

В. А. Шевчук

ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ

На основі отриманого аналітичного розв'язку одновимірної задачі термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем досліджено термонапружений стан системи.

Вступ. Під час експлуатації елементів циліндричних конструкцій з багатошаровими покриттями нестационарні температурні поля викликають значні температурні напруження, які можуть спричинити відшарування покриття та руйнування елементів конструкцій. Аналітичні розв'язки відповідних крайових задач статичної та нестационарної термопружності для циліндра обмежуються в основному випадком одношарового покриття [1, 6, 9–11, 13, 16, 21–23, 25, 27, 28, 34]. Водночас розроблено методики розрахунку теплового поля та/або температурних напружень для шаруватих циліндричних тіл з довільною кількістю шарів [2–5, 7, 12, 14, 24, 26, 29, 30, 33, 35], які можуть бути використані для дослідження термонапруженого стану циліндричних тіл з багатошаровими покриттями. Проте вони є відносно складними і не враховують можливу малість товщини покриття. Для спрощення розрахунку може бути застосовано ефективний підхід, що ґрунтується на застосуванні моделі з використанням узагальнених граничних умов термомеханічного спряження [8, 17, 19, 20, 31].

Нижче на основі отриманого в праці [18] розв'язку задачі теплопровідності для циліндра з багатошаровим покриттям знайдено розв'язок відповідної задачі термопружності та досліджено термонапружений стан системи тіло – багатошарове покриття за конвективного нагрівання зовнішнім середовищем.

1. Постановка задачі теплопровідності. Розглянемо одновимірну задачу теплопровідності для суцільного кругового циліндра радіуса R , $0 \leq r \leq R$, з n -шаровим покриттям товщини $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ за конвективного теплообміну.

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t_k}{\partial \tau} = a_k \left(\frac{\partial^2 t_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_k}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$t_k|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad k \in \{\mathbf{I}\} \cup \{1, \dots, n\}. \quad (2)$$

Як і в роботі [18], надалі індексами i , \mathbf{I} та \mathbf{II} позначаємо величини, що стосуються відповідно i -го шару покриття, тіла та зовнішнього середовища.

Приймаємо, що на межі покриття – середовище виконується теплообмін згідно з законом Ньютона:

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial r} = \mu(t_{\mathbf{II}} - t_n) \quad \text{при} \quad r = r_n = R + \delta, \quad (3)$$

на поверхнях поділу шарів покриття і покриття з тілом – умови ідеального теплового контакту:

$$t_i = t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = r_{i-1} = R + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j, \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

$$t_1 = t_{\mathbf{I}}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} = \lambda_{\mathbf{I}} \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = r_0 = R, \quad (4)$$

а на осі циліндра виконується умова симетрії

$$\frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (5)$$

Тут $t_i, t_{\mathbf{I}}, t_{\mathbf{II}}$ – температури i -го шару покриття, тіла і середовища відповідно; τ – час; δ_i – товщина i -го шару; $a_k = \lambda_k / \omega_k$, λ_k і ω_k – коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності і теплоємності, $k \in \{\mathbf{I}\} \cup \{1, \dots, n\}$; μ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття $r = R + \delta$.

2. Розв’язок задачі теплопровідності. Для розв’язування задачі використаємо підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриття на теплоперенос у системі узагальненими граничними умовами [8, 31, 32]. Тоді температуру в тілі визначають як розв’язок рівняння (1) для циліндра за початкової умови (2), умови симетрії (5) та узагальненої граничної умови, яка для цього випадку матиме вигляд [31, 32]

$$-\lambda_{\mathbf{I}} \left(1 - \frac{\delta}{R} + \frac{\mu}{H} \right) \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial r} + \mu(t_{\mathbf{II}} - t_{\mathbf{I}}) = \Omega \frac{\partial t_{\mathbf{I}}}{\partial \tau}, \quad t_{\mathbf{I}}|_{\tau=0} = t_0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad (6)$$

де $\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \delta_i$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$ – зведені теплоємність та термоопір цілого покриття. Температуру в покритті визначатимуть формули відновлення [31, 32].

Аналітичний розв’язок цієї задачі має такий вигляд [18]:

$$\theta_i(\rho, \text{Fo}) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\text{Bi}^* J_0(\rho, \alpha_j) \exp(-\alpha_j^2 \text{Fo})}{Z(\alpha_j)}, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (7)$$

$$\theta_i(\rho, \text{Fo}) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\text{Bi}^* V_i(\rho, \alpha_j) \exp(-\alpha_j^2 \text{Fo})}{Z(\alpha_j)}, \quad \rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_i, \quad (8)$$

$$i \in \{1, \dots, n\},$$

$$V_i(\rho, \alpha_j) = J_0(\alpha_j) - \lambda_{\mathbf{I}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\delta_j}{R\lambda_j} + \frac{\rho - \rho_{i-1}}{\lambda_i} \right) \alpha_j J_1(\alpha_j), \quad (9)$$

$$Z(\alpha_j) = J_0(\alpha_j) \left[(1 + 2\varepsilon)\alpha_j^2 + (\text{Bi}^* - \varepsilon\alpha_j^2)^2 \right], \quad (10)$$

де α_j – корені рівняння

$$(\text{Bi}^* - \varepsilon\alpha^2)J_0(\alpha) - \alpha J_1(\alpha) = 0. \quad (11)$$

Тут $\theta_k = \frac{t_k - t_0}{t_{\mathbf{II}} - t_0}$ – безрозмірна температура, $k \in \{\mathbf{I}\} \cup \{1, \dots, n\}$; $\rho = \frac{r}{R}$

– безрозмірна координата; $\rho_j = \frac{r_j}{R}$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$; $\text{Fo} = \frac{a_{\mathbf{I}}\tau}{R^2}$ – число Фур’є;

$\text{Bi}^* = \frac{\text{Bi}}{1 - \delta/R + \xi \text{Bi}}$; $\text{Bi} = \frac{\mu R}{\lambda_{\mathbf{I}}}$ – критерій Біо; $\varepsilon = \frac{\eta}{1 - \delta/R + \xi \text{Bi}}$; $\eta = \frac{\Omega}{\omega_{\mathbf{I}} R}$,

$\xi = \frac{H^{-1}}{R / \lambda_{\mathbf{I}}}$ – ефективні теплоємність та термоопір покриття; J_0 , J_1 – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядків.

3. Розв’язок задачі термопружності. Вважаємо, що зовнішнє навантаження відсутнє. Для визначення напруженого стану циліндра з n -шаровим

покриттям під дією деформацій, викликаних нерівномірним розподілом температурного поля під час нагрівання, використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриття на термонапружений стан в системі узагальненими граничними умовами термомеханічного спряження [19, 31].

Тоді розв'язок для напружень у циліндрі $0 \leq r \leq R$ можемо подати у вигляді [15]

$$\sigma_{rr}^{\mathbf{I}} = A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{E_{\mathbf{I}}\alpha_{\mathbf{I}}}{(1-\nu_{\mathbf{I}})r^2} \int_0^r (t_{\mathbf{I}} - t_0)\zeta d\zeta, \quad (12)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}} = A_1 - \frac{A_2}{r^2} + \frac{E_{\mathbf{I}}\alpha_{\mathbf{I}}}{(1-\nu_{\mathbf{I}})r^2} \int_0^r (t_{\mathbf{I}} - t_0)\zeta d\zeta - \frac{E_{\mathbf{I}}\alpha_{\mathbf{I}}(t_{\mathbf{I}} - t_0)}{1-\nu_{\mathbf{I}}}, \quad (13)$$

узагальнену граничну умову механічного спряження тіла з середовищем – у вигляді [19, 31]

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\nu_{\mathbf{I}}(G_{11} + G_{12})}{RE_{\mathbf{I}}}\right) \sigma_{rr}^{\mathbf{I}} \Big|_{r=R} + \frac{G_{11} - \nu_{\mathbf{I}}G_{12}}{RE_{\mathbf{I}}} \sigma_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}} \Big|_{r=R} + \frac{G_{12} - \nu_{\mathbf{I}}G_{11}}{RE_{\mathbf{I}}} \sigma_{rr}^{\mathbf{I}} \Big|_{r=R} = \\ = \frac{N_t - (G_{11} + G_{12})\alpha_{\mathbf{I}}(t_{\mathbf{I}} \Big|_{r=R} - t_0)}{R}, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\{G_{11}, G_{12}\} = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \delta_i}{1 - \nu_i^2} \{1, \nu_i\}, \quad N_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \alpha_i}{1 - \nu_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (t_i - t_0) dr,$$

а співвідношення Дюамеля – Неймана для тензора деформації в циліндрі так:

$$e_{pq}^{\mathbf{I}} = \frac{1}{E_{\mathbf{I}}} \left[(1 + \nu_{\mathbf{I}}) \sigma_{pq}^{\mathbf{I}} - \nu_{\mathbf{I}} \delta_{pq} \sigma_{\ell\ell}^{\mathbf{I}} \right] + \alpha_{\mathbf{I}} (t_{\mathbf{I}} - t_0) \delta_{pq}, \quad p, q \in \{r, \varphi, z\}. \quad (15)$$

Тут (r, φ, z) – циліндрична система координат, A_1, A_2 – невідомі константи, E_k – модуль Юнга, ν_k – коефіцієнт Пуассона, α_k – коефіцієнт лінійного температурного розширення (КЛТР) матеріалу, $k \in \{\mathbf{I}\} \cup \{1, \dots, n\}$, δ_{pq} – символ Кронекера, $\sigma_{\ell\ell}^{\mathbf{I}}$ – сума нормальних напружень.

Розглядатимемо два випадки:

(i) вільні торці циліндра:

$$\int_0^R \sigma_{zz}^{\mathbf{I}} r dr + RN_1 = 0, \quad (16')$$

(ii) закріплені торці циліндра:

$$e_{zz} \equiv 0. \quad (16'')$$

З урахуванням неперервності тангенціальних деформацій на поверхні поділу тіло – покриття, осьове зусилля N_1 в оболонці, якою моделюємо покриття, можемо подати у вигляді [19]

$$N_1 = G_{11} e_{zz}^{\mathbf{I}} \Big|_{r=R} + G_{12} \sigma_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}} \Big|_{r=R} - N_t + C_2 \sigma_{rr}^{\mathbf{I}} \Big|_{r=R}, \quad (17)$$

де

$$C_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \left(\delta_i - \frac{\gamma_i^3 - \gamma_{i-1}^3}{\delta^2} + \frac{\gamma_i^4 - \gamma_{i-1}^4}{2\delta^3} \right), \quad \gamma_j = r_j - R, \quad j \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Враховуючи умову $\sigma_{rr}^{\mathbf{I}}|_{r=0} \neq \infty$, узагальнену граничну умову (14), співвідношення Дюамеля – Неймана (15), умову (16') та співвідношення (17) для випадку (*i*), умову (16'') для випадку (*ii*), знаходимо наближений розв'язок задачі для циліндра $0 \leq \rho \leq 1$:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) = Z_1 \tilde{G}_1 \tilde{e}_{zz}(\text{Fo}) + \frac{1}{2}(Z_1 Y_1 \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) - \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo})) + Z_1 N_\theta(\text{Fo}), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) &= Z_1 \tilde{G}_1 \tilde{e}_{zz}(\text{Fo}) + \\ &+ \frac{1}{2}(Z_1 Y_1 \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) + \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) - 2\theta_{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo})) + Z_1 N_\theta(\text{Fo}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}^{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) &= (1 + 2\nu_{\mathbf{I}} Z_1 \tilde{G}_1) \tilde{e}_{zz}(\text{Fo}) + \\ &+ \nu_{\mathbf{I}} Z_1 Y_1 \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) - \theta_{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) + 2\nu_{\mathbf{I}} Z_1 N_\theta(\text{Fo}), \end{aligned} \quad (20)$$

де для випадку (*ii*)

$$\tilde{e}_{zz}(\text{Fo}) = 0, \quad (21)$$

а для випадку (*i*)

$$\tilde{e}_{zz}(\text{Fo}) = \frac{e_{zz}(1 - \nu_{\mathbf{I}})}{\alpha_{\mathbf{I}}(t_{\mathbf{II}} - t_0)} = \frac{(Y_2 - Z_2 Y_1 + \tilde{C}_2) \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) + 2(1 - Z_2) N_\theta(\text{Fo})}{1 + 2(Z_2 \tilde{G}_1 - \tilde{G}_2)}. \quad (22)$$

Тут

$$\tilde{\sigma}_{\ell\ell}^k = \sigma_{\ell\ell}^k \frac{1 - \nu_{\mathbf{I}}}{E_{\mathbf{I}} \alpha_{\mathbf{I}}(t_{\mathbf{II}} - t_0)}, \quad k \in \{\mathbf{I}\} \cup \{1, \dots, n\}, \quad \ell \in \{r, \varphi, z\},$$

– безрозмірні напруження,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) &= \frac{2}{\rho^2} \int_0^\rho \theta_{\mathbf{I}}(\xi, \text{Fo}) \xi d\xi = \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{4\text{Bi}^*}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_j^2 \text{Fo}) J_1(\rho \alpha_j)}{\alpha_j Z(\alpha_j)}, & 0 < \rho \leq 1, \\ 1 - 2\text{Bi}^* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_j^2 \text{Fo})}{Z(\alpha_j)}, & \rho = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

– безрозмірна середня температура циліндра,

$$Z_1 = \frac{1}{1 + \frac{G_{11}}{R G_{\mathbf{I}}}}, \quad Z_2 = \left(\nu_{\mathbf{I}} + \frac{G_{12}}{R G_{\mathbf{I}}} + \tilde{C}_2 \right) Z_1,$$

$$G_{\mathbf{I}} = \frac{E_{\mathbf{I}}}{1 - \nu_{\mathbf{I}} - 2\nu_{\mathbf{I}}^2}, \quad \tilde{C}_2 = \frac{C_2}{R},$$

$$N_\theta(\text{Fo}) = \frac{1 - \nu_{\mathbf{I}}}{R E_{\mathbf{I}} \alpha_{\mathbf{I}}(t_{\mathbf{II}} - t_0)} N_t = \sum_{i=1}^n \chi_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \theta_i(\rho, \text{Fo}) d\rho,$$

$$\chi_i = \left(\frac{E_i}{1 - \nu_i} \right) \cdot \left(\frac{E_{\mathbf{I}}}{1 - \nu_{\mathbf{I}}} \right)^{-1}, \quad \tilde{G}_m = \frac{\nu_{\mathbf{I}} G_{1m} - G_{1\ell}}{R E_{\mathbf{I}}}, \quad Y_m = 1 - \frac{(1 + \nu_{\mathbf{I}}) G_{1m}}{R E_{\mathbf{I}}},$$

$$m = 1, 2, \quad \ell = 3 - m.$$

Для визначення напружень у довільному шарі багат шарового покриття через граничні значення компонент тензора напружень у тілі використаємо формули відновлення [19, 31], які у випадку циліндра за відсутності зовнішнього навантаження матимуть такий вигляд:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^i(\rho, \text{Fo}) = \tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) \left[1 - \frac{3(\rho-1)^2}{(\delta/R)^2} + \frac{2(\rho-1)^3}{(\delta/R)^3} \right],$$

$$\rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^i(\rho, \text{Fo}) &= \frac{E_i}{E_{\mathbf{I}}(1-v_i^2)} \{ (1-v_i v_{\mathbf{I}}) \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) + \\ &+ (v_i - v_{\mathbf{I}}) \tilde{\sigma}_{zz}^{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) - v_{\mathbf{I}}(1+v_i) \tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) \} + \\ &+ \frac{v_i}{1-v_i} \tilde{\sigma}_{rr}^i(\rho, \text{Fo}) + \chi_i (\theta_{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \theta_i(\rho, \text{Fo})), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}^i(\rho, \text{Fo}) &= \frac{E_i}{E_{\mathbf{I}}(1-v_i^2)} \{ (1-v_i v_{\mathbf{I}}) \tilde{\sigma}_{zz}^{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) + \\ &+ (v_i - v_{\mathbf{I}}) \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) - v_{\mathbf{I}}(1+v_i) \tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) \} + \\ &+ \frac{v_i}{1-v_i} \tilde{\sigma}_{rr}^i(\rho, \text{Fo}) + \chi_i (\alpha_{\mathbf{I}} \theta_{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \theta_i(\rho, \text{Fo})). \end{aligned} \quad (25)$$

Підставляючи вирази (18)–(20) у формули відновлення (24), (25), отримуємо вирази для колових та осьових напружень в i -му шарі покриття $\rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_i$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^i(\rho, \text{Fo}) &= \chi_i \left\{ \frac{v_i - v_{\mathbf{I}} + (1-v_{\mathbf{I}} - 2v_{\mathbf{I}}^2) Z_1 \tilde{G}_1}{(1+v_i)(1-v_{\mathbf{I}})} \tilde{e}_{zz}(\text{Fo}) + \right. \\ &+ \frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} Z_1 \left[\frac{1-2v_{\mathbf{I}}}{1-v_{\mathbf{I}}} N_0(\text{Fo}) + \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) \right] - \\ &\left. - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \theta_i(\rho, \text{Fo}) \right\} + \frac{v_i}{1-v_i} \tilde{\sigma}_{rr}^i(\rho, \text{Fo}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}^i(\rho, \text{Fo}) &= \chi_i \left\{ \frac{1-v_i v_{\mathbf{I}} + (1-v_{\mathbf{I}} - 2v_{\mathbf{I}}^2) v_i Z_1 \tilde{G}_1}{(1+v_i)(1-v_{\mathbf{I}})} \tilde{e}_{zz}(\text{Fo}) + \right. \\ &+ \frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} v_i Z_1 \left[\frac{1-2v_{\mathbf{I}}}{1-v_{\mathbf{I}}} N_0(\text{Fo}) + \tilde{\theta}_{\mathbf{I}}(1, \text{Fo}) \right] - \\ &\left. - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \theta_i(\rho, \text{Fo}) \right\} + \frac{v_i}{1-v_i} \tilde{\sigma}_{rr}^i(\rho, \text{Fo}). \end{aligned} \quad (27)$$

4. Усталені напруження. В усталеному стані, коли циліндр з багат шаровим покриттям рівномірно прогрівається до температури середовища $t_{\mathbf{II}}$, формули (18)–(23), (26), (27) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}\infty} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}\infty} &= \lim_{\text{Fo} \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) = \lim_{\text{Fo} \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}}(\rho, \text{Fo}) = \\ &= Z_1 \sum_{i=1}^n \chi_i \left(\frac{v_{\mathbf{I}} - v_i}{(1-v_{\mathbf{I}})(1+v_i)} \tilde{e}_{zz}^{\infty} + \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} - \frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} \right) \frac{\delta_i}{R}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{zz}^{\mathbf{I}\infty} &= \lim_{F_0 \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_{zz}^{\mathbf{I}}(\rho, F_0) = \tilde{e}_{zz}^{\infty} + v_{\mathbf{I}} Z_1 - 1 + \\ &+ \frac{Z_1 v_{\mathbf{I}}}{1 - v_{\mathbf{I}}} \sum_{i=1}^n \chi_i \left(2 \frac{v_{\mathbf{I}} - v_i}{1 + v_i} \tilde{e}_{zz} + 2 \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} - \frac{1 + v_{\mathbf{I}}}{1 + v_i} \right) \frac{\delta_i}{R},\end{aligned}\quad (29)$$

де для випадку (*ii*)

$$\tilde{e}_{zz}^{\infty} = 0, \quad (30)$$

а для випадку (*i*)

$$\tilde{e}_{zz}^{\infty} = \lim_{F_0 \rightarrow \infty} \tilde{e}_{zz}(F_0) = \frac{Y_2 - Z_2 Y_1 + \tilde{C}_2 + 2(1 - Z_2) \sum_{i=1}^n \chi_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \frac{\delta_i}{R}}{1 + 2(Z_2 \tilde{G}_1 - \tilde{G}_2)}, \quad (31)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{i\infty}(\rho) = \lim_{F_0 \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_{rr}^i(\rho, F_0) = \tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}\infty} \left[1 - \frac{3(\rho - 1)^2}{(\delta / R)^2} + \frac{2(\rho - 1)^3}{(\delta / R)^3} \right], \quad (32)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i\infty}(\rho) &= \lim_{F_0 \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^i(\rho, F_0) = \chi_i \left\{ \frac{v_i - v_{\mathbf{I}} + (1 - v_{\mathbf{I}} - 2v_{\mathbf{I}}^2) Z_1 \tilde{G}_1}{(1 + v_i)(1 - v_{\mathbf{I}})} \tilde{e}_{zz}^{\infty} + \right. \\ &+ \left. \frac{1 + v_{\mathbf{I}}}{1 + v_i} Z_1 \left[\frac{1 - 2v_{\mathbf{I}}}{1 - v_{\mathbf{I}}} \sum_{i=1}^n \chi_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \frac{\delta_i}{R} + 1 \right] - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right\} + \\ &+ \frac{v_i}{1 - v_i} \tilde{\sigma}_{rr}^{i\infty}(\rho),\end{aligned}\quad (33)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{zz}^{i\infty}(\rho) &= \lim_{F_0 \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_{zz}^i(\rho, F_0) = \chi_i \left\{ \frac{1 - v_i v_{\mathbf{I}} + (1 - v_{\mathbf{I}} - 2v_{\mathbf{I}}^2) v_i Z_1 \tilde{G}_1}{(1 + v_i)(1 - v_{\mathbf{I}})} \tilde{e}_{zz}^{\infty} + \right. \\ &+ \left. \frac{1 + v_{\mathbf{I}}}{1 + v_i} v_i Z_1 \left[\frac{1 - 2v_{\mathbf{I}}}{1 - v_{\mathbf{I}}} \sum_{i=1}^n \chi_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \frac{\delta_i}{R} + 1 \right] - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right\} + \\ &+ \frac{v_i}{1 - v_i} \tilde{\sigma}_{rr}^{i\infty}(\rho).\end{aligned}\quad (34)$$

Для покриття з малою жорсткістю порівняно з жорсткістю тіла (наприклад, для тонких покриттів з модулями Юнга, що не перевищують істотно модуль Юнга підкладки) з формул (28)–(31) отримуємо наближені формули для усталених напружень в тілі

– для закріплених торців:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}\infty} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}\infty} \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} - \frac{1 + v_{\mathbf{I}}}{1 + v_i} \right) \chi_i \frac{\delta_i}{R}, \quad (35)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{\mathbf{I}\infty} = v_{\mathbf{I}} - 1, \quad (36)$$

– для вільних торців:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}\infty} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{\mathbf{I}\infty} \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} - 1 \right) \chi_i \frac{\delta_i}{R}, \quad (37)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{\mathbf{I}\infty} \approx 2 \sum_{i=1}^n \chi_i \left[\left(1 + \frac{v_{\mathbf{I}}^2}{1 - v_{\mathbf{I}}} \right) \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} - 1 \right] \frac{\delta_i}{R}. \quad (38)$$

Крім того, для усталених напружень в *i*-му шарі покриття з малою жорсткістю для випадку, коли КЛТР інших шарів не є істотно більшими

від КЛТР циліндра, з (33), (34) маємо наближені формули

– для закріплених торців:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i\infty}(\rho) \approx & \chi_i \left(\frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) - \sum_{j=1}^n \chi_j \left[\chi_i \frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} \frac{1-2v_{\mathbf{I}}}{1-v_{\mathbf{I}}} \left(\frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_j} - \frac{\alpha_j}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{v_i}{1-v_i} \left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) \right] \frac{\delta_j}{R}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}^{i\infty}(\rho) \approx & \chi_i \left(\frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) - \sum_{j=1}^n \chi_j \left[\chi_i \frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} \frac{1-2v_{\mathbf{I}}}{1-v_{\mathbf{I}}} v_i \left(\frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_j} - \frac{\alpha_j}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{v_i}{1-v_i} \left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) \right] \frac{\delta_j}{R}; \end{aligned} \quad (40)$$

– для вільних торців:

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{i\infty}(\rho) \approx \chi_i \left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) - \sum_{j=1}^n \chi_j \left(\chi_i \frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} \frac{1-2v_{\mathbf{I}}}{1-v_{\mathbf{I}}} + \frac{v_i}{1-v_i} \right) \left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) \frac{\delta_j}{R}, \quad (41)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{i\infty}(\rho) \approx \chi_i \left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) - v_i \sum_{j=1}^n \chi_j \left(\chi_i \frac{1+v_{\mathbf{I}}}{1+v_i} \frac{1-2v_{\mathbf{I}}}{1-v_{\mathbf{I}}} + \frac{1}{1-v_i} \right) \left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_{\mathbf{I}}} \right) \frac{\delta_j}{R}. \quad (42)$$

5. Числові результати та їх аналіз. Таким чином, формули (7), (8), (18)–(20), (23), (26), (27) дають розв’язок нестационарної задачі теплопровідності та термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям. Слід зауважити, що ефективність і достатню точність наближеного аналітичного розв’язку (7), (8) задачі теплопровідності встановлено порівнянням з точним розв’язком цієї задачі для циліндра з тришаровим покриттям у [32], а ефективність і достатню точність наближеного аналітичного розв’язку статичної задачі термопружності для випадку закріплених торців (28)–(30), (32)–(34) – у [19].

На основі отриманого розв’язку дослідимо термонапружений стан у системі тіло – багатошарове покриття за конвективного нагрівання.

Рис. 1 ілюструє зміну в часі безрозмірного контактного радіального напруження $\tilde{\sigma}_{rr}^{\mathbf{I}}(1, Fo)$, коли 1) всі КЛТР шарів покриття більші від КЛТР підкладки: $\alpha_i > \alpha_{\mathbf{I}}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, та 2) всі КЛТР шарів покриття менші від КЛТР підкладки: $\alpha_i < \alpha_{\mathbf{I}}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, залежно від способу закріплення торців циліндра (ЗТ – закріплені торці, ВТ – вільні торці) для різних співвідношень коефіцієнтів Пуассона покриття v_i та підкладки $v_{\mathbf{I}}$.

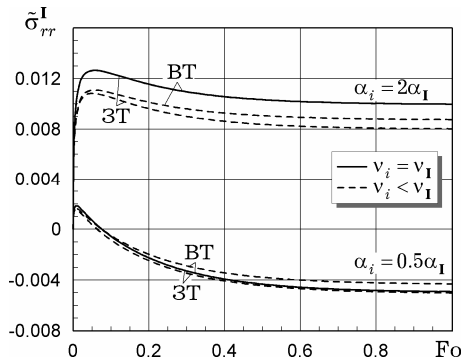


Рис. 1

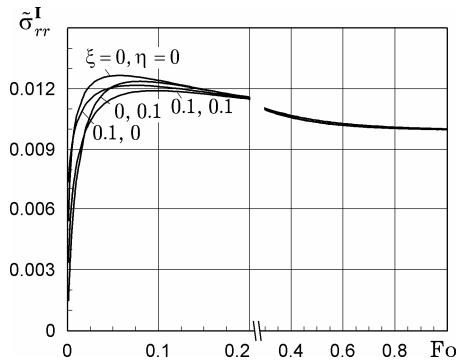


Рис. 2

Обчислення кривих, наведених на рис. 1, виконано при $Bi = 10$, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$; $\alpha_1 = 2\alpha_I$ та $\alpha_1 = 0.5\alpha_I$ для таких геометричних і механічних співвідношень між параметрами шарів покриття та тіла:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1, \quad \delta/R = 0.01, \quad (43)$$

$$E_1 : E_2 : E_3 = 5 : 2 : 8, \quad (44)$$

$$E_1 : E_I = 1, \quad (45)$$

$$\nu_I = 0.3, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3 \text{ та } \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.2.$$

З рисунка видно, що на початковій стадії нагрівання у всіх випадках радіальні напруження є розтягувальними. При $\alpha_i > \frac{1 + \nu_I}{1 + \nu_i} \alpha_I$ ці напруження досягають максимального значення, а потім релаксують до усталеного значення $\tilde{\sigma}_{rr}^{I\infty}$, яке визначається співвідношенням (28), а для випадку покриття порівняно малої жорсткості – формулами (35) та (37). При $\alpha_i < \frac{1 + \nu_I}{1 + \nu_i} \alpha_I$ ці напруження також досягають максимального додатного значення, а потім зменшуються, міняють знак і прямують до від'ємного в цьому випадку усталеного значення $\tilde{\sigma}_{rr}^{I\infty}$. Ці висновки щодо впливу співвідношення КЛТР підкладки та покриття з точністю до урахування значень коефіцієнта Пуассона якісно узгоджуються з результатами [9].

Слід зауважити, що вплив закріплення торців циліндра проявляється лише у випадку відмінності значень коефіцієнта Пуассона складових покриття та підкладки (суцільні криві на рис. 1, що відповідають сталому коефіцієнту Пуассона, $\nu_i = \nu_I$, співпадають). Це узгоджується з результатами для залишкового напруженого стану, отриманими в [17], а також для усталених термонапружень, отриманих у [34].

Отже, найбільша небезпека відшарування покриття внаслідок дії розтягувальних радіальних напружень виникає на початковій стадії нагріву.

Оскільки розтягувальні радіальні напруження на поверхні циліндра $\tilde{\sigma}_{rr}^I(1, Fo)$ є найбільш небезпечними, то дослідимо їх зміну в часі залежно від теплофізичних параметрів – ефективних термоопору $\xi = \frac{H^{-1}}{R\lambda_I}$ і теплоємності $\eta = \frac{\Omega}{\omega_I R}$ – для випадку вільних торців при $\alpha_i > \alpha_I$ (див. рис. 2).

Обчислення кривих, наведених на рис. 2, виконано при $Bi = 10$, $\alpha_i = 2\alpha_I$, $\nu_i = \nu_I = 0.3$, $i = 1, 2, 3$, та умовах (43)–(45). Наявність термоізолюючих властивостей покриття призводить до зменшення рівня розтягувальних напружень (крива при $\xi = 0$, $\eta = 0$ на рис. 2 – термоопір і теплоємність покриття відсутні).

На рис. 3 і рис. 4 показано розподіл безрозмірних колових $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$ та осьових $\tilde{\sigma}_{zz}$ напружень за радіальною координатою у системі циліндр – тришарове покриття для деяких моментів часу при $Bi = 10$ у випадках закріплених (рис. 3) і вільних (рис. 4) торців.

Обчислення виконано для співвідношень $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_I = 4 : 2 : 1 : 2$ і значень $\nu_I = 0.3$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.2$ при умовах (43)–(45).

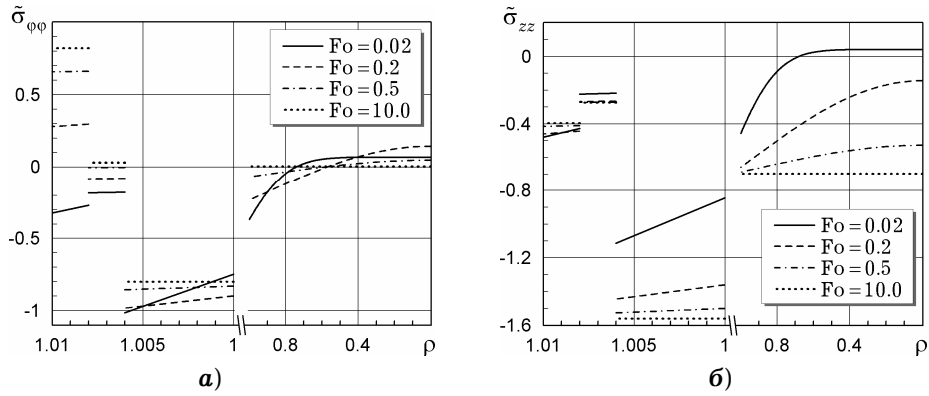


Рис. 3

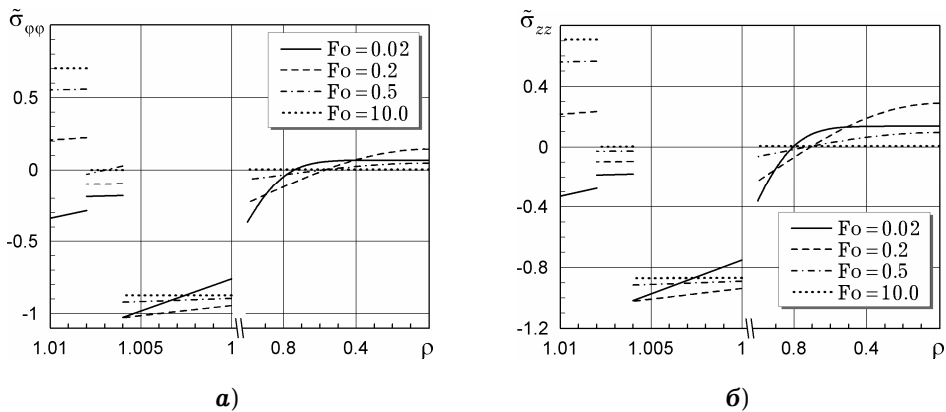


Рис. 4

Напруження у покритті мають розривний характер. На початковій стадії нагрівання напруження у всіх шарах стискувальні. При цьому в зовнішньому шарі (з меншим, ніж у підкладці, КЛТР) і в середньому шарі (з КЛТР, рівним КЛТР підкладки), напруження (колові для обох випадків закріплення торців та осьові для вільних торців) з часом монотонно зростають, прямуючи до усталеного значення. У той же час у шарі з більшим, ніж у підкладці, КЛТР ці напруження міняються немонотонно. Така поведінка напружень залежно від співвідношення значень КЛТР покриття та підкладки якісно узгоджується з результатами в [9]. У випадку вільних торців знак усталених колових та осьових напружень у шарі покриття визначає різниця КЛТР підкладки і цього шару згідно з формулами (41) та (42), у випадку ж закріплених торців – величина $(1 + \nu_1)\alpha_1 - (1 + \nu_i)\alpha_i$ для колових напружень та величина $(1 + \nu_1)\nu_i\alpha_1 - (1 + \nu_i)\alpha_i$ для осьових напружень, що відповідає формулам (39) та (40).

Як видно з рис. 3а і рис. 4а, колові напруження у системі незначно залежать від способу закріплення торців, і ця відмінність визначається лише неоднорідністю коефіцієнта Пуассона (як і в [34]). Можна зауважити, що у випадку вільних торців колові та осьові напруження практично не відрізняються в покритті, що узгоджується з результатами [29]. Для тонких ($\delta/R \leq 0.01$) покриттів малої жорсткості порівняно з жорсткістю тіла усталені значення цих напружень у покритті значно перевищують за абсолютною величиною усталені напруження у підкладці в тих шарах, КЛТР яких відмінні від КЛТР тіла, що відповідає формулам (35), (37)–(39), (41), (42). Також слід відмітити особливість поведінки осьових напружень у випадку закріплених торців (рис. 3б): на відміну від інших ситуацій, незалежно від співвідношення значень КЛТР складових покриття та підкладки, тут у всіх шарах покриття та основи розвиваються значні

стискувальні напруження, значення яких для усталеного стану співпадають зі значеннями за формулами (40), (36).

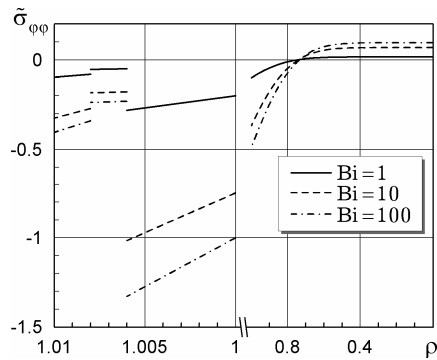


Рис. 5

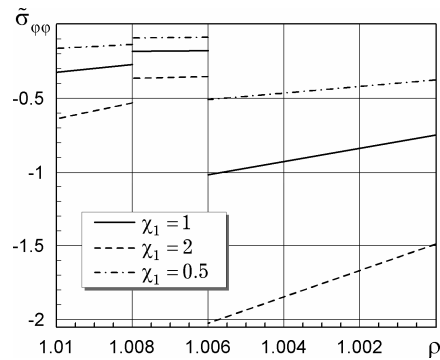


Рис. 6

Вплив умов теплообміну зі середовищем та жорсткості покриття на термонапружений стан системи проілюстровано на прикладі зміни колових напружень за радіальною координатою залежно від значень параметра Bi (рис. 5) і значень параметра жорсткості $\chi_1 = E_1/E_I$ (рис. 6) у випадку закріплених торців циліндра. Розрахунки проведено при $Fo = 0.02$, $\nu_I = 0.3$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.2$ за співвідношень (43)–(45) для рис. 5 та $Bi = 10$ і співвідношень (43), (44) для рис. 6. Як видно з графіків, збільшення інтенсивності теплообміну із зовнішнім середовищем (що відповідає збільшенню критерію Bi) та жорсткості покриття (що відповідає збільшенню параметра χ_1) призводить до істотного зростання значень і перепаду стискувальних напружень у шарах покриття (штрихові та штрихпунктирні криві на рис. 5, суцільні та штрихові криві на рис. 6).

Висновки. На основі використання узагальнених граничних умов термомеханічного спряження тіла із середовищем через тонке покриття отримано аналітичний розв'язок задачі термопружності для циліндра з багатошаровим покриттям. Досліджено вплив геометричних і термомеханічних характеристик покриття, умов закріплення торців циліндричної підкладки та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на термонапружений стан системи тіло – багатошарове покриття за конвективного нагрівання. Виявлено, що визначальними теплофізичними параметрами впливу на напружений стан циліндра є ефективні теплофізичні характеристики покриття – зведені термоопір і теплоємність та інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття, а визначальними термомеханічними параметрами – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт лінійного температурного розширення тіла. Для випадку покриттів малої жорсткості отримано наближені формули, які є зручними для якісного оцінювання усталених напружень в системі.

1. Бартенев Г. М., Жорник А. И. Температурные напряжения в стеклянном покрытии на металлических трубах // Физика и химия обработки материалов. 1972. – № 3. – С. 100–108.
2. Вигак В. М., Ригин А. М. Температурные напряжения в многослойном кусочно-однородном цилиндре // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 15. – С. 63–67.
3. Вигак В. М. Розв'язки одновимірних задач пружності та термопружності для циліндричних кусково-однорідних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 4. – С. 139–148.
The same: Vihak V. M. Solutions of one-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for cylindrical piecewise-homogeneous bodies // J. Math. Sci. – 1999. – 96, No. 2. – P. 3057–3064. – <https://doi.org/10.1007/BF02169706>.

4. *Кудинов В. А., Еремин А. В., Котова Е. В.* Получение точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных цилиндрических конструкций // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – № 2(27). – С. 188–191.
5. *Кудинов В. А., Еремин А. В., Кузнецова А. Э., Стефанюк Е. В.* Температурные напряжения в многослойном полой цилиндре при тепловом ударе на его внешней поверхности // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2014. – № 1. – С. 30–35.
Te same: *Kudinov V. A., Eremin A. V., Kuznetsova A. E., Stefanyuk E. V.* Thermal stresses in a multilayer hollow cylinder under thermal shock on its external surface // Russ. Aeront. – 2014. – **57**, No. 1. – P. 37–44.
<https://doi.org/10.3103/S1068799814010061>.
6. *Куценко О. Г., Харитонов О. М., Зражевський Г. М.* Аналітичний розв'язок нестационарної задачі термопружності, що відповідає термоудару двошарового циліндра // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 65–70.
7. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Квазистатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 7–16.
Te same: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Quasistatic temperature stresses in a multilayer thermally sensitive cylinder // Mater. Sci. – 2004. – **40**, No. 4. – P. 433–445.
<https://doi.org/10.1007/s11003-005-0061-6>.
8. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
9. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Иващук Д. В.* Исследование напряженного состояния материала при диффузионном насыщении цилиндра с тонким покрытием // Проблемы прочности. – 1974. – № 7. – С. 3–8.
Te same: *Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R., Ivashchuk D. V.* Stressed state of the material in diffusion saturation of a cylinder with a thin coating // Strength Mater. – 1974. – **6**, No. 7. – P. 787–792.
<https://doi.org/10.1007/BF01528315>.
10. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю., Іванків К. С.* Нестационарна задача теплопровідності для термочутливого циліндра з покриттям // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 46. – С. 83–88.
11. *Попович В. С., Іванків К. С., Гарматій Г. Ю.* Осесиметрична квазистатична задача термопружності термочутливого циліндра з тонким покриттям // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 46. – С. 89–96.
12. *Попович В. С., Калиняк Б. М.* Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 2. – С. 169–186.
Te same: *Popovych V. S., Kalynyak B. M.* Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, No. 2. – P. 218–242.
<https://doi.org/10.1007/s10958-016-2833-y>.
13. *Прокопенко Ю. А.* Математическое моделирование термически нагруженных двухслойных цилиндров // Вестн. Тамбов. гос. техн. ун-та. – 2009. – **15**, № 4. – С. 806–813.
14. *Процюк Б. В.* Визначення термопружного стану кусково-неоднорідного термочутливого порожнистого циліндра // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 101–110.
15. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
Te same: *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York etc.: McGraw-Hill Book Co., 1970. – xxiv+567 p.
16. *Шворак М.* Аналітичний розв'язок нестационарної задачі термопружності для двошарового циліндра // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2011. – Вип. 26. – С. 51–55.
17. *Шевчук В. А.* Визначення залишкових напружень в циліндрі з тонким багатошаровим покриттям // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 159–167.
18. *Шевчук В. А.* Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 2. – С. 179–185.

- Te same: *Shevchuk V. A.* Nonstationary one-dimensional problem of heat conduction for a cylinder with a thin multilayer coating // *J. Math. Sci.* – 2012. – **184**, No. 2. – P. 215–223. – <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0865-5>.
19. *Шевчук В. А.* Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями // *Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка.* – 2011. – **19**, вип. 15(1). – С. 129–139.
 20. *Шевчук В. А., Калиняк Б. М.* Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покриттями // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2010. – **46**, № 6. – С. 35–41.
Te same: *Shevchuk V. A., Kalynyak B. M.* Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings // *Mater. Sci.* – 2011. – **46**, No. 6. – P. 747–756. – <https://doi.org/10.1007/s11003-011-9348-y>.
 21. *Яцків О. І., Швець Р. М., Бобик Б. Я.* Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестационарної граничної умови // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2007. – Вип. 5. – С. 186–194.
 22. *Carpinteri A., Lorenzini E.* Thermal shock in a nuclear fuel element with cladding // *Nucl. Eng. Design.* – 1980. – **61**, No. 1. – P. 1–12.
[https://doi.org/10.1016/0029-5493\(80\)90073-4](https://doi.org/10.1016/0029-5493(80)90073-4).
 23. *Ciavarella M., Decuzzi P., Tagarielli V. L., Demelio G. P.* Simple formulas for thermoelastic stresses in TBC coatings // *J. Therm. Stresses.* – 2003. – **26**, No. 5. – P. 409–422. <https://doi.org/10.1080/713855940>.
 24. *Kalynyak B., Popovych V.* Thermal stresses in multilayer thermal sensitive cylinder at asymptotic thermal conditions // *Proc. 6th Int. Congr. Therm. Stresses (26–29 May 2005, Vienna, Austria)* / Eds. F. Ziegler, R. Heuer, C. Adam. – Vienna: Vienna University of Technology, 2005. – Vol. 2. – P. 119–122.
 25. *Kroupa F.* Stresses in coatings on cylindrical surfaces // *Acta Techn. CSAV.* – 1994. – **39**. – P. 243–274.
 26. *Lee Z.-Y., Chen C. K., Hung C.-I.* Transient thermal stress analysis of multilayered hollow cylinder // *Acta Mechanica.* – 2001. – **151**, No. 1–2. – P. 75–88.
<https://doi.org/10.1007/BF01272526>.
 27. *Men X., Tao F., Gan L.* Analysis of the coating interfacial stress in thick walled cylinder // *Proc. of the 2015 3rd Int. Conf. on Machinery, Materials and Information Technology Applications (ICMMITA 2015)* / Eds. W. Du, X. Zhou. – P. 1355–1358. – doi:10.2991/icmmita-15.2015.251.
 28. *Nied H. F.* Thermal shock in a circumferentially cracked hollow cylinder with cladding // *Eng. Fract. Mech.* – 1984. – **20**, No. 1. – P. 113–137.
[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(84\)90120-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(84)90120-6).
 29. *Nusier S. Q., Newaz G. M.* Transient residual stresses in thermal barrier coatings: analytical and numerical results // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1998. – **65**, No. 2. – P. 346–353. doi:10.1115/1.2789061.
 30. *Ootao Y., Tanigawa Y., Fukuda T.* Axisymmetric transient thermal stress analysis of a multilayered composite hollow cylinder // *J. Therm. Stresses.* – 1991. – **14**, No. 2. – P. 201–213.
<https://doi.org/10.1080/01495739108927062>.
 31. *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1942–1953.
 32. *Shevchuk V. A.* Modeling and computation of heat transfer in a system «body-multilayer coating» // *Heat Transfer Res.* – 2006. – **37**, No. 5. – P. 421–433.
doi:10.1615/HeatTransRes.v37.i5.50.
 33. *Sollund H. A., Vedeld K., Hellesland J.* Efficient analytical solutions for heated and pressurized multi-layer cylinders // *Ocean Eng.* – 2014. – **92**. – P. 285–295.
doi:10.1016/j.oceaneng.2014.10.003.
 34. *Vedeld K., Sollund H. A., Hellesland J.* Closed analytical expressions for stress distributions in two-layer cylinders and their application to offshore lined and clad pipes // *Trans. ASME J. Offshore Mech. Arct. Eng.* – 2015. – **137**, No. 2. – P. 021702.1–9.
doi:10.1115/1.4029357.
 35. *Zhang Q., Wang Z. W., Tang C. Y., Hu D. P., Liu P. Q., Xia L. Z.* Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2012. – **98**. – P. 102–110.
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2012.07.009>.

**ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ТОНКИМ
МНОГОСЛОЙНЫМ ПОКРЫТИЕМ**

На основе полученного аналитического решения одномерной задачи термоупругости для цилиндра с многослойным покрытием при конвективном теплообмене с внешней средой исследовано термоупругое состояние системы.

**THERMOELASTIC PROBLEM FOR CYLINDER WITH THIN
MULTILAYER COATING**

Based on the obtained analytical solution of a one-dimensional thermoelastic problem for a cylinder with a multilayer coating under convective heat exchange with environment, analysis of thermoelastic state of the system has been performed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
26.02.17