

## ЗАСТОСУВАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ ОДНОРІДНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ТЕРМОПРУЖНИМ СТАНОМ ЦИЛІНДРА

*Запропоновано варіаційний підхід до розв'язування задачі оптимізації стаціонарного осесиметричного термонапруженого стану скінченного суцільного циліндра шляхом керування розподілом об'ємних джерел тепла. Підхід базується на варіаційному методі однорідних розв'язків, розробленому раніше для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для циліндра. Досліджено вплив відношення висоти циліндра до його радіуса на оптимальні значення цільового функціонала та напружений стан.*

**Вступ.** Задачі керування напруженим станом циліндричних тіл виникають у багатьох прикладних дисциплінах – у технологіях нагріву/охолодження [15] масивних циліндричних заготовок, вирощування монокристалів напівпровідників за методом Чохральського [14], відпуску залишкових напружень [3], гартування [13] тощо.

Задачі керування термопружним станом циліндричних тіл розглядалися, зокрема, у роботах [1, 2, 5]. Для таких задач керування важливе значення мають методи розв'язування відповідних прямих задач. Серед аналітичних методів розв'язування осесиметричних задач для циліндричних тіл використовують методи сингулярних інтегральних рівнянь [10], розклад у ряди Фур'є – Бесселя [16], перехресної суперпозиції [6], інтегральних перетворень [7], метод прямого інтегрування рівнянь у напруженнях [17].

Варіаційний метод однорідних розв'язків [11] базується на використанні повних систем функцій, які є розв'язками осесиметричної задачі для циліндра з ненавантаженою бічною поверхнею. Цей метод використано для дослідження осесиметричних задач теорії пружності для півбезмежного та скінченного циліндрів [10], а також для кусково-однорідного циліндра [8].

Керування термонапруженим станом твердих тіл можна здійснювати шляхом зміни умов теплообміну об'єкта із зовнішнім середовищем, зміни зовнішніх теплових потоків та об'ємних джерел тепла. Зміна джерел тепла є перспективним методом для застосування до електропровідних тіл, оскільки для їх створення у таких тілах можна використовувати постійний чи змінний електричний струм, змінний струм у поєднанні з зовнішнім магнітним полем. У випадку діелектричних тіл, прозорих для теплового випромінювання, об'ємне нагрівання можна здійснювати з використанням потоків ГЧ-випромінювання. Перспективним також є спосіб об'ємного нагрівання з використанням ультразвуку.

У цій статті розглянуто задачу оптимального керування осесиметричним термонапруженим станом суцільного циліндричного тіла шляхом зміни розподілу об'ємних джерел тепла. Для розв'язування задачі застосовано підхід, який базується на варіаційному методі однорідних розв'язків, розробленому раніше для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності [8, 10].

**1. Постановка задачі.** Розглянемо вільний від навантажень циліндр  $\mathcal{V} = (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -b \leq z \leq b)$ , який нагрівається об'ємними джерелами тепла густини  $q$ , де  $q$  залежить лише від радіальної координати:  $q = q(\rho)$ . Тіло охолоджується через бічну поверхню  $\mathcal{S} = (\rho = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -b \leq z \leq b)$  за механізмом конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура  $T_c$  якого задана. Торцеві поверхні циліндра  $\mathcal{S}_1 = (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = b)$  і  $\mathcal{S}_2 = (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = -b)$  теплоізовані.

За таких умов у циліндрі виникає температурне поле, залежне лише від радіальної координати  $T = T(\rho)$ , яке в об'ємі  $\mathcal{V}$  задовольняє рівняння

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = -\frac{1}{\lambda} q(\rho), \quad (1)$$

а на бічній  $\mathcal{S}$  і торцевих  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  поверхнях для температури виконуються умови

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = -\frac{h}{\lambda} (T|_{\rho=1} - T_c), \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm b} = 0. \quad (2)$$

Тут  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу,  $h$  – коефіцієнт конвективного теплообміну з середовищем.

Зовнішня поверхня циліндра  $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$  вільна від навантажень. Тому температурне поле  $T = T(\rho)$  спричиняє в тілі осесиметричні температурні напруження, які в об'ємі  $\mathcal{V}$  задовольняють рівняння рівноваги [7]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_{\rho\rho}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\rho z} - \frac{1}{\rho} \sigma_{\phi\phi} &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_{\rho z}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

та співвідношення Дюгамеля – Неймана [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{\rho\rho} + \nu(e_{zz} + e_{\phi\phi})) - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} (T(\rho) - T), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{zz} + \nu(e_{\rho\rho} + e_{\phi\phi})) - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} (T(\rho) - T_c), \\ \sigma_{\phi\phi} &= \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{\phi\phi} + \nu(e_{zz} + e_{\rho\rho})) - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} (T(\rho) - T_c), \\ \sigma_{\rho z} &= \frac{E}{1+\nu} e_{\rho z}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\alpha_T$  – коефіцієнт температурного розширення,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $E$  – модуль Юнга матеріалу циліндра.

Компоненти тензора деформації  $e_{ij}$ ,  $ij \in \{\rho\rho, zz, \phi\phi, \rho z\}$ , пов'язані з компонентами вектора переміщень  $u_\rho$  та  $u_z$  співвідношеннями [4]

$$e_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad e_{\phi\phi} = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad e_{\rho z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right). \quad (5)$$

На поверхні  $\partial\mathcal{V}$  компоненти тензора напружень  $\sigma_{ij}$ ,  $ij \in \{\rho\rho, zz, \phi\phi, \rho z\}$ , задовольняють умови

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \sigma_{\rho z} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \sigma_{zz} \Big|_{z=\pm b} = 0, \quad \sigma_{\rho z} \Big|_{z=\pm b} = 0. \quad (6)$$

Із формул (3)–(5) випливає ключова система рівнянь незв'язаної термопружності у переміщеннях:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_\rho + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{u_\rho}{\rho^2} &= (1+\nu)\alpha_T \frac{\partial T(\rho)}{\partial \rho}, \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – осесиметричний оператор Лапласа,  $e = e_{\rho\rho} + e_{zz} + e_{\phi\phi}$ .

**Сформулюємо задачу оптимального керування.** Нехай  $T = T(\rho)$  є розв'язком задачі (1), (2) для заданого  $q = q(\rho)$ :  $T = T(\rho, q(\rho))$ . Розглянемо невід'ємний функціонал

$$\Phi(\sigma_{ij}) = 2\pi \int_{-b}^b \int_0^1 \rho \varphi(\sigma_{ij}(\rho, z)) d\rho dz, \quad (8)$$

який залежить від компонент тензора напружень  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, z)$ ,  $ij \in \{\rho\rho, zz, \varphi\varphi, \rho z\}$ , визначених в області  $\mathcal{V}$ , де  $\varphi(\sigma_{ij})$  – задана функція.

Нехай напруження у функціоналі (8) обчислені за формулами (4), (5) із використанням розв'язку задачі (7), (6), в якій  $T = T(\rho, q(\rho))$ . Тоді цей функціонал залежить лише від функції  $q(\rho)$ :  $\Phi = \Phi(q)$ .

Необхідно визначити функцію радіального розподілу густини джерел тепла  $q(\rho)$ , за якої функціонал  $\Phi$  є мінімальним.

**2. Розв'язування прямої задачі.** Сформулюємо пряму задачу керування температурними напруженнями: при заданій функції розподілу густини джерел тепла  $q(\rho)$  визначити температурні напруження в циліндрі, з використанням яких обчислити значення функціонала  $\Phi(q)$ .

Таким чином, розв'язування прямої задачі керування складається із двох кроків: **1)** розв'язання задачі незв'язаної термопружності (1), (2) і (7), (6) з наступним визначенням компонент напружень за формулами (4), (5) та **2)** обчислення значення функціонала за формулою (8).

Розв'язок задачі термопружності подамо у вигляді суперпозиції розв'язків двох задач: **I°)** задачі термопружності для нескінченного ненавантаженого циліндра (**основний стан**) та **II°)** задачі теорії пружності для скінченного циліндра (**збурений стан**):

$$u_\rho = u_\rho^0 + u_\rho^*, \quad u_z = u_z^0 + u_z^*,$$

де верхні індекси «0» та «\*» відповідають основному та збуреному станам.

**Основний стан.** Розв'язування задачі **I°** зводиться до послідовного розв'язування двох задач: **1)** задачі теплопровідності (1), (2), в якій  $q(\rho)$  – задана функція, та **2)** задачі про визначення осесиметричних температурних напружень у безмежному циліндрі

$$\mathcal{V}^0 = (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty \leq z \leq \infty).$$

Розв'язок задачі теплопровідності (1), (2) отримуємо шляхом безпосереднього інтегрування рівняння (1) з урахуванням вимоги обмеженості розв'язку в точці  $\rho = 0$  та підпорядкування його умові (2):

$$T(\rho) = \frac{1}{\lambda} \int_\rho^1 \left( \frac{1}{\rho} \int_\rho^\rho q(\rho) \rho d\rho \right) d\rho + \frac{1}{h} \int_0^1 q(\rho) \rho d\rho + T_c. \quad (9)$$

Для формулювання задачі **I°** необхідно задати умови навантаження і/або закріплення у нескінченно віддалених точках  $z \rightarrow \pm\infty$ . Приймаючи на безмежності умови ненавантаження, прийдемо до такого обмеження на компоненту напружень  $\sigma_{zz}$ :

$$2\pi \int_0^1 \sigma_{zz} \rho d\rho = 0. \quad (10)$$

Звідси з урахуванням співвідношень (4), (5) випливає, що компонента переміщення є лінійною функцією від координати  $z$ , а компонента деформації  $e_{zz}^0 = \text{const}$ . Тому з двох рівнянь (7) для нескінченного циліндра (задача **I°**)

залишається лише перше:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho u_\rho^0)}{\partial \rho} \right] = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \alpha_T \frac{\partial T(\rho)}{\partial \rho}. \quad (11)$$

Крайова умова на бічній поверхні та співвідношення Дюгамеля – Неймана в цьому випадку набувають вигляду відповідно:

$$\left( \frac{\partial u_\rho^0}{\partial \rho} + \frac{\nu}{(1-\nu)\rho} u_\rho^0 - \alpha_T (T(\rho) - T_c) \right) \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^0 = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{\rho\rho}^0 + \nu e_{\phi\phi}^0) - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} (T(\rho) - T_c), \quad (13)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^0 = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{\phi\phi}^0 + \nu e_{\rho\rho}^0) - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} (T(\rho) - T_c), \quad (14)$$

$$\sigma_{zz}^0 = \nu(\sigma_{\rho\rho}^0 + \sigma_{\phi\phi}^0) - \alpha_T E (T(\rho) - T_c). \quad (15)$$

Інтегруючи рівняння (11) та підпорядковуючи розв'язок умовам (10), (12), з використанням формул (13)–(15) отримуємо [7]

$$\sigma_{\rho\rho}^0(\rho) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left( \int_0^1 T(\rho)\rho \, d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho T(\rho)\rho \, d\rho \right), \quad (16)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^0(\rho) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left( \int_0^1 T(\rho)\rho \, d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho T(\rho)\rho \, d\rho - T(\rho) \right), \quad (17)$$

$$\sigma_{zz}^0(\rho) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left( 2 \int_0^1 T(\rho)\rho \, d\rho - T(\rho) \right). \quad (18)$$

**Збурений стан.** Задача  $II^\circ$  (для скінченного циліндра) зводиться до інтегрування системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho u_\rho^*)}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial^2 u_\rho^*}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial \rho \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z^*}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u_\rho^*}{\partial z \partial \rho} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho^*}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

за крайових умов на бічній поверхні:

$$\sigma_{\rho\rho}^* \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \sigma_{\rho z}^* \Big|_{\rho=1} = 0 \quad (20)$$

і умов на торцях циліндра  $S_1$  та  $S_2$ :

$$\sigma_{zz}^* \Big|_{z=\pm b} = -\sigma_{zz}^0(\rho), \quad \sigma_{\rho z}^* \Big|_{z=\pm b} = 0, \quad (21)$$

де  $\sigma_{zz}^0(\rho)$  визначається за формулою (18).

Розв'язок задачі  $II^\circ$  отримаємо з використанням функції Лява  $\chi$  [10], за допомогою якої система (19) зводиться до бігармонічного рівняння:

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0. \quad (22)$$

Компоненти переміщень  $u_\rho^*$ ,  $u_z^*$  та напружень  $\sigma_{ij}^*$ ,  $ij \in \{\rho\rho, zz, \phi\phi, \rho z\}$ , виражаються через функцію Лява  $\chi$  такими співвідношеннями [7]:

$$\begin{aligned}
u_{\rho}^* &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho \partial z}, & u_z^* &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + 2(1-\nu)\nabla^2 \chi, \\
\frac{1}{2\mu} \sigma_{\rho\rho}^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} \right), & \frac{1}{2\mu} \sigma_{\varphi\varphi}^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \chi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right), \\
\frac{1}{2\mu} \sigma_{zz}^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left( (2-\nu)\nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), & \frac{1}{2\mu} \sigma_{\rho z}^* &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( (1-\nu)\nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), \quad (23)
\end{aligned}$$

де  $\mu = E/(2(1+\nu))$  – модуль зсуву матеріалу.

Із використанням формул (23) крайові умови (20), (21) можна записати в термінах функції Лява.

Для розв'язування задачі (22), (20), (21) застосуємо варіаційний метод однорідних розв'язків [8, 10]. З огляду на симетрію задачі стосовно площини  $z = 0$  подамо функцію  $\chi$  у вигляді

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cosh(-\gamma_k z) f_k(\rho) + \bar{B}_k \cosh(-\bar{\gamma}_k z) \bar{f}_k(\rho)), \quad (24)$$

де  $B_k$  – невідомі комплексні сталі, риска над буквою означає комплексне спряження.

У представленні (24) функції  $f_k(\rho)$  виразимо через функції Бесселя  $J_0$  та  $J_1$  таким чином [10]:

$$f_k(\rho) = \rho J_1(\gamma_k \rho) \alpha_k - \frac{2}{\pi \gamma_k} J_0(\gamma_k \rho), \quad (25)$$

де  $\gamma_k$  – корені трансцендентного рівняння

$$(\gamma_k)^2 (J_0^2(\gamma_k) + J_1^2(\gamma_k)) + 2(\nu-1)J_1^2(\gamma_k) = 0.$$

У формулі (25) використано позначення

$$\alpha_k = \frac{2J_1(\gamma_k)}{\pi((2\nu-2)J_1(\gamma_k) - \gamma_k J_0(\gamma_k))}.$$

Подамо компоненти тензора напружень  $\sigma_{ij}^*$  осесиметричної задачі для скінченного циліндра  $\mathcal{V}$  у вигляді лінійної комбінації однорідних комплексних розв'язків:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^*(\rho, z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sigma_{k\rho\rho}(\rho, z) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{k\rho\rho}(\rho, z)), \\
\sigma_{\varphi\varphi}^*(\rho, z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sigma_{k\varphi\varphi}(\rho, z) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{k\varphi\varphi}(\rho, z)), \\
\sigma_{zz}^*(\rho, z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sigma_{kzz}(\rho, z) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{kzz}(\rho, z)), \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\rho z}^*(\rho, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sigma_{k\rho z}(\rho, z) + \bar{B}_k \bar{\sigma}_{k\rho z}(\rho, z)), \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned}
\sigma_{k\rho\rho}(\rho, z) &= 2\mu \cosh(-\gamma_k z) \gamma_k^2 \times \\
&\times \left[ \alpha_k ((1-2\nu)J_0(\gamma_k \xi) - \xi \gamma_k J_1(\gamma_k \xi)) + 2 \frac{\xi \gamma_k J_0(\gamma_k \xi) - J_1(\gamma_k \xi)}{\pi \gamma_k \xi} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{k\varphi\varphi}(\rho, z) &= 2\mu \cosh(-\gamma_k z) \gamma_k \left[ (1-2\nu) \gamma_k J_0(\gamma_k \xi) \mathfrak{x}_k + \frac{2}{\pi \xi} J_1(\gamma_k \xi) \right], \\ \sigma_{kzz}(\rho, z) &= 2\mu \cosh(-\gamma_k z) \gamma_k^2 \times \\ &\quad \times \left[ \mathfrak{x}_k (2(\nu-2) J_0(\gamma_k \rho) + \gamma_k \rho J_1(\gamma_k \rho)) - \frac{2}{\pi} J_0(\gamma_k \rho) \right], \\ \sigma_{k\rho z}(\rho, z) &= 2\mu \cosh(-\gamma_k z) \gamma_k^2 \times \\ &\quad \times \left[ \mathfrak{x}_k (2(\nu-1) J_1(\gamma_k \rho) - \gamma_k \rho J_0(\gamma_k \rho)) - \frac{2}{\pi} J_1(\gamma_k \rho) \right].\end{aligned}$$

Підпорядкуємо розв'язок (24) умовам (21), застосовуючи варіаційний підхід [10]. Для цього розглянемо функціонал

$$I = \int_0^1 \left[ (\sigma_{zz}^*|_{z=b} + \sigma_{zz}^0(\rho))^2 + (\sigma_{\rho z}^*|_{z=b})^2 \right] \rho d\rho. \quad (28)$$

Підставляючи подання (26), (27) у функціонал (28) та використовуючи необхідні умови його мінімуму

$$\frac{\partial I}{\partial B_m} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \bar{B}_m} = 0, \quad m = 1, 2,$$

приходимо до розв'язування безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно коефіцієнтів  $B_k^1 = B_k$ ,  $B_k^2 = \bar{B}_k$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^2 M_{mk}^{\ell p} B_k^p = K_m^{\ell}. \quad (29)$$

Коефіцієнти  $M_{mk}^{\ell p}$  та  $K_m^{\ell}$ ,  $\ell = 1, 2$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , системи (29) виражаються формулами

$$M_{mk}^{\ell p} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sigma_{kzz}^p(\rho, b) \sigma_{mzz}^{\ell}(\rho, b) + \sigma_{k\rho z}^p(\rho, b) \sigma_{m\rho z}^{\ell}(\rho, b)) \rho d\rho, \quad (30)$$

$$K_m^{\ell} = - \int_0^1 (\sigma_{zz}^0(\rho) \sigma_{mzz}^{\ell}(\rho, b)) \rho d\rho. \quad (31)$$

У формулах (30) та (31) використано позначення

$$\begin{aligned}\sigma_{kzz}^1(\rho, z) &= \sigma_{kzz}(\rho, z), & \sigma_{kzz}^2(\rho, z) &= \bar{\sigma}_{kzz}(\rho, z), \\ \sigma_{k\rho z}^1(\rho, z) &= \sigma_{k\rho z}(\rho, z), & \sigma_{k\rho z}^2(\rho, z) &= \bar{\sigma}_{k\rho z}(\rho, z), \\ \sigma_{mzz}^1(\rho, z) &= \sigma_{mzz}(\rho, z), & \sigma_{mzz}^2(\rho, z) &= \bar{\sigma}_{mzz}(\rho, z), \\ \sigma_{m\rho z}^1(\rho, z) &= \sigma_{m\rho z}(\rho, z), & \sigma_{m\rho z}^2(\rho, z) &= \bar{\sigma}_{m\rho z}(\rho, z).\end{aligned}$$

Результати кількісних досліджень варіаційного методу однорідних розв'язків у застосуванні до розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для циліндра можна знайти в публікаціях [8, 10, 11].

**3. Розв'язування оберненої задачі.** Розв'язок оберненої задачі, сформульованої вище, можна символічно представити у вигляді

$$q(\rho) = \arg \min_{q(\rho)} (\Phi(q(\rho))).$$

Використовуючи варіаційний метод однорідних розв'язків [10], зведемо задачу знаходження мінімуму функціонала  $\Phi$  до розв'язування лінійної алгебраїчної системи рівнянь. Шукану функцію  $q(\rho)$  подамо у вигляді  $q(\rho) = q_0 g(\rho)$ , де  $q_0$  – стала, а функція  $g(\rho)$  задовольняє умову

$$\int_0^1 g(\rho) \rho \, d\rho = \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Погонна (віднесена до висоти циліндра) кількість тепла  $Q$ , яке виділяється в об'ємі циліндра, визначається як

$$Q = 2\pi \int_0^1 \rho q(\rho) \, d\rho = \pi q_0.$$

Звідси випливає, що  $q_0 = Q/\pi$ . Отже, змінюючи  $g(\rho)$  при сталому значенні  $q_0$ , можемо досліджувати вплив радіальних розподілів об'ємної густини  $q(\rho)$  на температурні напруження у циліндрі для фіксованого  $Q$ .

Представимо функцію  $g(\rho)$  у вигляді розвинення за повною системою функцій, наприклад у вигляді відрізка степеневого ряду:

$$g(\rho) = a_0 + \sum_{s=1}^n a_s \rho^s. \quad (33)$$

Підставляючи (33) в умову (32), отримаємо  $a_0 = 1 - 2 \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{s+2}$ , тому шукану функцію  $q(\rho)$  перепишемо у вигляді

$$q(\rho) = q_0 \left( 1 - 2 \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{s+2} + \sum_{s=1}^n a_s \rho^s \right). \quad (34)$$

З урахуванням (34) формула (9) набуде вигляду

$$T(\rho) = \frac{q_0}{\lambda} \left( \frac{1-\rho^2}{4} + \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{(s+2)^2} \left( \frac{\rho^2(s+2)-s}{2} - \rho^{s+2} \right) \right) + \frac{q_0}{2h} + T_c.$$

В оберненій задачі коефіцієнти  $a_s$ ,  $s = 1, \dots, n$ , є невідомі, тому для довільної  $g(\rho)$  компоненти напружень основного стану  $\sigma_{ij}^0$ ,  $ij \in \{\rho\rho, zz, \phi\phi, \rho z\}$ , розглядатимемо як функції радіальної координати  $\rho$  і коефіцієнтів  $a_1, \dots, a_n$ :  $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(\rho, a_1, \dots, a_n)$ . З використанням формул (16)–(18) маємо

$$\sigma_{\rho\rho}^0(\rho, a_1, \dots, a_n) = \sum_{s=1}^n C_s(\rho) a_s + C_0(\rho), \quad (35)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^0(\rho, a_1, \dots, a_n) = \sum_{s=1}^n D_s(\rho) a_s + D_0(\rho), \quad (36)$$

$$\sigma_{zz}^0(\rho, a_1, \dots, a_n) = \sum_{s=1}^n A_s(\rho) a_s + A_0(\rho), \quad (37)$$

де використано позначення

$$C_0(\rho) = \frac{\alpha_T E q_0 (\rho^2 - 1)}{16\lambda(1-\nu)},$$

$$C_s(\rho) = \frac{\alpha_T E q_0 (1-\rho^2) ((s+2)(s+4) + 8(\rho^{s+2} - 1))}{8\lambda(1-\nu)(s+2)^2(s+4)},$$

$$D_0(\rho) = \frac{\alpha_T E q_0 (3\rho^2 - 1)}{16\lambda(1-\nu)},$$

$$D_s(\rho) = \frac{\alpha_T E q_0}{\lambda(1-\nu)(s+2)^2} \left( \frac{(1-3\rho^2)(s+2)}{8} + \frac{(s+3)\rho^{s+2} - 1}{s+4} \right),$$

$$A_0(\rho) = \frac{\alpha_T E q_0 (2\rho^2 - 1)}{8\lambda(1-\nu)},$$

$$A_s(\rho) = \frac{\alpha_T E q_0}{\lambda(1-\nu)(s+2)^2} \left( \frac{s}{4} - \frac{2}{s+4} + \frac{1-\rho^2(s+2)}{2} + \rho^{s+2} \right).$$

Розглянемо спочатку задачу оптимального керування для **безмежного циліндра**. У цьому випадку  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ , тобто напруження у функціоналі (8) визначаються за формулами (35)–(37). Підставляючи ці формули у функціонал (8) і виконуючи інтегрування, отримаємо квадратичну функцію від змінних  $a_1, \dots, a_n$ . Задовольняючи необхідні умови мінімуму цієї функції, отримаємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{s=1}^n N^{ts} a_s = V^t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (38)$$

Коефіцієнти системи (38) залежать від конкретного вигляду функціонала (8), тобто від функції  $\varphi(\bullet)$ . Зокрема, для функціонала

$$\Phi(a_1, \dots, a_n) = 2\pi \int_0^1 (\sigma_{zz}(\rho, a_1, \dots, a_n))^2 \rho d\rho \quad (39)$$

коефіцієнти системи (38) матимуть вигляд

$$N^{ts} = \int_0^1 A_t(\rho) A_s(\rho) \rho d\rho, \quad V^t = - \int_0^1 A_0(\rho) A_t(\rho) \rho d\rho.$$

Таким чином, внаслідок отриманого аналітичного представлення (35)–(37) компонент напружень у цільовому функціоналі у вигляді функцій від координати  $\rho$  і коефіцієнтів  $a_1, \dots, a_n$  розв'язування оберненої задачі зведено до лінійної системи алгебраїчних рівнянь (38).

У випадку **скінченного циліндра** компоненти тензора напружень  $\sigma_{ij}$  виражаються у вигляді сум  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*$ , в яких кожен із двох доданків залежить від коефіцієнтів  $a_1, \dots, a_n$ . Складові  $\sigma_{ij}^0$  визначаються формулами (35)–(37), а залежність компонент  $\sigma_{ij}^*$  від коефіцієнтів  $a_1, \dots, a_n$  виникає через залежність від цих коефіцієнтів функції правої частини крайової умови (21)<sub>1</sub>. Внаслідок цього коефіцієнти  $K_m^\ell$  у правій частині системи (29) залежать від  $a_1, \dots, a_n$ :

$$K_m^\ell(a_1, \dots, a_n) = - \int_0^1 \left( \sum_{s=1}^n A_s(\rho) a_s + A_0(\rho) \right) \sigma_{mzz}^\ell(\rho, b) \rho d\rho, \quad \ell = 1, 2,$$

а тому розв'язок системи (29) також залежить від  $a_1, \dots, a_n$ :

$$B_k^1(a_1, \dots, a_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (S_{mk}^1 K_m^1(a_1, \dots, a_n) + S_{mk}^2 K_m^2(a_1, \dots, a_n)),$$

$$B_k^2(a_1, \dots, a_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (P_{mk}^1 K_m^1(a_1, \dots, a_n) + P_{mk}^2 K_m^2(a_1, \dots, a_n)).$$

Тут використано позначення

$$S_{mk}^1 = (M_{mk}^{11})^{-1} + ((M_{mk}^{11})^{-1})^2 M_{mk}^{12} M_{mk}^{21} (M_{mk}^{22} - M_{mk}^{21} (M_{mk}^{11})^{-1} M_{mk}^{12})^{-1},$$

$$S_{mk}^2 = -(M_{mk}^{11})^{-1} M_{mk}^{12} (M_{mk}^{22} - M_{mk}^{21} (M_{mk}^{11})^{-1} M_{mk}^{12})^{-1},$$

$$P_{mk}^1 = -(M_{mk}^{22} - M_{mk}^{21} (M_{mk}^{11})^{-1} M_{mk}^{12})^{-1} M_{mk}^{21} (M_{mk}^{11})^{-1},$$

$$P_{mk}^2 = (M_{mk}^{22} - M_{mk}^{21} (M_{mk}^{11})^{-1} M_{mk}^{12})^{-1}.$$



В результаті отримуємо представлення компонент напружень  $\sigma_{ij}^*$  як функцій, залежних від координат  $\rho$ ,  $z$  і коефіцієнтів  $a_1, \dots, a_n$ :

$$\sigma_{ij}^*(\rho, z, a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\sigma_{kij}(\rho, z) B_k^1(a_1, \dots, a_n) + \bar{\sigma}_{kij}(\rho, z) B_k^2(a_1, \dots, a_n)).$$

Підставляючи отримані в такий спосіб представлення  $\sigma_{ij}(\rho, z, a_1, \dots, a_n)$  у функціонал (8) та виконуючи інтегрування за змінними  $\rho$  і  $z$ , отримуємо квадратичну функцію від змінних  $a_1, \dots, a_n$ . Задовольняючи необхідні умови мінімуму цієї функції, прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду (38). Коефіцієнти цієї системи залежать від функції  $\varphi(\sigma_{ij})$ , яка визначає вигляд функціонала (8). Зокрема, у випадку функціонала (39) коефіцієнти системи (38) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} N^{st} &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sigma_{kzz}^1(\rho) \int_0^1 A_s(\rho) G_{mk}(\rho) \rho d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_{kzz}^2(\rho) \int_0^1 A_s(\rho) O_{mk}(\rho) \rho d\rho \right) - 2A_s(\rho) \right) \times \\ &\quad \times \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sigma_{kzz}^1(\rho) \int_0^1 A_t(\rho) G_{mk}(\rho) \rho d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_{kzz}^2(\rho) \int_0^1 A_t(\rho) O_{mk}(\rho) \rho d\rho \right) - 2A_t(\rho) \right) \rho d\rho, \\ V^t &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sigma_{kzz}^1(\rho) \int_0^1 A_0(\rho) G_{mk}(\rho) \rho d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_{kzz}^2(\rho) \int_0^1 A_0(\rho) O_{mk}(\rho) \rho d\rho \right) - 2A_0(\rho) \right) \times \\ &\quad \times \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sigma_{kzz}^1(\rho) \int_0^1 A_t(\rho) G_{mk}(\rho) \rho d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_{kzz}^2(\rho) \int_0^1 A_t(\rho) O_{mk}(\rho) \rho d\rho \right) - 2A_t(\rho) \right) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Тут позначено

$$\begin{aligned} G_{mk}(\rho) &= S_{mk}^1 \sigma_{mzz}^1(\rho, b) + S_{mk}^2 \sigma_{mzz}^2(\rho, b), \\ O_{mk}(\rho) &= P_{mk}^1 \sigma_{mzz}^1(\rho, b) + P_{mk}^2 \sigma_{mzz}^2(\rho, b), \\ \sigma_{kzz}^{\ell}(\rho) &= \sigma_{kzz}^{\ell}(\rho, 0), \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

**4. Числові дослідження.** Щоб дослідити вплив радіальної неоднорідності розподілу густини джерел тепла  $q(\rho)$  на розподіл компонент напружень і значення цільового функціонала (39), розглядали випадки подання функції  $g(\rho)$  поліномами різного порядку, задаючи певні значення коефіцієнтів апроксимації  $a_1, \dots, a_n$  за незмінного  $q_0$ .

На рис. 1 наведено значення цільового функціонала (39) для *безмежного циліндра*  $\mathcal{V}^0$  залежно від степеня  $n$  апроксимацій функції  $g(\rho)$  (див. (33)) при  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ . Значення коефіцієнтів  $a_1, \dots, a_4$ , які відповідають кривим 1–3 на цьому рисунку, подано у табл. 1. Крива 3 на рис. 1 від-

повідає оптимальному розподілові густини джерел  $q(\rho)$ , яку отримали на основі розв'язку оберненої задачі.

Таблиця 1

	$n = 0$	$n = 1$			$n = 2$			$n = 3$			$n = 4$		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$a_1$	0	2	3	4	-11	-14	-15	35	36	37	-72	-71	-74
$a_2$	0	0	0	0	14	15	17	-85	-90	-91	299	300	300
$a_3$	0	0	0	0	0	0	0	61	65	64	-460	-465	-463
$a_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	236	240	241

Обернену задачу розв'язували для різних значень висоти циліндра  $2b$ . При цьому обмежувалися другим порядком апроксимації функції  $g(\rho)$ . Всі дослідження провели при значенні коефіцієнта теплообміну  $h = 6$ .

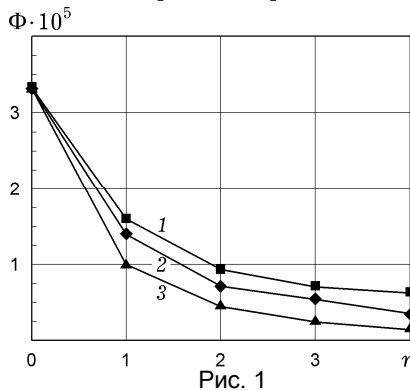


Рис. 1

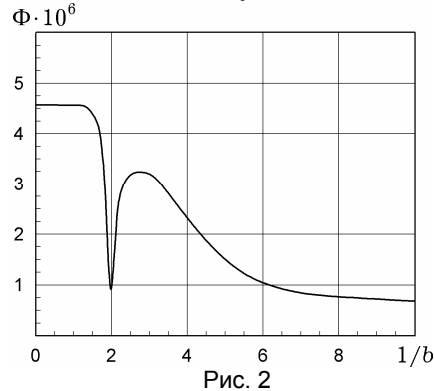


Рис. 2

На рис. 2 показано, як змінюються оптимальні значення цільового функціонала (39) залежно від висоти циліндра. Як бачимо, функціонал набуває різкого мінімуму при  $b = 0.5$ .

Щоб дослідити причину цього явища, провели порівняння оптимальних напружень  $\sigma_{zz}(\rho, z)/q_0|_{z=0}$  для різних значень  $b$ . Результати цих обчислень наведено на рис. 3. Криві 1, 2, 3 на цьому рисунку відповідають значенням  $b = 0.45, 0.5, 0.55$ . Встановлено, що при  $b = 0.5$  напруження  $\sigma_{zz}/q_0$  в екваторіальному перетині циліндра практично дорівнюють нулеві.

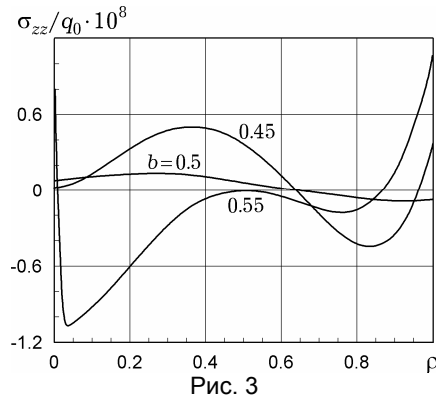


Рис. 3

**Висновки.** Запропоновано підхід до розв'язування задачі оптимізації стаціонарного осесиметричного термонапруженого стану скінченного суцільного циліндра шляхом керування розподілом об'ємних джерел тепла. Розглянуто випадок, коли функція густини джерел залежить лише від радіальної координати, а циліндр охолоджується внаслідок конвективного теплообміну його бічної поверхні із зовнішнім середовищем, температура якого задана. Оптимальний стан визначали за значенням невід'ємного цільового функціонала від компонент напружень, визначених в об'ємі циліндра. Сформульовано пряму й обернену задачі оптимального керування. З використанням варіаційного методу однорідних розв'язків, розробленого у попередніх роботах для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності, а також застосовуючи апроксимацію функції густини джерел тепла відрізком степеневого ряду, задачу керування зведено до лінійної алгебраїчної системи рівнянь стосовно коефіцієнтів розв'язування функції джерел.

З використанням числових розрахунків, які виконано для випадку цільового функціонала, що визначає середньоквадратичне відхилення значення осевого напруження в екваторіальній площині циліндра від нульового значення, здійснено дослідження збіжності запропонованого методу. В результаті проведених досліджень отримано залежність оптимального значення цільового функціонала від висоти циліндра.

Запропонований метод може знайти практичне застосування при розробці технологічних режимів нагрівання/охолодження масивних циліндричних заготовок, а також процесів гартування електропровідних тіл із використанням електричного струму як джерела тепла.

1. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. *Дейнека В. С., Аралова А. А.* Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого длинного цилиндра // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 38–42.
3. *Дробинин М. М., Бояришинова И. Н.* Об одной методике оптимального управления процессом охлаждения изделий из стеклюющихся полимеров с целью снижения остаточных напряжений // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Прикл. математика и механика. – 2012. – № 10. – С. 52–62.
4. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1987. – 307 с.
5. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.
6. *Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р.* Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 120–137.  
Te same: *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V., Barber J. R.* Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 5. – P. 646–669. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0428-1>.
7. *Попов Г. Я.* Осесимметричные краевые задачи теории упругости для цилиндров и конусов конечной длины // Докл. РАН. – 2011. – **439**, № 2. – С. 192–197.
8. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.  
Te same: *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York etc.: McGraw-Hill Book Co., 1970. – xxiv+567 p.
9. *Чекурін В., Постолаккі Л.* Варіаційний метод однорідних розв'язків у осесиметричній задачі теорії пружності для кусково-однорідного циліндра // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2016. – Вип. 24. – С. 118–129.
10. *Agarwal V. K.* Axisymmetric solution of the end-problem for a semi-infinite elastic circular cylinder and its application to joined dissimilar cylinders under uniform tension // Int. J. Eng. Sci. – 1978. – **16**, No. 12. – P. 985–998.
11. *Chekurin V. F., Postolaki L. I.* A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for cylinder // Mathematical modeling and computing. – 2015. – **2**, No. 2. – P. 128–139.
12. *Chekurin V., Postolaki L.* Application of the least squares method in axisymmetric biharmonic problems // Mathematical Problems in Engineering. – 2016. – **2016**. – 9 p. – <http://dx.doi.org/10.1155/2016/3457649>.
13. *Clever D., Lang J.* Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient // Optim. Contr. Appl. Meth. – 2012. – **33**, No. 2. – P. 157–175. – <https://doi.org/10.1002/oca.984>
14. *Huang H., Liang S.* Thermal-stress reduction for a Czochralski grown single crystal // J. Eng. Math. – 2007. – **59**, No. 1. – P. 1–23. – <https://doi.org/10.1007/s10665-006-9117-3>
15. *Kuiken H. K.* The cooling of low-heat-resistance cylinders by radiation // J. Eng. Math. – 1979. – **13**, No. 2. – P. 97–106. – <https://doi.org/10.1007/BF00042746>
16. *Sburlati R.* Three-dimensional analytical solution for an axisymmetric biharmonic problem // J. Elasticity. – 2009. – **95**, No. 1–2. – P. 79–97. – <https://doi.org/10.1007/s10659-009-9195-3>
17. *Vihak V. M., Yasinskyi A. V., Tokovyy Yu. V., Rychahivskyy A. V.* Exact solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a long cylinder subjected to varying with-respect-to-length loads // J. Mech. Behav. Mater. – 2007. – **18**, No. 2. – P. 141–148. – <https://doi.org/10.1515/JMBM.2007.18.2.141>

**ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ОДНОРОДНЫХ  
РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ  
ТЕРМОУПРУГИМ СОСТОЯНИЕМ ЦИЛИНДРА**

*Предложен вариационный подход к решению задачи оптимизации стационарного осесимметричного термонапряженного состояния конечного сплошного цилиндра путем управления распределением объемных источников тепла. Подход базируется на вариационном методе однородных решений, разработанном ранее для решения осесимметричных задач теории упругости для цилиндра. Исследовано влияние отношения высоты цилиндра к его радиусу на оптимальные значения целевого функционала и напряженное состояние.*

**APPLICATION OF VARIATIONAL METHOD OF HOMOGENEOUS  
SOLUTIONS FOR OPTIMAL CONTROL OF AXISYMMETRIC THERMOELASTIC  
STATE OF CYLINDER**

*A variational approach to solving the optimal control problem for the stationary axisymmetric thermal stressed state of the finite solid cylinder by controlling the distribution of volumetric heat sources is proposed. The approach is based on the variational method of homogeneous solutions developed previously for solving axisymmetric elasticity problems for cylinders. The influence relation of the height of the cylinder to its radius on the optimal values of the objective functional and stress state is studied.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
08.06.17