УДК 539.3

В. Ф. Кондрат[1], О. Р. Грицина[2]

РІВНЯННЯ ЛОКАЛЬНО ҐРАДІЄНТНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТОТЕРМОМЕХАНІКИ ПОЛЯРИЗОВНИХ НЕФЕРОМАГНІТНИХ ТІЛ ЗА ВРАХУВАННЯ КВАДРУПОЛЬНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ МОМЕНТІВ

Сформульовано повну систему співвідношень локально ґрадієнтної електромагнітотермомеханіки твердих електропровідних неферомагнітних поляризовних середовищ. Нелокальність визначальних співвідношень розробленої математичної моделі зумовлена врахуванням у поляризаційному струмі квадрупольних електричних моментів. Наслідком такого врахування є розширення простору параметрів термодинамічного стану тіла парою додаткових спряжених параметрів – квадрупольним моментом і ґрадієнтом вектора напруженості електричного поля. Показано, що розроблена модель враховує електромеханічну взаємодію для матеріалів високої симетрії (ізотропних матеріалів) і описує флексоелектричний і термополяризаційний ефекти. Записано ключову систему рівнянь моделі для фізично та геометрично лінійного середовища.

Вступ. У праці [12], мабуть, уперше показано, що електричні моменти і відповідні ґрадієнти вектора напруженості електричного поля є спряженими параметрами стану системи, що містить заряди. Надалі це було використано іншими авторами [9–21] для побудови нелокального типу математичних моделей електромагнітної механіки деформівних твердих діелектриків. Такі дослідження ґрунтувалися на постулаті про залежність внутрішньої енергії тіла від електричних моментів і ґрадієнтів вектора напруженості електричного поля. Це означає, зокрема, врахування неоднорідності фізично малого елемента тіла. Метою пропонованої роботи є показати, що інформація про таку неоднорідність і залежність локального стану тіла від ґрадієнтів вектора напруженості електричного поля може міститися у відповідних складових електричного (поляризаційного) струму. Це реалізовано шляхом урахування у поляризаційному струмі квадрупольних електричних моментів, що дозволило у підсумку отримати нелокального типу визначальні співвідношення для неферомагнітних твердих тіл, здатних до поляризації.

1. Об'єкт дослідження. Розглядаємо ізотропне термопружне поляризовне неферомагнітне тіло, яке займає область (V) евклідового простору та обмежене гладкою поверхнею (Σ). У тілі протікають механічні, теплові та електромагнітні процеси, спричинені зовнішніми діями. При цьому у межах фізично малих елементів тіла можна спостерігати зміну їх структури (розподілу частинок, з яких складається тіло). Така зміна буде проявлятися, зокрема, у виникненні електричного (поляризаційного) струму густини $\mathbf{J}_{es}$. Вважаємо, що електричний поляризаційний струм пов'язаний зі зміною не лише дипольного, але і квадрупольних електричних моментів.

Усі поля, які характеризують процеси, що протікають у тілі, повинні задовольняти фундаментальні закони фізики – балансу маси, імпульсу, моменту імпульсу, ентропії та енергії, а також рівняння Максвелла.

2. Рівняння балансу маси. У системах, які включають матеріальні частинки та електромагнітне поле, маса переноситься обома складовими. Однак вклад маси електромагнітного поля у загальний баланс маси таких систем може ставати вагомим тільки для дуже високоенергетичних полів, які тут не будемо розглядати. Маса тіла у цьому випадку буде змінюватися тільки за рахунок її перенесення через поверхню тіла матеріальними частинками. Тоді рівняння балансу маси [3] запишемо в інтегральній

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)} \rho\, dV = -\int\limits_{(\Sigma)} \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, d\Sigma$$

або у локальній формі

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\,. \tag{1}$$

Тут ρ – густина маси, $\mathbf{v}$ – вектор швидкості конвективного руху, t – час, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні (Σ), ∇ – оператор Гамільтона.

3. Рівняння електродинаміки. Рівняння електродинаміки мають вигляд [1, 6, 7]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{ef}}\,,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e\,. \tag{2}$$

Тут $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ – вектори індукції і напруженості магнітного поля; $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ – вектори напруженості та індукції електричного поля; $\mathbf{J}_{\mathrm{ef}} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_{ed} + \mathbf{J}_{es}$ – вектор густини повного електричного струму, $\mathbf{J}_e$ – вектор густини електричного струму, пов'язаного з переміщенням вільних зарядів, $\mathbf{J}_{ed} = \varepsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$, $\mathbf{J}_{es}$ – вектор густини струму, зумовленого впорядкуванням зв'язаних зарядів (поляризаційний струм); ρ_e – густина вільного електричного заряду; ε_0 – електрична стала; «$\cdot$» і «$\times$» – символи скалярного та векторного добутків. Для неферомагнітного середовища, яке розглядаємо, можемо записати, що $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, де μ_0 – магнітна стала.

Введемо вектор $\mathbf{\Pi}_e$ електричної поляризації, пов'язаний з вектором $\mathbf{J}_{es}$ співвідношенням [1]

$$\mathbf{\Pi}_e = \int_0^t \mathbf{J}_{es}\, dt, \qquad \mathbf{J}_{es} = \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}\,.$$

Тоді для вектора $\mathbf{J}_{\mathrm{ef}}$ густини повного електричного струму маємо

$$\mathbf{J}_{\mathrm{ef}} = \mathbf{J}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}\,.$$

Величину $\rho_{e\pi}$, яка має розмірність густини електричного заряду і яку називають густиною наведеного заряду, визначаємо за формулою [1]

$$\rho_{e\pi} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e\,.$$

Для $\rho_{e\pi}$ справджується рівняння

$$\frac{\partial \rho_{e\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{es} = 0\,,$$

яке має форму закону збереження наведеного електричного заряду [1, 2].

Вектор поляризації $\mathbf{\Pi}_e$ пов'язаний з дипольним моментом $\mathbf{P}$ і тензором електричного квадрупольного моменту $\hat{\mathbf{Q}}$ формулою [8]

$$\mathbf{\Pi}_e = \mathbf{P} - \frac{1}{6} \nabla \cdot \hat{\mathbf{Q}}\,.$$

Для вектора $\mathbf{D}$ електричної індукції маємо [8]

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{\Pi}_e = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} - \frac{1}{6} \nabla \cdot \hat{\mathbf{Q}}\,.$$

4. Рівняння балансу енергії електромагнітного поля. Із рівнянь Максвелла випливає співвідношення, яке трактують як рівняння балансу енергії електромагнітного поля [1, 2]

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_e + \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} = 0\,. \tag{3}$$

Тут $U_e = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0^{-1}\mathbf{B}^2\right)$ – густина енергії електромагнітного поля, $\mathbf{S}_e = \mu_0^{-1}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ – густина потоку енергії електромагнітного поля [2].

Зазначимо, що останній доданок у формулі (3) відображає вплив електромагнітного поля на речовину, яка разом з полем складає єдину матеріальну систему. Перепишемо цей доданок таким чином, щоб у нього входили тензор квадрупольного моменту $\widehat{\mathbf{Q}}_*$ і вектори $\mathbf{E}_*$, $\mathbf{P}_*$, $\mathbf{J}_{e*}$ напруженості електричного поля, дипольного моменту та густини електричного струму в системі відліку центрів мас, яка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ відносно лабораторної системи відліку. Для неферомагнітного тіла, яке розглядаємо в нерелятивістському наближенні, маємо

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}, \qquad \widehat{\mathbf{Q}}_* = \widehat{\mathbf{Q}}, \qquad \mathbf{P}_* = \mathbf{P}, \qquad \mathbf{J}_{e*} = \mathbf{J}_e - \rho_e \mathbf{v}.$$

Тут вектор $\mathbf{J}_{e*}$ трактуємо як вектор густини струму провідності. Враховуючи це, а також рівняння балансу маси (1), після деяких перетворень рівняння (3) балансу енергії електромагнітного поля запишемо так:

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S}_e + \mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_* + \rho\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\mathbf{E}_* + \rho\frac{d\widehat{\mathbf{q}}}{dt} : (\nabla\otimes\mathbf{E}_*) +$$
$$+ \mathbf{v}\cdot\left[\rho_e\mathbf{E}_* + \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}\right)\times\mathbf{B} + \rho p_j \nabla E_{*j} + \rho q_{kj}\nabla(\nabla_k E_{*j})\right] -$$
$$- \nabla\cdot\left\{\left[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_* + \widehat{\mathbf{q}} : (\nabla\otimes\mathbf{E}_*)\right]\rho\mathbf{v}\right\} = 0. \qquad (4)$$

Тут $\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho$, $\widehat{\mathbf{q}} = \widehat{\mathbf{Q}}/6\rho$, p_j, E_{*j}, q_{kj} – компоненти векторів $\mathbf{p}$, $\mathbf{E}_*$ і тензора $\widehat{\mathbf{q}}$, «$\otimes$» – символ тензорного добутку, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla$ – повна похідна за часом.

5. Рівняння балансу ентропії. Швидкість зміни ентропії елемента тіла визначається притоком ентропії ззовні, конвективною складовою потоку ентропії через поверхню тіла, виникненням ентропії σ_s за одиницю часу та джерелами тепла $\Re$. В інтегральній формі рівняння балансу ентропії має вигляд [3]

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)} \rho s\, dV = -\oint_{(\Sigma)} \mathbf{J}_s\cdot\mathbf{n}\, d\Sigma - \oint_{(\Sigma)} \rho s\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, d\Sigma + \int_{(V)} \sigma_s\, dV + \int_{(V)} \rho\frac{\Re}{T}\, dV, \qquad (5)$$

де s – питома ентропія, $\mathbf{J}_s$ – вектор густини потоку ентропії, T – абсолютна температура.

Локальна форма рівняння (5) є такою:

$$\rho\frac{ds}{dt} = -\nabla\cdot\mathbf{J}_s + \sigma_s + \rho\frac{\Re}{T}.$$

Звідси, враховуючи співвідношення $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_q/T$, яке пов'язує вектори густин потоків ентропії $\mathbf{J}_s$ і тепла $\mathbf{J}_q$, маємо

$$\rho T\frac{ds}{dt} = -\nabla\cdot\mathbf{J}_q + \frac{1}{T}\mathbf{J}_q\cdot\nabla T + T\sigma_s + \rho\Re. \qquad (6)$$

6. Рівняння балансу енергії системи «тіло – електромагнітне поле». Приймаємо, що повна енергія системи у довільний момент часу є сумою внутрішньої ρu (u – питома внутрішня енергія) та кінетичної $\rho\mathbf{v}^2/2$ енергій, а також енергії електромагнітного поля U_e. Її зміна відбувається внаслідок конвективного перенесення енергії $\rho(u + \mathbf{v}^2/2)$ через поверхню, роботи поверхневих зусиль $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}$, потоків тепла $\mathbf{J}_q$ та енергії електромагнітного поля $\mathbf{S}_e$, дії масових сил $\mathbf{F}$ і розподілених теплових джерел $\Re$. Тоді запишемо

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\left(\rho u + U_e + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\right)dV = \oint\limits_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\mathbf{v} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{S}_e + \mathbf{J}_q\right]\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma + \int\limits_{(V)}\left(\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \rho\Re\right)dV\,, \tag{7}$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напружень Коші.

Якщо використати теорему Остроградського – Ґаусса [5] і врахувати рівняння балансу маси (1), енергії електромагнітного поля (4) та ентропії (6), то з (7) отримаємо рівняння балансу енергії у локальній формі:

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho T\frac{ds}{dt} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt} + \rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \rho(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E}_*) : \frac{d\hat{\mathbf{q}}}{dt} +$$

$$+ \mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_* - \mathbf{J}_q\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T} - T\sigma_s + \mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{F}_e + \rho\mathbf{F}\right). \tag{8}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{e}} = \left[\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^{\top}\right]/2$ – тензор деформації, $\mathbf{u}$ – вектор переміщення, індексом « $\top$ » позначено операцію транспонування тензора,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho\left[(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_*) + \rho\hat{\mathbf{q}} : (\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E}_*)\right]\hat{\mathbf{I}}\,,$$

$$\mathbf{F}_e = \rho_e\mathbf{E}_* + \left(\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial(\boldsymbol{\Pi}_e)}{\partial t}\right)\times\mathbf{B} + \rho p_j\boldsymbol{\nabla}E_{*j} + \rho q_{kj}\boldsymbol{\nabla}(\nabla_k E_{*j})\,.$$

Перейдемо до нової термодинамічної функції $f = u - Ts - \mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p} - \rho\hat{\mathbf{q}} : (\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E})$ – узагальненої вільної енергії Гельмгольца. Тоді з (8) отримаємо таке балансове співвідношення:

$$\rho\frac{df}{dt} = -\rho s\frac{dT}{dt} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt} - \rho\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{E}_*}{dt} - \rho\hat{\mathbf{q}} : \frac{d(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E}_*)}{dt} +$$

$$+ \mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_* - \mathbf{J}_q\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T} - T\sigma_s + \mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{F}_e + \rho\mathbf{F}\right). \tag{9}$$

Враховуючи інваріантність рівняння (9) відносно просторових трансляцій і приймаючи, що вільна енергія f визначається скалярним T, векторним $\mathbf{E}_*$ та тензорними $\hat{\boldsymbol{e}}$, $\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E}$ параметрами, які є незалежними, тобто $f = f(\hat{\boldsymbol{e}}, T, \mathbf{E}_*, \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E})$, отримуємо узагальнене рівняння Ґіббса

$$df = -s\,dT + \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : d\hat{\boldsymbol{e}} - \mathbf{p}\cdot d\mathbf{E}_* - \hat{\mathbf{q}} : d(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E}_*)\,, \tag{10}$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s = \mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_* - \mathbf{J}_q\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T} \tag{11}$$

та рівняння балансу імпульсу

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{F}_e + \rho\mathbf{F}\,. \tag{12}$$

Зазначимо, що вираз (11) для виробництва ентропії не містить складових, зумовлених поляризацією, оскільки цей процес розглядаємо у наближенні оборотного. Бачимо також, що вільна енергія залежить не тільки від температури T, тензора деформації $\hat{\boldsymbol{e}}$ і вектора $\mathbf{E}_*$ напруженості електричного поля (як у класичних моделях), але і від параметра $\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E}_*$, зумовленого врахуванням квадрупольних електричних моментів.

7. Визначальні співвідношення. ***Рівняння стану.*** З рівняння Ґіббса (10) за незалежності параметрів T, $\hat{\boldsymbol{e}}$, $\mathbf{E}_*$, $\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{E}_*$ випливають такі рівняння стану:

$$s = -\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{\hat{e},\mathbf{E}_*,\nabla\otimes\mathbf{E}_*}, \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho\left.\frac{\partial f}{\partial \hat{e}}\right|_{T,\mathbf{E}_*,\nabla\otimes\mathbf{E}_*},$$

$$\mathbf{p} = -\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{E}_*}\right|_{T,\hat{e},\nabla\otimes\mathbf{E}_*}, \qquad \hat{\mathbf{q}} = -\left.\frac{\partial f}{\partial \nabla\otimes\mathbf{E}_*}\right|_{T,\hat{e},\mathbf{E}_*}. \tag{13}$$

Якщо розвинути вільну енергію f у ряд за збуреннями параметрів стану і для малих збурень обмежитися в цьому розвиненні квадратичними членами, то для ізотропного початково однорідного тіла отримаємо

$$f = f_0 - s_0(T - T_0) + \frac{a_1^\sigma}{2\rho_0} I_{e1}^2 + \frac{a_2^\sigma}{\rho_0} I_{e2} - \frac{1}{2} a_T^s (T - T_0)^2 -$$

$$- \frac{1}{2} a_E^p \mathbf{E}_*^2 + \frac{1}{2} a_1^q I_{E1}^2 - a_2^q I_{E2} + \frac{a_{eT}}{\rho_0} I_{e1}(T - T_0) +$$

$$+ \frac{a_{eE}}{\rho_0} I_{e1} I_{E1} + a_{TE} I_{E1}(T - T_0) + \frac{a_{\sigma q}}{\rho_0} \hat{e} : (\nabla \otimes \mathbf{E}_*). \tag{14}$$

Тут $I_{e1} = \hat{e} : \hat{\mathbf{I}} = e$, $I_{E1} = (\nabla \otimes \mathbf{E}_*) : \hat{\mathbf{I}} = \nabla \cdot \mathbf{E}_*$, $I_{e2} = \hat{e} : \hat{e}$, $I_{E2} = (\nabla \otimes \mathbf{E}_*) : (\nabla \otimes \mathbf{E}_*)$ – перший і другий інваріанти тензорів деформації і ґрадієнта електричного поля відповідно; a_1^σ, a_2^σ, a_T^s, a_E^p, a_1^q, a_2^q, a_{eT}, a_{eE}, a_{TE}, $a_{\sigma q}$ – характеристики матеріалу. Зазначимо, що при записі виразу для вільної енергії приймаємо, що у вихідному стані $\hat{e} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$, $T = T_0$, $s = s_0$, $\mathbf{E}_* = 0$, $\mathbf{p} = 0$, $\nabla \otimes \mathbf{E}_* = 0$, $\hat{\mathbf{q}} = 0$.

Враховуючи подання (14), на основі формул (13) отримаємо такі лінійні рівняння стану:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2a_2^\sigma \hat{e} + a_{\sigma q} \nabla \otimes \mathbf{E} + \left[a_1^\sigma e + a_{eT}(T - T_0) + a_{eE} \nabla \cdot \mathbf{E}\right]\hat{\mathbf{I}},$$

$$s = s_0 + a_T^s (T - T_0) - \rho_0^{-1} a_{eT} e - a_{TE} \nabla \cdot \mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = a_E^p \mathbf{E},$$

$$\hat{\mathbf{q}} = 2a_2^q \nabla \otimes \mathbf{E} - a_{\sigma q} \hat{e} - \left[a_1^q \nabla \cdot \mathbf{E} + \rho_0^{-1} a_{eE} \hat{e} + a_{TE}(T - T_0)\right]\hat{\mathbf{I}}. \tag{15}$$

Відмітимо, що у першому і останньому з рівнянь стану (15) для ізотропного матеріалу містяться члени, які враховують взаємодію механічних і електромагнітних процесів, чого не передбачено у визначальних співвідношення, отриманих у праці [21]. З двох останніх співвідношень системи (15) випливає також, що за обраного модельного опису причиною електричної поляризації

$$\boldsymbol{\pi}_e = \mathbf{p} - \nabla \cdot \hat{\mathbf{q}} = a_E^p \mathbf{E} - 2a_2^q \Delta \mathbf{E} + a_{\sigma q} \nabla \cdot \hat{e} +$$

$$+ a_1^q \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \rho_0^{-1} a_{eE} \nabla e + a_{TE} \nabla T \tag{16}$$

є не тільки електричне поле, але і його просторова неоднорідність і ґрадієнти деформації і температури. Таким чином, визначальні співвідношення (15) передбачають можливість опису флексоелектричного і термополяризаційного ефектів [2, 4].

Кінетичні співвідношення. Подамо рівняння (11) для виробництва ентропії у вигляді

$$\sigma_s = \sum_{k=1}^{2} \mathbf{j}_k \cdot \mathbf{X}_k, \tag{17}$$

де $\mathbf{j}_k$ та $\mathbf{X}_k$ – термодинамічні потоки та сили:

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{J}_{e*}, \quad \mathbf{X}_1 = \frac{1}{T}\mathbf{E}_*, \quad \mathbf{j}_2 = \mathbf{J}_q, \quad \mathbf{X}_2 = -\frac{1}{T^2}\nabla T. \tag{18}$$

Зі співвідношень (17), (18) у лінійному наближенні випливають такі кінетичні рівняння:

$$\mathbf{j}_1 = L_{11}\mathbf{X}_1 + L_{12}\mathbf{X}_2, \qquad \mathbf{j}_2 = L_{21}\mathbf{X}_1 + L_{22}\mathbf{X}_2, \tag{19}$$

де L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21} – кінетичні коефіцієнти. З огляду на принцип Онзагера [3] справджується рівність

$$L_{12} = L_{21}. \tag{20}$$

Враховуючи позначення (18), кінетичні рівняння (19) запишемо у вигляді

$$\mathbf{J}_{e*} = \sigma_e \mathbf{E}_* + \sigma_e \eta \nabla T, \qquad \mathbf{J}_q = -\lambda \nabla T + \pi_t \mathbf{J}_{e*}, \tag{21}$$

де σ_e, λ – коефіцієнти електро- і теплопровідності, коефіцієнти η, π_t характеризують термоелектричні явища. З огляду на рівняння (20) маємо, що $\pi_t = -\eta T_0$.

8. Ключові рівняння у лінійному наближенні. Рівняння балансу маси (1), ентропії (6) та імпульсу (12), співвідношення (2), які відповідають законам Ампера, Фарадея, Ґаусса – Фарадея та Ґаусса – Кулона, визначальні співвідношення (15) і (21) разом із співвідношеннями Коші складають замкнену систему рівнянь нелокальної електромагнітотермомеханіки поляризовних електромагнітних тіл за врахування квадрупольного електричного моменту. Запишемо цю систему в лінеаризованому наближенні відносно функцій переміщення $\mathbf{u}$, температури T, напруженості електричного $\mathbf{E}$ та індукції магнітного $\mathbf{B}$ полів:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= (a_1^\sigma + a_2^\sigma)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + a_2^\sigma \Delta\mathbf{u} + a_{eE}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) + \\ &\quad + a_{\sigma q}\Delta\mathbf{E} + a_{eT}\nabla T + \rho_0 \mathbf{F},\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}a_T^s \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\lambda - \sigma_e \eta \pi_t}{\rho_0 T_0}\Delta T - \frac{\sigma_e \pi_t}{\rho_0 T_0}\nabla\cdot\mathbf{E} + \frac{a_{eT}}{\rho_0}\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial t} + \\ &\quad + a_{TE}\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{E})}{\partial t} + \frac{\Re}{T_0},\end{aligned} \tag{23}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\sigma_e\mathbf{E} + \mu_0\sigma_e\eta\nabla T + \mu_0\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\rho_0 a_1^q \nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) + \\ &\quad + 2\mu_0\rho_0 a_2^q \Delta\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{2}\mu_0\rho_0 a_{eq}\Delta\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \\ &\quad + \mu_0\left(\frac{1}{2}\rho_0 a_{eq} + a_{eE}\right)\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right) + \mu_0\rho_0 a_{eE}\nabla\frac{\partial T}{\partial t},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E} + \rho_0(2a_2^q + a_1^q)\Delta(\nabla\cdot\mathbf{E}) + (\rho_0 a_{eq} + a_{eE})\Delta(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \\ &\quad + \rho_0 a_{eT}\Delta T = \rho_e.\end{aligned} \tag{26}$$

Тут $\varepsilon = \varepsilon_0 - \rho_0 a_E^p$.

Зазначимо, що рівняння руху (22) не містить пондеромоторних сил, а рівняння теплопровідності (23) – джоулевого тепла. Це зумовлено тим, що за вибраного вихідного стану пондеромоторні сили і джоулеве тепло є нелінійними функціями збурень полів. Наслідком врахування залежності вектора поляризації (16) від квадрупольних моментів є поява у рівнянні руху (22) доданків, пропорційних до просторових похідних другого порядку від вектора напруження електричного поля $\mathbf{E}$. Крім того, рівняння (23), (25) і (26) містять доданки, пропорційні до змішаних похідних третього порядку від напруженості електричного поля.

Висновки. Показано, що для побудови моделі електроманітотермомеханіки ґрадієнтного типу достатньо у складовій електричного струму, пов'язаній зі зміною структури середовища (поляризаційному струмі), врахувати електричні моменти вищого порядку. Це зроблено на прикладі врахування квадрупольного моменту. В результаті отримано замкнену систему співвідношень локально ґрадієнтної електромагнітотермомеханіки електропровідного неферомагнітного поляризовного середовища. Показано, що сформульована модель на рівні рівнянь стану враховує електромеханічну взаємодію в ізотропних матеріалах, флексоелектричний і термополяризаційний ефекти.

1. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. – Москва: Наука, 1985. – 400 с.
2. *Бурак Я., Кондрат В., Грицина О.* Основи локально ґрадієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. – 208 с.
3. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1964. – 456 с.

   Те саме: *Groot de S. R., Mazur P.* Non-equilibrium thermodynamics. – Amsterdam: North-Holland, 1962. – x+510 p.
4. *Кондрат В., Грицина О.* Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 7–46.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – Москва: Наука, 1974. – 832 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 620 с.

   Те саме: *Landau L. D., Lifshits E. M.* Electrodynamics of continuous media. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1984. – 460 p.
7. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. – Москва: Наука, 1976. – 616 с.
8. *Федорченко А.* М., Теоретическая физика. Классическая электродинамика: Учеб. пособие. – Киев: Вища шк., 1988. – 280 с.
9. *Bampi F., Morro A.* A variational approach to deformable electromagnetic solids // Acta Phys. Polon. – 1986. – **B17**, No. 11. – P. 937–949.
10. *Eringen A. C., Maugin G. A.* Electrodynamics of continua. Vol. II. Fluids and complex media. – New York etc.: Springer-Verlag, 1990. – xii+364 p.
11. *Hadjigeorgiou E. P., Kalpakides V. K., Massalas C. V.* A general theory for elastic dielectrics. II. The variational approach // Int. J. Non-Linear Mech. – 1999. – **34**, No. 5. – P. 967–980.
12. *Kafadar C. B.* The theory of multipoles in classical electromagnetism // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – **9**, No. 9. – P. 831–853.
13. *Kalpakides V. K., Agiasofitou E. K.* On material equations in second gradient electroelasticity // J. Elasticity. – 2002. – **67**, No. 3. – P. 205–227.
14. *Kalpakidis V. K., Hadjigeorgiou E. P., Massalas C. V.* A variational principle for elastic dielectrics with quadrupole polarization // Int. J. Eng. Sci. – 1995. – **33**, No. 6. – P. 793–801.
15. *Massalas C. V., Kalpakidis V. K., Foutsitzi G.* Some comments on the extended Tiersten's theory of thermoelectroelasticity // Mech. Res. Commun. – 1994. – **21**, No. 4. – P. 343–351.
16. *Maugin G. A.* Nonlocal theories or gradient-type theories: A matter of convenience? // Arch. Mech. – 1979. – **31**, No. 1. – P. 15–26.
17. *Maugin G. A.* The method of virtual power in continuum mechanics: Application to coupled fields // Acta Mech. – 1980. – **35**, No. 1-2. – P. 1–70.
18. *Prechtl A.* Deformable bodies with electric and magnetic quadrupoles // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**, No. 5. – P. 665–680.
19. *Yang J. S., Mao S. X., Yan K., Soh A.-K.* Size effect on the electromechanical coupling factor of a thin piezoelectric film due to a nonlocal polarization law // Scripta Mater. – 2006. – **54**, No. 7. – P. 1281–1286.
20. *Wang X., Pan E., Feng W. J.* Anti-plane Green's functions and cracks for piezoelectric material with couple stress and electric field gradient effects // Eur. J. Mech. - **A**/Solids. – 2008. – **27**, No. 3. – P. 478–486.
21. *Yang X. M., Hu Y. T., Yang J. S.* Electric field gradient effects in anti-plane problems of polarized ceramics // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**, No. 24-25. – P. 6801–6811.

УРАВНЕНИЯ ЛОКАЛЬНО ГРАДИЕНТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОТЕРМОМЕХАНИКИ ПОЛЯРИЗИРУЕМЫХ НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Сформулирована полная система соотношений локально градиентной электромагнитотермомеханики твердых электропроводных неферромагнитных поляризируемых сред. Нелокальность определяющих соотношений разработанной математической модели обусловлена учетом в поляризационном токе квадрупольных электрических моментов. Следствием такого учета является расширение пространства параметров термодинамического состояния тела парой дополнительных сопряженных параметров – квадрупольным моментом и градиентом вектора напряженности электрического поля. Показано, что разработанная модель учитывает электромеханическое взаимодействие для материалов высокой симметрии (изотропных материалов) и описывает флексоэлектрический и термополяризационный эффекты. Записана ключевая система уравнений модели для физически и геометрически линейной среды.

THE EQUATIONS OF LOCAL GRADIENT ELECTROMAGNETOTHERMOMECHANICS OF POLARIZABLE NONFERROMAGNETIC SOLIDS WITH REGARD FOR ELECTRIC QUADRUPOLE MOMENTS

The complete system of relations for local gradient electromagnetothermo-mechanics of electro-conductive non-ferromagnetic polarizable continua is formulated. Non-locality of obtained constitutive equations of proposed mathematical model is due to the electric quadrupole moments in polarization current. As a result the space of parameters of thermodynamic state of the body is expanded by a pair of additional conjugate parameters, namely, by quadrupole moment and by gradient of vector of the electric field intensity. It is shown that the proposed model takes into account the electromechanical interaction for materials of high symmetry (isotropic materials) and describes flexoelectric and thermopolarization effects. The key system of equations is written for physically and geometrically linear medium.

[1] Нац. академія сухопутних військ
ім. гетьмана Перта Сагайдачного, Львів,

[2] Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,

Одержано
22.04.16