Ω_2 позволяет представить решения бесконечными рядами:

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y_1) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right), \quad (23)$$

$$\varphi_2(x_2, y_2) = \sum_{p=1}^{\infty} D_p(x_2) \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right). \quad (24)$$

Требования гармоничности функций $\varphi_1(x_1, y_1)$ приводят к следующей системе уравнений относительно функций $A_n(y_1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 A_n(y_1)}{dy_1^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(y_1) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) = 0 \quad (25)$$

Поскольку $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) \neq 0$, то из (23) для определения $A_n(y_1)$ получаем такую систему обыкновенных однородных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 A_n(y_1)}{dy_1^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(y_1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Решение системы (26) запишем как

$$A_n(y_1) = A_n^{(1)} e^{\frac{-n\pi}{L} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{L} (y_1 - h)}. \quad (27)$$

Теперь решение (23) принимает вид

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{(1)} e^{-\frac{n\pi}{L} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{L} (y_1 - h)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right). \quad (28)$$

Аналогичным образом находим $\varphi_2(x_2, y_2)$:

$$\varphi_2(x_2, y_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(D_p^{(1)} e^{-\frac{p\pi}{b} x_2} + D_p^{(2)} e^{\frac{p\pi}{b} (x_2 - a)} \right) \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right). \quad (29)$$

С учетом (28) и (29) искомое решение (15) запишем так:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{(1)} e^{-\frac{n\pi}{L} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{L} (y_1 - h)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \left(D_p^{(1)} e^{-\frac{p\pi}{b} x_2} + D_p^{(2)} e^{\frac{p\pi}{b} (x_2 - a)} \right) \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right), \end{aligned} \quad (30)$$

где координаты связаны зависимостями (16).

Определение констант $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $D_p^{(1)}$, $D_p^{(2)}$ в (30) осуществляем методом минимизации среднеквадратических отклонений [10, 18]. В качестве проекционных систем функций на границах Γ_I и Γ_{II} выбираем систему $\{\sin(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1)\}$, $\tilde{n} = 1, 2, \dots$, а на границах Γ_{III} и Γ_{IV} – систему $\{\sin(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2)\}$, $\tilde{p} = 1, 2, \dots$

Граничные условия задаем на границах областей Ω_1 и Ω_2 (см. рис. 2), которые включают в себя стороны параллелограмма. С учетом редукции бесконечных рядов (23) и (24) до конечных с количеством их членов N и P соответственно, а также соответствующим выбором количества проекционных функций получим систему $(2N + 2P)$ линейных алгебраических уравнений относительно $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $n = 1, \dots, N$, и $D_p^{(1)}$, $D_p^{(2)}$, $p = 1, \dots, P$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \{A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^I + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^I\} + \sum_{p=1}^P \{D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^I + D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^I\} &= \varphi_{\tilde{n}}^I, \quad \tilde{n} = 1, \dots, N, \\ \sum_{n=1}^N \{A_n^{(1)} a_{1n\tilde{n}}^{II} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{n}}^{II}\} + \sum_{p=1}^P \{D_p^{(1)} d_{1p\tilde{n}}^{II} + D_p^{(2)} d_{2p\tilde{n}}^{II}\} &= \varphi_{\tilde{n}}^{II}, \quad \tilde{n} = 1, \dots, N, \\ \sum_{n=1}^N \{A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{III} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{III}\} + \sum_{p=1}^P \{D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{III} + D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{III}\} &= \varphi_{\tilde{p}}^{III}, \quad \tilde{p} = 1, \dots, P, \\ \sum_{n=1}^N \{A_n^{(1)} a_{1n\tilde{p}}^{IV} + A_n^{(2)} a_{2n\tilde{p}}^{IV}\} + \sum_{p=1}^P \{D_p^{(1)} d_{1p\tilde{p}}^{IV} + D_p^{(2)} d_{2p\tilde{p}}^{IV}\} &= \varphi_{\tilde{p}}^{IV}, \quad \tilde{p} = 1, \dots, P, \end{aligned} \quad (31)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} a_{1n\tilde{n}}^I &= \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) dx_1, \\ a_{2n\tilde{n}}^I &= \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) e^{\frac{n\pi}{L}(-h)} dx_1, \\ d_{1p\tilde{p}}^I &= \int_0^{a'} \sin\left(\frac{p\pi}{b} x_1 \cdot \cos \alpha\right) \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{L} x_1\right) e^{-\frac{p\pi}{b} x_1 \sin \alpha} dx_1, \end{aligned}$$

$$d_{2p\tilde{n}}^I = \int_0^{a'} \sin\left(\frac{p\pi}{b} x_1 \cdot \cos \alpha\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) e^{\frac{p\pi}{b}(x_1 \sin \alpha - a)} dx_1,$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^I = \int_0^{a'} (x_1^2 - a' x_1) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) dx_1; \quad (32)$$

$$d_{1n\tilde{n}}^{II} = \int_0^{a'+b'\cos\alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) e^{\frac{-n\pi}{L}h} dx_1 = \frac{L}{2} \cdot e^{\frac{-n\pi}{L}h} \cdot \delta_{n\tilde{n}},$$

$$d_{2n\tilde{n}}^{II} = \int_0^{a'+b'\cos\alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) dx_1 = \frac{L}{2} \delta_{n\tilde{n}},$$

$$d_{1p\tilde{n}}^{II} = \int_{b'\cos\alpha}^{a'+b'\cos\alpha} \sin\left(\frac{p\pi}{b}(x_1 \cdot \cos \alpha + h \sin \alpha)\right) e^{\frac{-p\pi}{b}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha)} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) dx_1,$$

$$d_{2p\tilde{n}}^{II} = \int_{b'\cos\alpha}^{a'+b'\cos\alpha} \sin\left(\frac{p\pi}{b}(x_1 \cdot \cos \alpha + h \sin \alpha)\right) e^{\frac{p\pi}{b}(x_1 \sin \alpha - h \cos \alpha - a)} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) dx_1,$$

$$\varphi_{\tilde{n}}^{II} = \int_{b'\cos\alpha}^{a'+b'\cos\alpha} (x_1^2 - (a' + 2b'\cos\alpha)x_1 + b'\cos\alpha(a' + b'\cos\alpha)) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x_1\right) dx_1; \quad (33)$$

$$d_{1n\tilde{p}}^{III} = \int_{a'\cos\alpha}^{b'+a'\cos\alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{L}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha)\right) e^{\frac{-n\pi}{L}(-a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha)} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2,$$

$$d_{2n\tilde{p}}^{III} = \int_{a'\cos\alpha}^{b'+a'\cos\alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{L}(a \sin \alpha + y_2 \cos \alpha)\right) e^{\frac{n\pi}{L}(-a \cos \alpha + y_2 \sin \alpha - h)} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2,$$

$$d_{1p\tilde{p}}^{III} = \int_0^{b'+a'\cos\alpha} \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right) e^{\frac{-p\pi}{b}x_2} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2,$$

$$d_{2p\tilde{p}}^{III} = \int_0^{b'+a'\cos\alpha} \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right) e^{\frac{p\pi}{b}(x_2 - a)} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2,$$

$$\varphi_{\tilde{p}}^{III} = \int_{a'\cos\alpha}^{b'+a'\cos\alpha} (-y_2^2 + (2a'\cos\alpha + b')y_2 - (a'\cos\alpha + b')a'\cos\alpha) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2; \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
a_{1n\tilde{p}}^{IV} &= \int_0^{b'} \sin\left(\frac{n\pi}{L} y_2 \cos \alpha\right) e^{\frac{-n\pi}{L} y_2 \sin \alpha} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2, \\
a_{2n\tilde{p}}^{IV} &= \int_0^{b'} \sin\left(\frac{n\pi}{L} y_2 \cos \alpha\right) e^{\frac{n\pi}{L}(y_2 \sin \alpha - h)} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2, \\
d_{1p\tilde{p}}^{IV} &= \int_0^b \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right) \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2, \\
d_{2p\tilde{p}}^{IV} &= \int_0^b \sin\left(\frac{p\pi}{b} y_2\right) e^{\frac{-p\pi}{b} a} \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2, \\
\varphi_{\tilde{p}}^{IV} &= \int_0^{b'} (y_2^2 - b' y_2) \sin\left(\frac{\tilde{p}\pi}{b} y_2\right) dy_2. \tag{35}
\end{aligned}$$

Численная реализация предложенного метода произведена в системе Wolfram Mathematica при $N = P = 40$. На рис. 3 показаны значения функций $\varphi(x, y)$ на границе Γ_I . Аналогичное поведение этой функции получено и на других границах (здесь не приводится). Погрешности метода приведены на рис. 4. Видим, что полученное решение в окрестности угловых точек параллелограмма имеет наибольшую осциллируемую погрешность. Аналогично выглядят и другие погрешности (рис. 5–рис. 7).

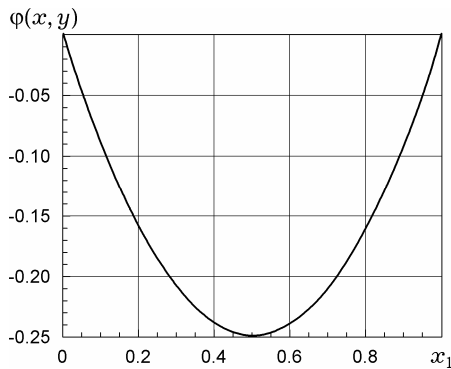


Рис. 3. Граничное значение решения на границе Γ_I , полученное методом минимизации среднеквадратических отклонений.

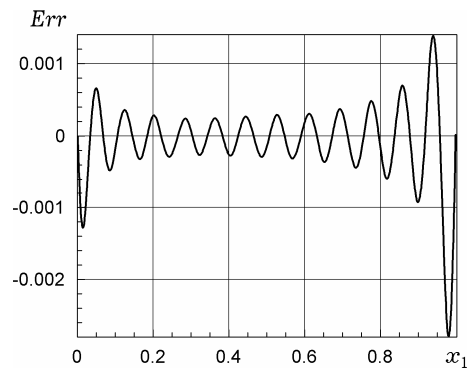


Рис. 4. Ошибка при удовлетворении граничных условий на границе Γ_I .

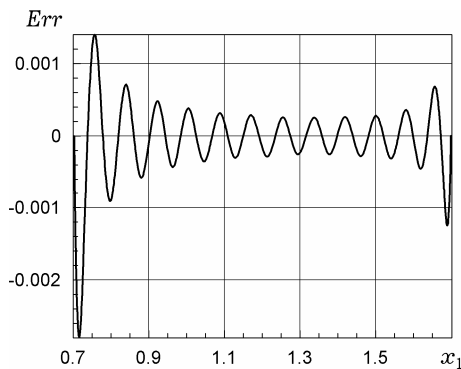


Рис. 5. Ошибка при удовлетворении граничных условий на границе Γ_{II} .

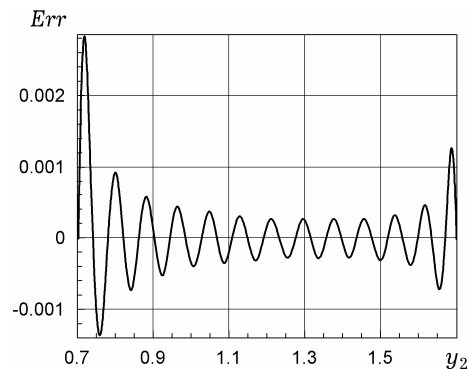


Рис. 6. Ошибка при удовлетворении граничных условий на границе Γ_{III} .

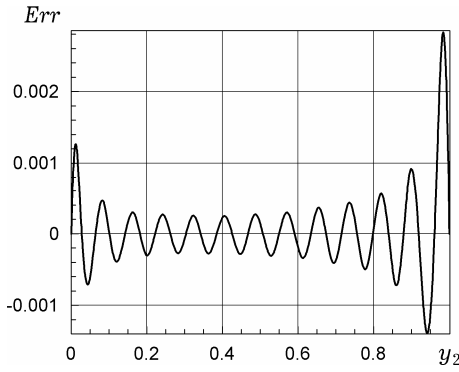


Рис. 7. Ошибка при удовлетворении граничных условий на границе Γ_{IV} .

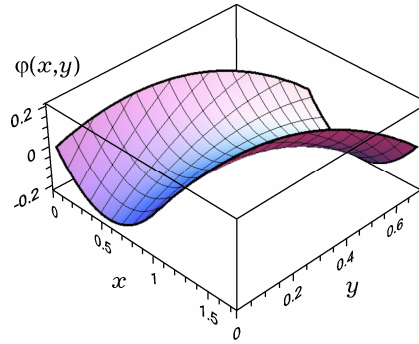


Рис. 8. Решение, полученное методом минимизации среднеквадратических отклонений в исследуемой области.

Решение краевой задачи Дирихле для гармонической функции показано на рис. 8. Как видно, это решение имеет максимальные и минимальные значения, расположенные на границах. Этот факт соответствует граничной теореме о поведении гармонических функций.

3. Решение методом граничных интегральных уравнений. Согласно методу граничных интегральных уравнений сначала получают и численно решают граничные интегральные уравнения на границе Γ области, а затем, когда на Γ становятся известны функции φ и $d\varphi/d\mathbf{n}$, в области Ω квадратурами осуществляется окончательное восстановление гармонической функции $\varphi(x, y)$ (\mathbf{n} – внешняя нормаль границы Γ).

Прежде всего, будем задавать границу Γ области Ω в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = p(t), \\ y = q(t), \end{cases} \quad t \in [0, T]. \quad (36)$$

Обозначим производные правых частей в (36) символом « \cdot » над именем функции. Введем функцию $\lambda(t) = \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}$. В качестве параметра t можем выбрать длину дуги границы Γ . Как известно из дифференциальной геометрии, в этом случае $\lambda(t) = 1$. Во всяком случае, $\lambda(t) \neq 0$.

Договоримся обход области Ω осуществлять против часовой стрелки, т. е. так, чтобы область Ω оставалась слева. Обозначим через \mathbf{s} единичный вектор дуги в направлении обхода области Ω по границе Γ . Известно из дифференциальной геометрии, что координаты этой нормали можно вычислить по правилу:

$$\mathbf{n} = (\dot{q}(t), -\dot{p}(t)) \frac{1}{\lambda(t)}. \quad (37)$$

Параметрическое задание (36) границы Γ позволяет найти на ней $d\varphi/d\mathbf{n}$ – производную функции $\varphi(x, y)$ по нормали \mathbf{n} : из определения производной имеем $d\varphi/d\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \text{grad}\varphi$, и с учетом (37), а также определения оператора $\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ получим

$$\frac{d\varphi}{dn} = (\dot{q}(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{p}(t) \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \frac{1}{\lambda(t)}, \quad (x, y) \in \partial D. \quad (38)$$

Граничные интегральные уравнения для задачи Дирихле можем получить путем использования тождества Грина относительно функции $\varphi(x, y)$ – **вариант А**, или относительно дополнительно введенной гармонической функции $\psi(x, y)$, сопряженной к $\varphi(x, y)$, – **вариант Б**.

Вариант А.

Запишем тождество Грина для функции $\varphi(x, y)$:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) - \varphi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma = \omega(P) \varphi(P), \quad P \in \Gamma, \quad (39)$$

где обозначено $\chi(P, Q) = \ln \frac{1}{r(P, Q)}$, $\rho(P, Q) = \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r(P, Q)}$, $d\sigma$ – элемент дуги границы интегрирования, $r(P, Q)$ – расстояние между точками P и Q , $\omega(P)$ – телесный угол, под которым видно область Ω из точки $P(x, y)$ (для гладких кривых $\omega(P) = \pi$). Используя краевое условие (1), заменим в (39) значения функции $\varphi(x, y)$ заданными значениями $\Phi(x, y)$:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{d\Phi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) - \Phi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma = \omega(P) \Phi(P), \quad P \in \Gamma. \quad (40)$$

Отсюда, собирая члены уравнений с искомыми функциями в левой части, а остальные – в правой, получим интегральное уравнение Фредгольма I-го рода относительно производной $\frac{d\varphi}{dn}$:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) \right] \lambda(\tau) d\tau = F(P), \quad P \in \Gamma, \quad (41)$$

где обозначено $F(P) = \omega(P) \Phi(P) + \int_{\Gamma} [\Phi(Q) \rho(P, Q)] d\sigma$, $P \in \Gamma$.

Решение интегрального уравнения Фредгольма I-го рода (41) осуществляется путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с пред- или пострегуляризацией. Найденные на Γ числовые значения производной $\frac{d\varphi}{dn}$ вместе с заданной функцией $\varphi(x, y) = \Phi(x, y)$ создают возможность восстановления гармонической функции $\varphi(x, y)$ в области Ω квадратурами тождества Грина:

$$\varphi(x, y) = 2\pi \int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) - \varphi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma, \quad P \in \Omega. \quad (42)$$

Вариант Б.

Запишем тождество Грина для дополнительно введенной функции $\psi(x, y)$, которая сопряжена к искомой:

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{d\psi(Q)}{dn_Q} \chi(P, Q) - \psi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma = \omega(P) \psi(P), \quad P \in \Gamma, \quad (43)$$

где использованы обозначения тождества (36). Используя условия Коши – Римана $\frac{d\psi}{dn} = -\frac{d\varphi}{ds}$ и краевое условие (1), имеем $\frac{d\psi}{dn} = -\frac{d\Phi}{ds}$. Теперь (43) запишется так:

$$\int_{\Gamma} \left[-\frac{d\Phi(Q)}{ds_Q} \chi(P, Q) - \psi(Q) \rho(P, Q) \right] d\sigma = \omega(P) \psi(P), \quad P \in \Gamma.$$

Отсюда, собирая члены уравнений с искомыми функциями в левой части, а остальные – в правой, получим интегральное уравнение Фредгольма II-го рода относительно функции $\psi(x, y)$:

$$\omega(P) \psi(P) + \int_{\Gamma} \psi(Q) \rho(P, Q) d\sigma = G(P), \quad P \in \Gamma, \quad (44)$$

где обозначено $G(P) = -\int_{\Gamma} \frac{d\Phi(Q)}{ds_Q} \chi(P, Q) d\sigma$.

Решение интегрального уравнения Фредгольма II-го рода (44) осуществляется путем сведения его к СЛАУ без регуляризации. Найденные на Γ числовые значения функции $\psi(x, y)$ дают возможность сначала найти на Γ численным дифференцированием $d\psi/ds$, а затем через условия Коши – Римана найти на ∂D производную по нормали $d\varphi/dn = d\psi/ds$. Далее восстановление в области Ω гармонической функции $\varphi(x, y)$ осуществляется квадратурами (42).

Построим алгоритм численного решения уравнений (41) – **вариант А** ((44) – **вариант Б**) на основе кусочно-постоянной аппроксимации искомых функций – метод коллокации. Разбиение границы интегрирования осуществляется или равномерно заданным количеством n промежутков или определенным образом неравномерно. Согласно методу коллокации разыскиваем приближенные значения искомых функций в срединных точках (точках коллокации) каждого отрезка разбиений $\Delta_i = [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \dots, n$, где n – количество промежутков разбиения границы на участки. Обозначим значение дуги точки коллокации через $\bar{s}_i = (s_{i-1} + s_i)/2$, $i = 1, \dots, n$, а приближенные значения искомых функций $\frac{d\varphi}{dn}$ (**вариант А**) или ψ (**вариант Б**) в этих точках – через y_i или z_i . Согласно методу коллокации эти значения искомые функции принимают в каждой точке отрезка разбиений Δ_i .

Таким образом, уравнение (41) **варианта А** преобразуется в СЛАУ

$$A\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad (45)$$

где элементы $a_{i,j}$ матрицы A и f_i свободного вектора \mathbf{f} вычисляются так:

$$a_{i,j} = \int_{\Delta_j} \chi(P, Q) d\sigma, \quad f_i = F(P), \quad P = P(\bar{s}_i), \quad Q = Q(\sigma). \quad (46)$$

Аналогично преобразуется в СЛАУ уравнение (44) **варианта Б**:

$$B\mathbf{y} = \mathbf{g}, \quad (47)$$

где элементы $b_{i,j}$ матрицы B , g_i свободного вектора \mathbf{g} вычисляются так:

$$b_{i,j} = \delta_{i,j} \omega(\bar{\sigma}_i) + \int_{\Delta_j} \rho(P, Q) d\sigma, \quad g_i = G(P), \quad (48)$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Вычисления интегралов в (46), (47) можно осуществлять с помощью простейших квадратурных формул, например средних прямоугольников. Так, для $i \neq j$ имеем

$$a_{i,j} \approx (\sigma_i - \sigma_{i-1}) \chi(\bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_j), \quad (49)$$

$$b_{i,j} = \delta_{i,j} \omega(\bar{\sigma}_i) + (\sigma_i - \sigma_{i-1}) \rho(\bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_j). \quad (50)$$

В случае $i = j$ функция $\chi(P, Q)$ имеет логарифмическую особенность и поэтому при вычислении $a_{i,j}$ это необходимо учитывать. Очевидно,

$$a_{i,i} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \ln \frac{1}{r(P, Q)} d\sigma \approx - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \ln |\bar{s}_i - \sigma| d\sigma. \quad (51)$$

А далее, воспользовавшись значением интеграла

$$\int \ln x dx = x \ln x - x, \quad x > 0,$$

из (51) получаем

$$\begin{aligned}
a_{i,i} &= - \int_{s_{i-1}}^{\bar{s}_i} \ln(\bar{s}_i - \sigma) d\sigma - \int_{\bar{s}_i}^{s_i} \ln(\sigma - \bar{s}_i) d\sigma = \\
&= \int_{s_{i-1}}^{\bar{s}_i} \ln(\bar{s}_i - \sigma) d(\bar{s}_i - \sigma) - \int_{\bar{s}_i}^{s_i} \ln(\sigma - \bar{s}_i) d(\sigma - \bar{s}_i) = \\
&= ((\bar{s}_i - \sigma) \ln(\bar{s}_i - \sigma) - (\bar{s}_i - \sigma)) \Big|_{s_{i-1}}^{\bar{s}_i} - \\
&\quad - ((\sigma - \bar{s}_i) \ln(\sigma - \bar{s}_i) - (\sigma - \bar{s}_i)) \Big|_{\bar{s}_i}^{s_i},
\end{aligned}$$

или после вычислений

$$\begin{aligned}
a_{i,i} &= - ((\bar{s}_i - s_{i-1}) \ln(\bar{s}_i - s_{i-1}) - (\bar{s}_i - s_{i-1})) - \\
&\quad - ((s_i - \bar{s}_i) \ln(s_i - \bar{s}_i) - (s_i - \bar{s}_i)). \tag{52}
\end{aligned}$$

В случае $i = j$ функция $\rho(P, Q) = \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r(P, Q)}$ имеет особенность типа $\frac{0}{0}$, которая устраняется предельным переходом с помощью известного правила Лопиталья. Действительно, из определения производной по нормали и координат (37) нормали \mathbf{n} имеем:

$$\rho(P, Q) = \left[\dot{q}(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{1}{r(P, Q)} - \dot{p}(\tau) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right] / \lambda(t), \tag{53}$$

где (ξ, η) – декартовы координаты точки Q .

Учитывая, что $r(P, Q) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{1}{r(P, Q)} &= \frac{(x - \xi)}{r^2(P, Q)} = \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \\
&= \frac{p(t) - p(\tau)}{(p(t) - p(\tau))^2 + (q(t) - q(\tau))^2}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r(P, Q)} = \frac{q(t) - q(\tau)}{(p(t) - p(\tau))^2 + (q(t) - q(\tau))^2}.$$

Теперь (53) с учетом двух последних соотношений запишем в виде

$$\rho(P, Q) = \frac{\dot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \dot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau))}{[(p(t) - p(\tau))^2 + (q(t) - q(\tau))^2] \lambda(t)}. \tag{54}$$

Из анализа формулы (54) можно сделать важный вывод: на прямых линиях $\rho(P, Q) = 0$. Действительно, в том случае, когда точки P, Q принадлежат одной и той же прямой, можно записать $p(t) = k_p t$, $q(t) = k_q t$ (k_p, k_q – константы). Подставляя эти равенства в (54), получим

$$\rho(P, Q) = \frac{k_q k_p (t - \tau) - k_p k_q (t - \tau)}{(k_p^2 (t - \tau)^2 + k_q^2 (t - \tau)^2) \lambda(t)}$$

и после сокращения на $(t - \tau)$ придем к сделанному выше выводу.

Необходимо подчеркнуть, что вычислять по формуле (54) можно непосредственно для $Q \neq P$, или, иначе, для $\tau \neq t$. При $Q \rightarrow P$, или, иначе, при

$\tau \rightarrow t$ в (54) возникает неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности применим метод Лопиталя:

$$\begin{aligned}\lim_{Q \rightarrow P} \rho(P, Q) &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial(\dot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \dot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau))) / \partial \tau}{\partial((p(t) - p(\tau))^2 + (q(t) - q(\tau))^2) / \partial \tau} \frac{1}{\lambda(t)} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\ddot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \dot{q}(\tau)\dot{p}(\tau) - \ddot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau)) + \dot{p}(\tau)\dot{q}(\tau)}{2(\dot{p}(\tau)(p(t) - p(\tau)) + \dot{q}(\tau)(q(t) - q(\tau)))} \frac{1}{\lambda(t)} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\ddot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \ddot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau))}{2(\dot{p}(\tau)(p(t) - p(\tau)) + \dot{q}(\tau)(q(t) - q(\tau)))} \frac{1}{\lambda(t)}.\end{aligned}$$

Очевидно, что необходимо применить метод Лопиталя еще раз:

$$\begin{aligned}\lim_{Q \rightarrow P} \rho(P, Q) &= \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial(\ddot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \ddot{p}(\tau)(q(t) - q(\tau))) / \partial \tau}{\partial(\dot{p}(\tau)(p(t) - p(\tau)) + \dot{q}(\tau)(q(t) - q(\tau))) / \partial \tau} \frac{1}{\lambda(t)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\dddot{q}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \ddot{q}(\tau)\dot{p}(\tau) - \ddot{p}(\tau)\dot{q}(\tau) + \dot{p}(\tau)\dot{q}(\tau)}{\ddot{p}(\tau)(p(t) - p(\tau)) - \dot{p}^2(\tau) + \ddot{q}(\tau)(q(t) - q(\tau)) - \dot{q}(\tau)^2} \frac{1}{\lambda(t)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ddot{p}(t)\dot{q}(t) - \ddot{q}(t)\dot{p}(t)}{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)} \frac{1}{\lambda(t)}.\end{aligned}$$

Таким образом, пришли к искомой формуле:

$$\rho(P, P) = \frac{1}{2\lambda^3(t)} (\ddot{p}(t)\dot{q}(t) - \ddot{q}(t)\dot{p}(t)). \quad (55)$$

С решением СЛАУ (42) (или (44)) становятся известными все искомые функции на границе Γ области Ω . Окончательное восстановление гармонической функции $\varphi(x, y)$ в области Ω осуществляется (при необходимости!) квадратурами (39).

4. Пример расчетов методом граничных интегральных уравнений. В качестве области Ω выберем внутренность параллелограмма (рис. 1). В качестве параметра t границы Γ выберем длину дуги s , которая отсчитывается от точки O вдоль границы Γ так, чтобы область Ω оставалась слева. Угол между сторонами OD и OB будем считать острым и обозначим его через α . Высоту CE параллелограмма обозначим через h . Не уменьшая общности, будем считать длины сторон OD и BC равными единице. Длину боковой стороны DC обозначим через $c = h / \sin \alpha$. Длину границы Γ обозначим через $S = 2 + 2c$. В этом случае граница Γ в параметрическом виде запишется так:

$$\begin{aligned}\text{сторона } OD: & \quad \begin{cases} p = s, \\ q = 0, \end{cases} & s \in [0, 1], \\ \text{сторона } DC: & \quad \begin{cases} p = (s - 1) \cos \alpha + 1, \\ q = (s - 1) \sin \alpha, \end{cases} & s \in [1, 1 + c], \\ \text{сторона } BC: & \quad \begin{cases} p = 2 + c(1 + \cos \alpha) - s, \\ q = h, \end{cases} & s \in [1 + c, 2 + c], \\ \text{сторона } OB: & \quad \begin{cases} p = (2 + 2c - s) \cos \alpha, \\ q = (2 + 2c - s) \sin \alpha, \end{cases} & [2 + c, S].\end{aligned}$$

В качестве тестовой выбрана гармоническая функция (36):

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - x + \frac{c + \cos \alpha}{\sin \alpha} y - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} xy.$$

Используя (4) для $\varphi = u$, получим такую тестируемую производную по нормали:

$$\frac{du}{dn} = \dot{q}(s)(2p(s) - 1 - 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} q(s)) + \dot{p}(s)(2q(s) - \frac{c + \cos \alpha}{\sin \alpha} + 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} p(s)),$$

где $s \in [0, S]$.

Регуляризация СЛАУ (45) **варианта А** приводит к системе уравнений

$$(A^T A + \varepsilon E) \mathbf{y} = A^T \mathbf{f}, \quad (56)$$

где A^T – трансформированная к A матрица, ε – параметр регуляризации.

Расчеты производились для различного количества n участков равномерного разбиения границы с выбором оптимального значения параметра регуляризации $\varepsilon > 0$ (при $\varepsilon = 0$ – расчет без регуляризации непосредственно СЛАУ (45)). Погрешность расчетов существенно зависит от выбора параметра ε регуляризации СЛАУ. Так, для параллелограмма $\alpha = \pi/4$, $h = \sqrt{2}$ при $n = 16$ (разбиение по 4 участка на каждой стороне параллелограмма) расчеты нормальной производной $d\varphi/dn$ без регуляризации приводят до 50% относительной погрешности δ в равномерной норме. Результаты расчета существенно улучшаются при регуляризации СЛАУ. Так, при $\varepsilon = 0.01$ относительная погрешность δ уменьшается до 14%. Следует отметить, что этот относительно высокий уровень погрешности – локальный: именно в окрестности вершин параллелограмма. С изменением простейшей модели расчета в сторону ее усложнения (увеличение участков разбиения, неравномерность разбиения, нелинейная аппроксимация искомой функции и т. п.) погрешность δ существенно снижается до требуемых значений. В табл. 1, 2 приведены некоторые данные расчетов.

Таблица 1. Расчет $d\varphi/dn$ на границе параллелограмма.

s	$d\varphi/dn$	$\approx \varphi d\varphi/dn$		s	$d\varphi/dn$	$\approx \varphi d\varphi/dn$	
		$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.01$			$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.01$
		$\delta = 47\%$	$\delta = 14\%$			$\delta = 47\%$	$\delta = 14\%$
0.125	-2.1642	-3.1841	-2.4737	2.125	-2.1642	-3.1841	-2.4737
0.375	-1.6642	-1.6823	-1.7048	2.375	-1.6642	-1.6823	-1.7048
0.625	-1.1642	-1.2017	-1.2022	2.625	-1.1642	-1.2017	-1.2022
0.875	-0.6642	-0.6811	-0.6623	2.875	-0.6642	-0.6811	-0.6623
1.125	0.6642	0.6811	0.6623	3.125	0.6642	0.6811	0.6623
1.375	1.1642	1.2017	1.2022	3.375	1.1642	1.2017	1.2022
1.625	1.6642	1.6823	1.7048	3.625	1.6642	1.6823	1.7048
1.875	2.1642	3.1841	2.4737	3.875	2.1642	3.1841	2.4737

Таблица 2. Расчет φ в области параллелограмма.

x	y	$\approx \varphi$	φ	x	y	$\approx \varphi$	φ
0.2134	0.0884	0.0000	0.0000	0.5669	0.4419	0.1140	0.1250
0.4634	0.0884	-0.1064	-0.1250	0.8169	0.4419	0.0000	0.0000
0.7134	0.0884	-0.1140	-0.1250	1.0669	0.4419	0.0000	0.0000
0.9634	0.0884	0.0000	0.0000	1.3169	0.4419	0.1064	0.1250
0.3902	0.2652	0.1064	0.1250	0.7437	0.6187	0.0000	0.0000
0.6402	0.2652	0.0000	0.0000	0.9937	0.6187	-0.1140	-0.1250
0.8902	0.2652	0.0000	0.0000	1.2437	0.6187	-0.1064	-0.1250
1.1402	0.2652	0.1140	0.1250	1.4937	0.6187	0.0000	0.0000

Выводы. В работе сравниваются различные методы решения задачи Дирихле для области, ограниченной параллелограммом: метод частичных областей и метод граничных интегральных уравнений. При решении методом частичных областей использован метод минимизации среднеквадратических отклонений, который имеет известное положительное свойство: для

линейных задач уравнение взвешенных невязок имеет симметричную либо блочно-диагональную матрицу с преобладающей диагональю. В рассмотренном примере интегрирование удалось выполнить аналитически, и ошибка, по сути, определялась погрешностью решения системы линейных уравнений. Результаты работы могут быть применены при реализации метода частичных областей для решения линейных граничных задач математической физики в сложных областях. Вычислительные эксперименты продемонстрировали достаточно быструю сходимость численно-аналитического решения к точному. Например, решение методом частичных областей при количестве членов ряда $N = P = 5$ приводит к погрешности решения, равной 0.5%, а при $N = P = 40$ – 0.01%. Численные расчеты задачи Дирихле для гармонической функции выполнены для наипростейших алгоритмов метода граничных интегральных уравнений. Результаты вычислений сравнивались с тестовым решением. Разработанная алгоритмическая программа была использована для осуществления численного эксперимента относительно выбора таких параметров: n – количество промежутков разбиения и ε – параметр регуляризации СЛАУ. Так, для $n = 16$ и $\varepsilon = 0.01$ достигнута погрешность решения, равная 14%.

При сравнении двух методов расчета задачи Дирихле для сложной области оказалось, что метод частичных областей дает результаты точнее, чем метод граничных интегральных уравнений в простейшей его реализации.

1. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1950. – 697 с.
То же: *Kantorovich L. V., Krylov V. I.* Approximate methods of higher analysis. – New York: Intersci. Publ., 1958. – xii+681 p.
4. *Коялович Б. М.* Исследования о бесконечных системах линейных уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1930. – 3. – С. 41–167.
5. *Mumtra P., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. – Москва: Мир, 1974. – 327 с.
То же: *Mitra R., Lee S. W.* Analytical techniques in the theory of guided waves. – New York: Macmillan, 1971. – 303 p.
6. *Папков С. О.* Бесконечные системы линейных уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы // Динам. системы. – 2010. – Вып. 28. – С. 89–98.
7. *Попов В. В.* Методы обчислень: Конспект лекцій для студентів мех.-мат. факультету. – Київ: Вид.-поліграф. центр «Київ. ун-т», 2012. – 303 с.
8. *Шакері Мобаракє П., Зражевський Г. М.* Алгоритм Гальоркіна в методі частинних областей розв'язання граничних задач // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2014. – Вып. 1. – С. 75–82.
9. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана – Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1971. – 400 с.
10. *Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C.* Boundary element techniques: theory and applications in engineering. – Berlin ect.: Springer-Verlag, 1984. – xiv+464 p. – doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3. .
То же: *Бреббия К., Теллес Ж., Вробел Л.* Методы граничных элементов. – Москва: Мир, 1987. – 524 с
11. *Mathew T.* Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 2008. – xiv+770 p. – Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 61. – https://doi.org/10.1007/978-3-540-77209-5.
12. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics. – Boston: McGraw-Hill, 1999. – Part I: 997 p.; Part II: 970 p.
То же: *Морс Ф., Фешибах Г.* Методы теоретической физики: В 2 т. – Т. 1: – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – 930 с.; Т. 2: – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 896 с.

13. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V. T.* Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non-canonical domains // *Rep. Math. Phys.* – 2015. – **75**, No. 3. – P. 417–434.
 [https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(15\)30014-8](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(15)30014-8).
14. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V., Soltannia B.* Directional characteristics of cylindrical radiators with an arc-shaped acoustic screen // *J. Eng. Math.* – 2017. – **103**, No. 1. – P. 97–110. – <https://doi.org/10.1007/s10665-016-9863-9>.
15. *Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V. T., Zrazhevsky G. M.* A numerical-analytical method for solving boundary value problem of elliptical type for a parallelogram shaped plate // *Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: Фіз.-мат. науки.* – 2015. – Спецвипуск. – P. 297–304.
16. *Toselli A., Widlund O.* Domain decomposition methods – Algorithms and theory. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 2005.– xv+450 p. – DOI: 10.1007/b137868.
17. *Waterman P. C.* Matrix theory of elastic wave scattering // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1976. – **60**, No. 3. – P. 567–580. – <https://doi.org/10.1121/1.381130>.
18. *Zienkiewicz O. C., Morgan K.* Finite elements and approximation. – New York: Wiley & Sons, 1983. – 328 p.

СУЧАСНІ МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЕЙ

Як приклад застосування сучасних чисельно-аналітичних методів розв'язування крайових задач для неканонічних областей розглядається крайова задача Діріхле теорії потенціалу в області, обмеженій паралелограмом. Простота і прозорість процедури побудови розв'язку цієї задачі дозволяє достатньо наглядно проілюструвати окремі особливості деяких сучасних підходів до розв'язування задач математичної фізики. Для багатьох типів областей, включно з широким діапазоном неканонічних областей, використання поняття загального розв'язку граничної задачі дає змогу побудувати її чисельно-аналітичний розв'язок. При цьому використовуються добре відомі множини часткових розв'язків основних рівнянь математичної фізики. Головне питання полягає в тому, щоб вказати ефективні шляхи для визначення довільних коефіцієнтів і функцій, які входять у загальний розв'язок. Використання традиційного підходу для отримання чисельно-аналітичних розв'язків на основі мінімізації середньоквадратичних відхилень у випадку неканонічних областей часто веде до складних обчислень. Альтернативою цьому шляху є сучасний метод граничних інтегральних рівнянь. Цим двом підходам до розв'язування крайових задач та їх порівнянню присвячена ця робота.

MODERN METHODS OF NUMERICAL-ANALYTIC SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NON-CANONICAL DOMAINS

As example of applying modern numerical-analytic methods to solution of boundary value problems for non-canonical domains, the Dirichlet boundary value problem based on the potential theory for bounded by a parallelogram domain is considered. The simplicity and accuracy of the procedure for constructing the problem solution allows one quite clearly to illustrate some features of some modern approaches to solving problems of mathematical physics. For many types of domains including the wide range of non-canonical domains, the concept of general solution of the boundary-value problem is employed for constructing its numerical-analytic solution. In this case, the well-known sets of particular solutions of the basic equations of mathematical physics are used. The main question is to indicate effective ways of determining arbitrary coefficients and functions which are included in the general solution. In this context, the traditional approach to obtain numerical and analytical solutions based on minimizing the root-mean-square deviation is often led to complex calculations for non-canonical domains. An alternative to this method is the modern method of boundary integral equations. This paper is devoted to development of the mentioned two approaches to solving boundary value problems and their comparison.

¹ Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

² Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ,

³ Ун-т Альберты, Едмонтон, Канада

Одержано

03.12.17