

**ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТРАНСПОРТНИХ ОПЕРАЦІЙ
ДВОЛАНКОВОГО МАНІПУЛЯТОРА**

Досліджується задача оптимізації руху дволанкового маніпулятора, який під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію. Початкове та кінцеве положення захоплювача маніпулятора, а також тривалість операції вважаються заданими. Якість руху маніпулятора оцінюється квадратичним функціоналом. Враховано можливі конфігурації маніпулятора на початку та в кінці операції. Запропоновано алгоритм побудови субоптимального розв'язку задачі, який ґрунтується на параметризації кутових координат маніпулятора сумою кубічного полінома і скінченного тригонометричного ряду, а також використанні методики обернених задач динаміки та числових процедур нелінійного програмування. Проаналізовано вплив конфігурацій маніпулятора і параметрів тригонометричного ряду на характеристики субоптимального процесу.

Маніпуляційні роботи нині широко використовують у різних галузях сучасного виробництва, де вони виконують різноманітні технологічні операції: транспортування, складання, зварювання тощо. Від якості їх функціонування значною мірою залежить технічний рівень усього виробничого процесу. Раціональним способом покращення експлуатаційних характеристик маніпуляційних роботів є оптимізація їх руху за тим чи іншим критерієм [2, 6, 24]. Серед найпоширеніших критеріїв – час виконання операції, точність позиціонування робочого органу (захоплювача), витрати енергії. Тому дослідження керованих рухів маніпуляційних систем, розробка ефективних алгоритмів оптимізації їх руху є важливою задачею робототехніки.

Серед маніпуляційних роботів чільне місце посідають дволанкові маніпуляційні системи. Крім свого самостійного використання (див., наприклад, маніпулятори типу SCARA [18, 25, 30]), такі системи є складовими частинами конструкцій багатьох роботів, у яких довжини двох суміжних ланок помітно перевищують розміри решти ланок. Саме ці дві ланки виконують основний обсяг руху робота під час виконання транспортних операцій. Тому дволанкові маніпулятори вже тривалий час привертають увагу дослідників.

Задачі динаміки та оптимізації дволанкових маніпуляційних систем у різноманітних формулюваннях досліджено, зокрема, у працях [1–3, 9, 11, 15, 17, 18, 22, 23, 26]. У монографії [18] розглянуто ряд задач оптимального (за швидкодією) керування дволанковим маніпулятором: наприклад, для маніпулятора з рівними за довжиною ланками та малою (порівняно з вантажем) масою чисельно побудовано оптимальний за швидкодією режим керування. Також вказано на суттєвий вплив конфігурацій маніпулятора на час швидкодії. У випадку прямолінійного переміщення захоплювача розроблено методику визначення оптимальної конфігурації маніпулятора. Для маніпулятора з довільними параметрами запропоновано числову процедуру побудови субоптимального за швидкодією режиму керування. Програмні керування шукають у параметричному класі кусково-сталіх функцій. Чисельно побудовано діаграми, з яких можна визначити параметри керування: кількість точок перемикачів, порядок чергування знаків, моменти часу перемикачів і час швидкодії. Аналогічну задачу про найшвидший поворот дволанкового маніпулятора досліджено також у [17]. У статті [1] розв'язано задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором з комбінованим функціоналом, у якому інтегральною частиною (квадрати моментів сил у шарнірах) оцінюються енерговитрати системи, термінальною частиною – тривалість руху системи. Розв'язок побудовано за умови статичної урівноваженості другої ланки (центр мас ланки розміщений на осі шарніра), що спрощує нелінійні рівняння руху маніпулятора до лінійних співвідношень. Для подальшої мінімізації функціонала запропоновано числово-графічну

процедуру, яка дає можливість визначити оптимальну конфігурацію маніпулятора у кінцевому положенні та відповідний напрямок його повороту. В [9] для розв'язання задачі оптимального керування дволанковим маніпулятором застосовано методу параметричної оптимізації. Методика ґрунтується на параметризації кутових координат маніпулятора скінченим рядом за заданою системою функцій (класичних ортогональних поліномів) і використанні числових процедур нелінійного програмування. У статті [11] досліджено керований рух дволанкового маніпулятора, який під дією активних і пасивних (пружинно-демпферних) приводів виконує циклічну транспортну операцію (у вертикальній площині). Методами параметричної оптимізації (з використанням тригонометричних рядів) побудовано субоптимальний розв'язок задачі сукупної оптимізації параметрів пасивних приводів і законів руху маніпулятора. Авторами [15] розв'язано задачу про повернення захоплювача дволанкового маніпулятора на базову траєкторію, від якої він дещо відхилився. При цьому рівняння руху маніпулятора лінеаризовано в околі цієї базової траєкторії, після чого вихідну задачу керування зведено до функціональної проблеми моментів. У випадку неконтрольованих відхилень захоплювача вихідну задачу керування розширено до ігрової, для якої побудовано гарантовану позиційну стратегію повернення на базову траєкторію. Огляд і аналіз публікацій з використання методики нечітких множин у задачах оптимального керування дволанковим маніпулятором наведено в праці [26]. Методика параметричної оптимізації (з використанням класичних поліномів, тригонометричних рядів) стосовно задач оптимального керування нелінійними динамічними системами описана у [27, 28, 31].

У статтях [2, 3] розв'язано ряд задач оптимального керування дволанковим маніпулятором з електромеханічними приводами. Кожний привід складається з електродвигуна постійного струму (із незалежним збудженням) і редуктора. Задачі досліджено у припущенні великих передавальних чисел редукторів і нульових коефіцієнтів індуктивності обмоток якорів електродвигунів, що дає можливість знехтувати взаємовпливом різних ступенів вільності маніпулятора та описати його динаміку лінійними рівняннями. У [2] якість процесу керування оцінено комбінованими функціоналами: енерговитрати та тривалість руху системи (задача 1); енерговитрати та точність позиціонування (задача 2). Обмеження на керування у задачах не задавались. Оптимальні керування побудовано за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. У статті [3] запропоновано процедуру побудови субоптимального за швидкодією режиму керування: спочатку маніпулятор за мінімальний час переміщають у деякий окіл кінцевого положення, далі за допомогою класичного PID-регулятора доводять його у задане кінцеве положення. Алгоритми керування дволанковим маніпулятором з використанням PID-регуляторів описано також у [22, 23].

У цій статті досліджено задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором, який під дією керувань (зусиль у шарнірах) виконує транспортну операцію у горизонтальній площині: за заданий час переносить вантаж із початкового положення у кінцеве. Якість процесу керування оцінено квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Враховано можливі конфігурації маніпулятора, що відповідають заданим положенням захоплювача на початку та в кінці руху. Побудовано субоптимальний розв'язок задачі, який ґрунтується на параметризації кутових координат маніпулятора сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду. Коефіцієнти полінома визначено з початкових і кінцевих умов операції, а коефіцієнти тригонометричного ряду – за розв'язком відповідної задачі нелінійного програмування. Виконано числові експерименти, на підставі яких проаналізовано вплив конфігурацій маніпулятора та параметрів тригонометричного ряду на характеристики субоптимального процесу.

Дослідження є подальшим розвитком методики параметричної оптимізації у задачах оптимального керування нелінійними механічними системами [5, 7–13, 20, 25].

1. Математична модель маніпулятора. Розглянемо механічну модель дволанкового маніпулятора, схематично зображеного на рис. 1. Маніпулятор складається із двох твердих тіл (ланок) OA , AB , з'єднаних між собою циліндричним шарніром A . Ланка OA за допомогою циліндричного шарніра O зв'язана з нерухомою основою, на кінці другої ланки розташовано захоплювач з вантажем. Осі шарнірів O і A спрямовані по вертикалі. Шарніри вважаємо ідеальними, захоплювач (з вантажем) моделюємо точковою масою m , зосередженою у точці B . Маніпулятор під дією моментів керувальних сил u_1 і u_2 , прикладених у шарнірах O і A відповідно, виконує плоскопаралельний рух у горизонтальній площині OXY .

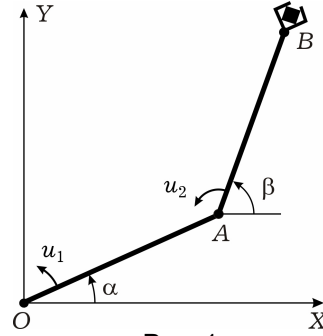


Рис. 1

Рівняння руху досліджуваного маніпулятора подамо у вигляді такої системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} K_a \ddot{\alpha} + K[\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_1 - u_2, \\ K_b \ddot{\beta} + K[\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – кути повороту ланок OA , AB відносно осі OX інерційної системи відліку OXY ; $K_a = J_a + a^2(m_b + m)$, $K_b = J_b + mb^2$, $K = a(rm_b + mb)$; $a = |OA|$, $b = |AB|$ – довжини ланок маніпулятора; J_a , J_b – моменти інерції ланок OA , AB відносно осей шарнірів O , A відповідно; m_b , r – маса ланки AB і відстань від її центра маси до шарніра A . Тут і далі крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t . Співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду, які описують рух дволанкового маніпулятора під дією керувань $u_1(t)$, $u_2(t)$ [18].

2. Параметрична оптимізація руху маніпулятора. Однією з найпоширеніших технологічних операцій, яку виконують маніпуляційні роботи, є транспортна операція – перенесення вантажу з одного положення робочої зони маніпулятора в інше [6].

Нехай досліджуваний маніпулятор протягом заданого часу T перенесить вантаж із початкового положення

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad (2)$$

у кінцеве

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \dot{x}(T) = \dot{y}(T) = 0. \quad (3)$$

де x , y – координати точки B в інерційній системі відліку OXY ; x_T , y_T – задані параметри, які задовольняють умови досяжності захоплювача маніпулятора $x_T^2 + y_T^2 \leq (a + b)^2$, $\tau = 0$, $\tau = T$. Швидкості захоплювача у початковий $t = 0$ і кінцевий $t = T$ моменти часу задаємо нульовими.

Сформулюємо задачу оптимального керування (задача 1). Знайти такі керування $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in [0, T]$, при яких маніпулятор виконає транспортну операцію (2), (3) з мінімальним значенням функціонала

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (4)$$

Квадратичний функціонал вигляду (4) часто використовують у задачах оптимального керування механічними системами [1, 6–10, 20, 25, 29]. За певних припущень цей функціонал характеризує енерговитрати системи. Зокрема, коли керування системою відбувається за допомогою низькооборотних електродвигунів, функціонал (4) виражає (у нульовому наближенні) сумарну кількість тепла, що виділяється в обмотках двигунів.

Досліджуваний маніпулятор характеризується суттєвою нелінійністю рівнянь руху та взаємною залежністю рухів для різних ступенів вільності. Також йому притаманна кінематична надлишковість: всередині області досяжності маніпулятора заданому положенню захоплювача (x_τ, y_τ) відповідають два набори значень $\{\alpha_\tau^+, \beta_\tau^-\}$, $\{\alpha_\tau^-, \beta_\tau^+\}$ кутових координат ланок. Усе це ускладнює безпосереднє застосування класичних методів теорії оптимального керування для розв'язання задачі 1.

Ефективною у розв'язанні цієї задачі є методика параметричної оптимізації (у просторі узагальнених координат). В основі методики лежить заміна множини допустимих законів руху механічної системи сім'єю заданих функцій (з невідомими параметрами), що зводить вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування. Згідно з цією методикою подамо кутові координати $\alpha(t)$, $\beta(t)$ у вигляді лінійної комбінації заданих функцій з невідомими коефіцієнтами

$$f = \sum_{i=0}^3 c_i^f t^i + G_n^f(t), \quad G_n^f = \sum_{i=1}^n [a_i^f g_{1i}^f(t) + b_i^f g_{2i}^f(t)], \quad f \in \{\alpha, \beta\}, \quad (5)$$

де $\{g_{1i}^f(t)\}_{i=1}^n$, $\{g_{2i}^f(t)\}_{i=1}^n$ – задані на проміжку $[0, T]$ функції, $g_{ji}^f \in C^2[0, T]$, $j = 1, 2$; $\{a_i^f\}_{i=1}^n$, $\{b_i^f\}_{i=1}^n$ – коефіцієнти параметризації, які знаходимо як розв'язок відповідної задачі нелінійного програмування; $\{c_i^f\}_{i=0}^3$ – коефіцієнти полінома, за допомогою яких забезпечуємо виконання умов (2), (3):

$$\begin{aligned} c_0^f &= f_0 - G_n^f(0), & c_1^f &= -\dot{G}_n^f(0), \\ c_2^f &= \frac{1}{T^2} \{3[f_T - f_0 + G_n^f(0) - G_n^f(T)] + T[2\dot{G}_n^f(0) + \dot{G}_n^f(T)]\}, \\ c_3^f &= \frac{1}{T^3} \{2[f_0 - f_T + G_n^f(T) - G_n^f(0)] - T[\dot{G}_n^f(0) + \dot{G}_n^f(T)]\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничні значення $f_\tau \in \{\alpha_\tau, \beta_\tau\}$, $\tau = 0$, $\tau = T$, у (6) обчислюємо із системи тригонометричних рівнянь $a \cos \alpha_\tau + b \cos \beta_\tau = x_\tau$, $a \sin \alpha_\tau + b \sin \beta_\tau = y_\tau$ за умов $-\pi \leq \alpha_\tau \leq \pi$, $-\pi \leq \beta_\tau \leq \pi$ (див. [18]):

$$\alpha(\tau) = \alpha_\tau^\pm, \quad \beta(\tau) = \beta_\tau^\mp, \quad \dot{\alpha}(\tau) = \dot{\beta}(\tau) = 0, \quad \tau = 0, T, \quad (7)$$

де позначено

$$\begin{aligned} \alpha_\tau^\pm &= \tilde{\alpha}_\tau^\pm - \Lambda(\tilde{\alpha}_\tau^\pm), & \beta_\tau^\pm &= \tilde{\beta}_\tau^\pm - \Lambda(\tilde{\beta}_\tau^\pm), \\ \tilde{\alpha}_\tau^\pm &= \psi_\tau \pm \arccos \frac{r_\tau^2 + c^2}{2ar_\tau}, & \tilde{\beta}_\tau^\mp &= \psi_\tau \mp \arccos \frac{r_\tau^2 - c^2}{2br_\tau}, \\ \psi_\tau &= \operatorname{sgn}(y_\tau) \arccos \frac{x_\tau}{r_\tau}, & \Lambda(\xi) &\equiv \pi(1 + \operatorname{sgn}(|\xi| - \pi)) \operatorname{sgn}(\xi - \pi), \\ r_\tau &= \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}, & c^2 &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Введена допоміжна функція $\Lambda(\xi)$ нормалізує значення кутів $\tilde{\alpha}_\tau^\pm$, $\tilde{\beta}_\tau^\mp$ на проміжок $[-\pi, \pi]$. Всередині області досяжності маніпулятора набори $\{\alpha_\tau^+, \beta_\tau^-\}$, $\{\alpha_\tau^-, \beta_\tau^+\}$ відповідають двом різним конфігураціям кінематичного ланцюга OAB , симетричним відносно прямої OB . Усього разом маємо чотири набори конфігурацій ланок у моменти часу $\tau = 0$, $\tau = T$:

$$\begin{aligned} (I) - \{\alpha_0^+, \beta_0^-\}, & \quad \{\alpha_T^+, \beta_T^-\}; & (III) - \{\alpha_0^-, \beta_0^+\}, & \quad \{\alpha_T^+, \beta_T^-\}; \\ (II) - \{\alpha_0^+, \beta_0^-\}, & \quad \{\alpha_T^-, \beta_T^+\}; & (IV) - \{\alpha_0^-, \beta_0^+\}, & \quad \{\alpha_T^-, \beta_T^+\}. \end{aligned}$$

Зазначені граничні (відносно часу) конфігурації враховуємо під час розв'язання задачі 1. Рівність нулеві кутових швидкостей у (7) задаємо з огляду на нульові лінійні швидкості захоплювача в умовах (2), (3). Відмітимо також, що у поданні (5) функціями параметризації можуть бути, наприклад, тригонометричні функції [7, 8, 11, 12, 20, 25, 28], класичні ортогональні поліноми [9, 27, 31] тощо.

Кутові швидкості $\dot{\alpha}(t)$, $\dot{\beta}(t)$ та прискорення $\ddot{\alpha}(t)$, $\ddot{\beta}(t)$ обчислюємо диференціюванням виразу (5) за часом t , $t \in [0, T]$. Далі, після підставлення параметризованих функцій $\alpha(t)$, $\beta(t)$ і їх похідних $\dot{\alpha}(t)$, $\ddot{\alpha}(t)$, $\dot{\beta}(t)$, $\ddot{\beta}(t)$ у рівняння руху (1) знаходимо параметричну сім'ю керувань $u_1(t, \mathbf{z})$, $u_2(t, \mathbf{z})$, де $\mathbf{z} = (a_1^\alpha, b_1^\alpha, a_1^\beta, b_1^\beta, \dots, a_n^\alpha, b_n^\alpha, a_n^\beta, b_n^\beta)$ – вектор коефіцієнтів параметризації. В результаті функціонал (4) перетворюється у функцію багатьох змінних $E(\mathbf{z})$, і вихідна задача 1 зводиться до задачі нелінійного програмування $E(\mathbf{z}) \rightarrow \min_{\mathbf{z}}$ [19, 21]. Зазначимо, що розв'язки цих задач близькі, однак встановлення оцінок цієї близькості потребує проведення додаткових досліджень.

3. Числове моделювання руху маніпулятора. Наведемо окремі результати розв'язання задачі 1 для маніпулятора, ланки якого мають: кільцевий поперечний переріз зі сталими зовнішнім 0.1 м і внутрішнім 0.094 м діаметрами, сталу густину матеріалу 7850 кг/м^3 , довжини $a = 0.8 \text{ м}$, $b = 0.6 \text{ м}$, $r = 0.3 \text{ м}$. Параметри транспортної операції приймали такі значення: $x_0 = 0$, $y_0 = 1 \text{ м}$, $x_T = 0.7 \text{ м}$, $y_T = 0.6 \text{ м}$, $T = 6 \text{ с}$, $m = 8 \text{ кг}$.

Обчислювали в програмному середовищі MATLAB [4] на комп'ютері з процесором AMD Athlon II Dual-Core M230 (2.10ГГц) та оперативною пам'яттю 2ГБ. У параметризації (5) використали тригонометричні функції:

$$G_n^f = \sum_{i=1}^n \left[a_i^f \cos i \frac{2\pi}{T} t + b_i^f \sin i \frac{2\pi}{T} t \right], \quad (8)$$

де задавали $n = 10$, і загальна кількість параметрів оптимізації відповідно становила 40. Для розв'язання отриманої задачі нелінійного програмування використовували процедуру мінімізації *fminunc* із пакета MATLAB, у якій за початкове значення вектора параметрів оптимізації поклали $\mathbf{z} = 0$. Точність за параметрами оптимізації і значенням цільової функції становила відповідно 10^{-6} і 10^{-3} , час розв'язання задачі 1 – приблизно 44 с.

Отриманий субоптимальний закон руху маніпулятора відповідає граничним конфігураціям набору (I) і характеризується коефіцієнтами параметризації, наведеними у табл. 1. Бачимо, що зі зростанням порядкового номера членів ряду (8) відповідні коефіцієнти a_i^f , b_i^f за абсолютним значенням спадають. Мінімальне значення функціонала (4) $E^* = 4.332$, що є меншим приблизно на 30% від початкового значення $E(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=0} = 6.14$.

Таблиця 1

| i | $f = \alpha(t)$ | | $f = \beta(t)$ | |
|-----|-----------------|------------|----------------|------------|
| | a_i^f | b_i^f | a_i^f | b_i^f |
| 1 | -0.0645014 | -0.0539198 | 0.1391166 | 0.0554063 |
| 2 | -0.0047146 | -0.0033815 | 0.0071180 | -0.0050338 |
| 3 | -0.0008313 | -0.0000560 | 0.0014778 | 0.0000023 |
| 4 | -0.0002159 | -0.0000551 | 0.0004101 | -0.0000357 |
| 5 | -0.0000801 | -0.0000176 | 0.0001550 | -0.0000063 |
| 6 | -0.0000362 | -0.0000076 | 0.0000716 | -0.0000017 |
| 7 | -0.0000188 | -0.0000037 | 0.0000377 | -0.0000002 |
| 8 | -0.0000107 | -0.0000021 | 0.0000217 | 0.0000003 |
| 9 | -0.0000065 | -0.0000013 | 0.0000132 | 0.0000005 |
| 10 | -0.0000037 | -0.0000009 | 0.0000076 | 0.0000005 |

Відповідні графіки кінематичних і динамічних характеристик побудованого субоптимального процесу зображено на рис. 2–7. Тут час t виражено в секундах, лінійні переміщення захоплювача x , y – в метрах, швидкості \dot{x} , \dot{y} – в м/с, кути α , β – в радіанах (рад), кутові швидкості $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ – в рад/с, моменти u_1 , u_2 – в Н·м. На рис. 2 зображено траєкторію руху захоплювача (тут і нижче стрілкою вказано напрямок руху), на рис. 3 і рис. 4 – графіки закону руху та швидкості захоплювача, на рис. 5, рис. 6 – графіки кутів координат і швидкостей ланок манипулятора, на рис. 7 – графіки відповідних керувань u_1 , u_2 . Як бачимо, побудований субоптимальний закон руху захоплювача задовольняє умови транспортної операції (2), (3). Кутові швидкості ланок у початковий і кінцевий моменти часу руху манипулятора рівні нулеві, що відповідає умовам (7). Для порівняння на рис. 3–7 штриховими лініями показано графіки відповідних характеристик, обчислених для $\mathbf{z} = 0$. З аналізу наведених графіків випливає, що характеристики субоптимального процесу істотно відрізняються від аналогічних характеристик при $\mathbf{z} = 0$, що свідчить про доцільність дослідження задачі 1.

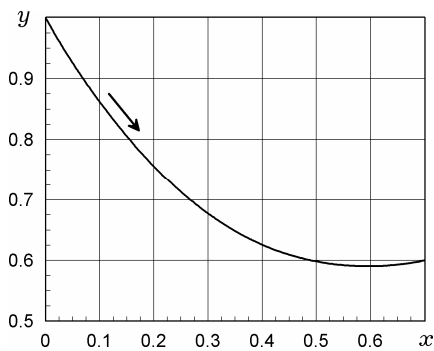


Рис. 2

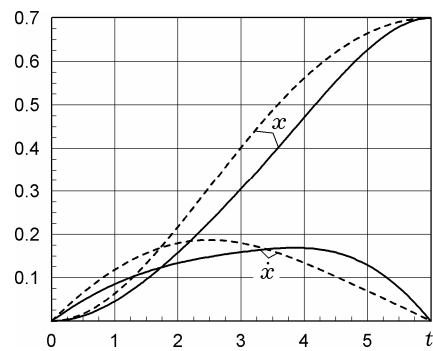


Рис. 3

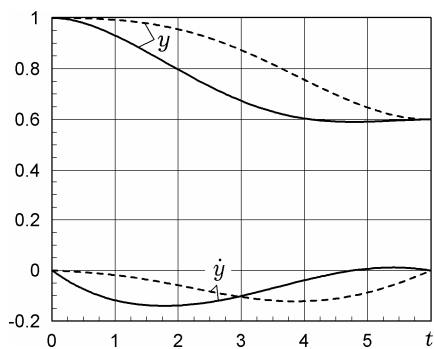


Рис. 4

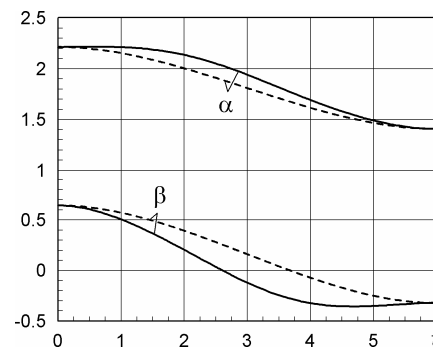


Рис. 5

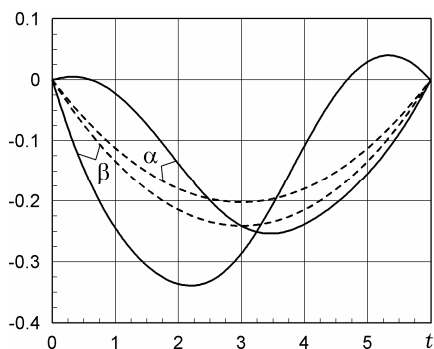


Рис. 6

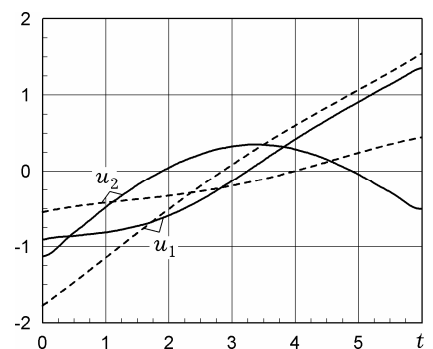


Рис. 7

Для дослідження впливу параметра n (кількості членів ряду (8) у параметричному поданні (5)) на характеристики субоптимального процесу задачі 1 розв'язували для різних значень цього параметра у межах конфігураційного набору (I). У табл. 2 для $n = 2, \dots, 13$ наведено відносні похибки

$$\varepsilon_{\omega} = \frac{\|\omega_{n-1}(t) - \omega_n(t)\|_{L_2}}{\|\omega_{n-1}\|_{L_2}}, \text{ де } \omega_n \in \{\alpha, \beta, u_1, u_2\}_n - \text{характеристики субопти-}$$

мального процесу, отримані як розв'язки задачі 1 за описаною вище методикою параметричної оптимізації з урахуванням n членів ряду (8). Як бачимо, зі зростанням параметра n вплив n -го члена тригонометричного ряду (8) на характеристики субоптимального процесу спадає.

Таблиця 2

| n | ε_{α} | ε_{β} | ε_{u_1} | ε_{u_2} | E^* |
|-----|------------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-------|
| 2 | 0.0040620 | 0.0619850 | 0.1543334 | 0.2545663 | 4.349 |
| 3 | 0.0005271 | 0.0062353 | 0.0305072 | 0.0929011 | 4.337 |
| 4 | 0.0001312 | 0.0016247 | 0.0158175 | 0.0447641 | 4.334 |
| 5 | 0.0000463 | 0.0005216 | 0.0085170 | 0.0260100 | 4.333 |
| 6 | 0.0000194 | 0.0002544 | 0.0053436 | 0.0171392 | 4.332 |
| 7 | 0.0000099 | 0.0001173 | 0.0036539 | 0.0122081 | 4.332 |
| 8 | 0.0000067 | 0.0000597 | 0.0026580 | 0.0091703 | 4.332 |
| 9 | 0.0000041 | 0.0000577 | 0.0020181 | 0.0071605 | 4.332 |
| 10 | 0.0000031 | 0.0000287 | 0.0015838 | 0.0057427 | 4.332 |
| 11 | 0.0000023 | 0.0000307 | 0.0012750 | 0.0047158 | 4.332 |
| 12 | 0.0000011 | 0.0000162 | 0.0010496 | 0.0039324 | 4.332 |
| 13 | 0.0000008 | 0.0000083 | 0.0008779 | 0.0033336 | 4.332 |

Наведемо результати щодо впливу граничних конфігурацій маніпулятора на побудований субоптимальний процес. У табл. 3 подано характеристики $E^* = \min_z E(z)$, $u_i^{\vee} = \min_t u_i(t)$, $u_i^{\wedge} = \max_t u_i(t)$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$, субоптимального руху маніпулятора для конфігураційних наборів (I)–(IV) і таких функцій параметризації: $\{G_i\}$ – тригонометричні функції (8), $\{T_i\}$ – поліноми Чебишева першого роду, $\{P_i\}$ – поліноми Лежандра, $\{L_i\}$ – поліноми Лагерра (див. формули в [9]). При цьому для параметризаційного ряду (8) задавали $n = 6$, відповідно загальна кількість параметрів оптимізації становила 24, що дорівнює кількості шуканих параметрів під час параметризації (в задачі 1) зазначеними поліномами. У табл. 3 також наведено значення Δt [с] – тривалість розв'язування відповідної задачі оптимізації задачі нелінійного програмування (на вказаному вище комп'ютері). З наведених даних бачимо, що для заданої транспортної операції субоптимальний режим руху дволанкового маніпулятора суттєво залежить від граничної конфігурації його ланок. Зокрема, для конфігурації (II) мінімальне значення функціонала (5) приблизно у три рази більше від аналогічної характеристики для конфігурації (I). Також помітно відрізняються порогові значення керувань для зазначених конфігурацій.

На рис. 8–10 зображено побудовані субоптимальні траєкторії руху захоплювача, які відповідають конфігураційним наборам (II), (III) і (IV). Відповідні їм графіки кутових координат ланок наведено на рис. 11–13. Попарний аналіз графіків на рис. 8 і рис. 11, а також на рис. 9 і рис. 12 свідчить, що захоплювач спочатку рухається до межі області досяжності (випрямленого положення маніпулятора), після чого переміщується у задане кінцеве положення. При цьому під час проходження межі знак міжланкового кута маніпулятора змінюється на протилежний.

Як впливає з аналізу числових результатів, для кожного набору граничних конфігурацій кінематичні та динамічні характеристики субоптимальних процесів, побудованих за допомогою зазначених вище функцій параметризації, є доволі близькими між собою. Так, для конфігураційного на-

бору (I) величину цієї близькості виразимо, за аналогією до числових характеристик розсіяння значень вибірки (у математичній статистиці [16]), у вигляді «інтегрального» коефіцієнта варіації (у відсотках):

$$V[\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}, u_1, u_2] = [0.020, 0.264, 1.427, 0.230, 0.599, 1.945, 1.243, 2.149],$$

де функцію $V[\omega]$, якою оцінюємо близькість характеристик $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$, $\omega_4(t)$, отриманих для $\omega(t)$ параметризаціями $\{G_i\}$, $\{T_i\}$, $\{P_i\}$, $\{L_i\}$ відповідно, задаємо у вигляді

$$V[\omega] \equiv \frac{\sigma}{s} 100, \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \int_0^T \sum_{k=1}^3 [\bar{\omega}(t) - \omega_k(t)]^2 dt, \quad s^2 = \int_0^T \bar{\omega}^2(t) dt, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \omega_k(t).$$

Таблиця 3

| (N) | $\{p_i\}$ | E^* | u_1^\vee | u_1^\wedge | u_2^\vee | u_2^\wedge | Δt |
|-------|-----------|--------|------------|--------------|------------|--------------|------------|
| (I) | $\{G_i\}$ | 4.332 | -0.912 | 1.343 | -1.106 | 0.354 | 13.1 |
| | $\{T_i\}$ | 4.332 | -0.895 | 1.338 | -1.153 | 0.344 | 15.0 |
| | $\{P_i\}$ | 4.333 | -0.895 | 1.337 | -1.147 | 0.344 | 16.3 |
| | $\{L_i\}$ | 4.346 | -1.076 | 1.371 | -1.282 | 0.336 | 6.4 |
| (II) | $\{G_i\}$ | 14.412 | -2.243 | 2.169 | -0.938 | 1.599 | 18.9 |
| | $\{T_i\}$ | 15.717 | -3.316 | 2.515 | -1.013 | 2.418 | 12.3 |
| | $\{P_i\}$ | 15.718 | -3.316 | 2.515 | -1.013 | 2.415 | 12.5 |
| | $\{L_i\}$ | 16.972 | -2.710 | 2.547 | -0.876 | 1.401 | 8.8 |
| (III) | $\{G_i\}$ | 8.927 | -1.588 | 2.230 | -1.465 | 0.816 | 17.2 |
| | $\{T_i\}$ | 9.572 | -2.050 | 2.103 | -1.539 | 0.866 | 11.6 |
| | $\{P_i\}$ | 9.572 | -2.050 | 2.104 | -1.540 | 0.866 | 12.1 |
| | $\{L_i\}$ | 10.064 | -1,705 | 1,99 | -1.567 | 1.012 | 7.6 |
| (IV) | $\{G_i\}$ | 4.391 | -1.331 | 1.012 | -0.359 | 1.028 | 12.5 |
| | $\{T_i\}$ | 4.391 | -1.335 | 0.992 | -0.351 | 1.078 | 10.4 |
| | $\{P_i\}$ | 4.391 | -1.333 | 0.991 | -0.352 | 1.082 | 10.2 |
| | $\{L_i\}$ | 4.419 | -1.570 | 1.016 | -0.309 | 1.101 | 6.1 |

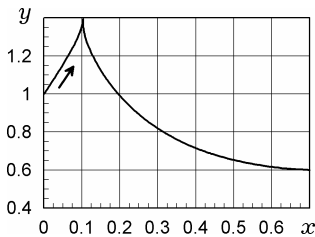


Рис. 8

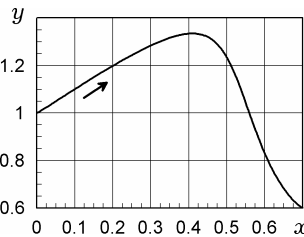


Рис. 9

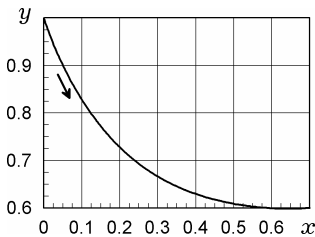


Рис. 10

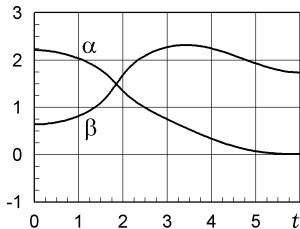


Рис. 11

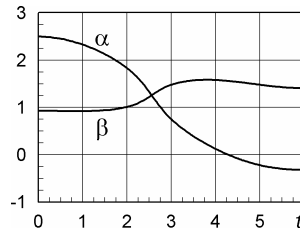


Рис. 12

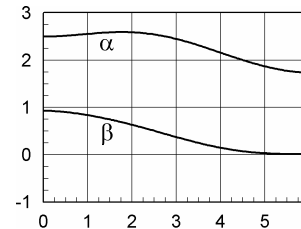


Рис. 13

Висновки. Для дволанкового маніпулятора, що виконує транспортну операцію у горизонтальній площині, розроблено чисельно-аналітичний алгоритм і комп'ютерну програму для параметричної оптимізації законів руху ланок і розрахунку відповідних динамічних характеристик. В основі алгоритму – параметризація узагальнених координат маніпулятора сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду. Результати проведених числових експериментів підтвердили ефективність запропонованих алгоритму та програми.

Аналіз отриманих числових даних свідчить, що для заданої транспортної операції субоптимальний режим руху дволанкового маніпулятора істотно залежить від конфігурації його ланок на початку та в кінці операції. Також числові результати показують практичну ідентичність характеристик субоптимальних процесів маніпулятора, побудованих методом параметричної оптимізації з використанням як тригонометричних рядів, так і класичних ортогональних поліномів.

1. *Аветисян В. В.* Оптимизация конфигураций и направлений поворотов звеньев двузвенного манипулятора по комбинированным критериям качества // Изв. НАН Армении. Механика. – 1998. – **51**, № 4. – С. 65–71.
2. *Аветисян В. В., Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами с учетом энергозатрат // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – № 3. – С. 100–107.
3. *Аветисян В. В., Болотник Н. Н.* Субоптимальное управление электромеханическим манипулятором с высокой точностью позиционирования // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 5. – С. 32–41.
4. *Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н.* MATLAB 7. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
5. *Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А.* Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 128–144.
Te same: *Berbyuk V. E., Demydyuk M. V., Lytvyn B. A.* Mathematical modeling and optimization of walking of human being with prosthesis of crus // J. Autom. Inform. Sci. – 2005. – **37**, No. 6. – P. 46–60.
DOI: 10.1615/J Automat Inf Scien.v37.i6.60.
6. *Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1990. – № 1. – С. 189–238.
Te same: *N. N. Bolotnik, F. L. Chernousko* Optimization of manipulation robot control // Sov. J. Comput. Systems Sci. – 1990. – **28**, No. 5. – P. 127–169.
7. *Демидюк М. В.* Оптимізація параметрів та режимів керування чотириланкового замкнутого маніпулятора // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 164–173.
8. *Демидюк М. В.* Параметрична оптимізація чотириланкового замкнутого маніпулятора з активними й пасивними приводами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 193–202.
Te same: *Demydyuk M. V.* Parametric optimization of a four-link close-chain manipulator with active and passive actuators // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 746–758.
<https://doi.org/10.1007/s10958-010-0023-x>.
9. *Демидюк М. В., Гошовська Н. В.* Параметрична оптимізація руху дволанкового маніпулятора з використанням ортогональних поліномів // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 140–147.
10. *Демидюк М. В., Литвин Б. А., Голуб Б. М.* Параметрична оптимізація ходи двонного робота // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 162–171.
11. *Демидюк М. В., Ширко М. І.* Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними й пасивними приводами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 183–190.
12. *Демидюк М.* Оптимізація транспортних операцій чотириланкового замкнутого маніпулятора // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 107–116.
13. *Демидюк М. В., Литвин Б. А.* Математическое моделирование ходьбы человека с голеностопным шарнирным ортезом // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 2. – С. 46–57.

- Те саме: *Demydyuk M. V., Lytvyn B. A.* The mathematical modeling of the human gait with ankle hinged orthosis // *J. Autom. Inform. Sci.* – 2015. – **47**, No. 4. – P. 64–77.
doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i4.70.
14. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. – Москва: Наука, 1968. – 476 с.
 15. *Лутманов С. В., Куксенюк Л. В., Попова Е. С.* Задачи управления двухзвенным манипулятором с вращательными кинематическими парами // *Фундаментальные исследования.* – 2013. – № 6 (часть 4). – С. 886–891.
 16. *Сеньо П. С.* Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: Знання, 2007. – 556 с.
 17. *Формальский А. М.* Об оптимальном по быстродействию управлении поворотом плоского двухзвенника // *Прикл. математика и механика.* – 1996. – **60**, № 2. – С. 250–259.
Те саме: *Formal'skii A. M.* The time-optimal control of the bending of a plane two-link mechanism // *J. Appl. Math. Mech.* – 1996. – **60**, No. 2. – P. 243–251.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(96\)00031-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(96)00031-7).
 18. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы: Динамика, управление, оптимизация. – Москва: Наука, 1989. – 368 с.
Те саме: *Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G.* Manipulation robots: Dynamics, control and optimization. – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 268 p.
 19. *Bazaraa M. S., Sherali H. D., Shetty C. M.* Nonlinear programming: Theory and algorithms. – Hoboken, NJ: J. Wiley & Sons, Inc., 2013. – 872 p.
 20. *Berbyuk V. E., Peterson B., Kudyn M. I.* Internal torques of human upper extremity during its optimal motion in vertical plane // In: *Proc. of the 10th Biomechanics Seminar (Göteborg, Sweden)* / Ed. Chr. Högfors. – Göteborg: Chalmers Univ. Technol., 1997. – Vol. 10. – P. 66–83.
 21. *Betts J. T.* Practical methods for optimal control using nonlinear programming. – Philadelphia: SIAM, 2001. – 190 p.
 22. *Fani D., Shahraki E.* Two-link robot manipulator using fractional order PID controllers optimized by evolutionary algorithms // *Biosci. Biotechnol. Research Asia.* – 2016. – **13**, No. 1. – P. 589–598.
doi : <http://dx.doi.org/10.13005/bbra/2075>.
 23. *Khatri M., Khatri P.* Trajectory control of two link robotic manipulator using PID // *Golden Research Thoughts.* – 2013. – **3**, No. 5. – P. 1–7.
www.aygrt.isrj.net.
 24. *Lewis F. L., Dawson D. M., Abdallah C. T.* Robot manipulator control: Theory and practice. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2004. – 614 p.
 25. *Lidberg M., Berbyuk V.* Optimization of controlled motion of closed-loop chain manipulator robots with different degree and type of actuation // *J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA).* – 2002. – **4**, No. 2. – P. 56–73.
 26. *Lochan K., Roy B. K.* Control of two-link 2-DOF robot manipulator using fuzzy logic techniques: a review // In: *Proc. Fourth International Conference on Soft Computing for Problem Solving (SocProS 2014).* – 2015. – Vol. 1. – P. 499–511.
 27. *Mezzadri F., Galligani E.* A Chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods // *Math. Comput. Simulation.* – 2016. – **121**. – P. 95–108.
<https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.08.023>.
 28. *Nagurka M. L., Yen V.* Fourier-based optimal control of nonlinear dynamic systems // *Trans. ASME. J. Dynam. Syst., Meas. Control.* – 1990. – **112**, No. 1. – P. 17–26.
doi:10.1115/1.2894133.
 29. *Roussel L., Canudas-de-Wit C., Goswami A.* Generation of energy optimal complete gait cycles for biped robots // *Proc. 1998-IEEE Int. conf on Robotics & Automation (Leuven, Belgium).* – Vol. 3. – P. 2036–2041.
doi: 10.1109/ROBOT.1998.680615.
 30. *Subhashini P. V. S., Raju N. V. S., Rao G. V.* Modeling, simulation and analysis of a SCARA robot for deburring of circular components // *ARPN J. Eng. Appl. Sci.* – 2014. – **9**, No. 4. – P. 398–404.
www.arpnjournals.com.
 31. *Tohidi E., Samadi O. R. N., Farahi M. H.* Legendre approximation for solving a class of nonlinear optimal control problems // *J. Math. Finance.* – 2011. – **1**, No. 1. – P. 8–13.
doi: 10.4236/jmf.2011.11002 .

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ОПЕРАЦИЙ ДВУХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

Исследуется задача оптимизации движений двухзвеного манипулятора, который под действием управлений (моменты сил в шарнирах) выполняет транспортную операцию. Начальное и конечное положения захвата манипулятора, а также продолжительность операции считаются заданными. Качество движения манипулятора оценивается квадратичным функционалом. Учитываются возможные конфигурации манипулятора в начале и в конце операции. Предложен алгоритм построения субоптимального решения задачи, базирующийся на параметризации угловых координат манипулятора суммой кубического полинома и конечного тригонометрического ряда, а также использовании методики обратных задач динамики и численных процедур нелинейного программирования. Проанализировано влияние конфигураций манипулятора и параметров тригонометрического ряда на характеристики субоптимального процесса.

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF TRANSPORT OPERATIONS OF TWO-LINK MANIPULATOR

The problem of motions optimization for a two-link manipulator, which performs a transport operation under control stimuli (torques in the joints) is investigated. It is assumed, that the initial and final positions of the gripping manipulator, as well as the duration of the operation are given. The quality of the manipulator motion is evaluated via a quadratic functional. The possible configuration of manipulator at the beginning and the end of the operation are considered. The algorithm of constructing suboptimal solution of the problem, which is based on the parameterization of angular coordinates of the manipulators by the sum of cubic polynomial and finite trigonometric series as well as on the use of method of inverse dynamic problems and the numerical procedures of the nonlinear programming is proposed. The effect of the configurations of manipulator and parameters of trigonometric series on the characteristics of the suboptimal process is analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
26.10.16