УДК 539.3

Г. С. Кіт, Н. М. Івасько

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО ЙОГО МЕЖІ СТРІЧКОВІЙ ОБЛАСТІ

З використанням логарифмічного потенціалу простого шару, термопружного потенціалу переміщень, функції напружень Ері та функції Буссінеска розв'язано двовимірні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності при плоскій деформації півбезмежного тіла за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області (на якій задані температура або тепловий потік). На межі тіла підтримується нульова температура. Досліджено розподіл напружень в області тепловиділення при заданих в ній джерелах тепла сталої інтенсивності і сталій температурі.

Одними з основних методів розв'язування двовимірних задач стаціонарної теплопровідності й термопружності для тіл з тонкими включеннями і тріщинами є метод теорії функцій комплексної змінної (комплексного потенціалу температурного поля і комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі) [2, 8, 9], що дає можливість зводити такі задачі до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші, та метод інтегральних перетворень Фур'є. Але в останньому випадку можуть виникати труднощі при знаходженні зворотного перетворення.

При розв'язуванні таких задач для півпростору зі стрічковими теплоактивними включеннями доцільно використовувати логарифмічний потенціал простого шару, який є уявною частиною інтеграла типу Коші, термопружний потенціал переміщень і функцію напружень Ері або функцію Буссінеска. При формулюванні задачі теплопровідності постулюється наявність джерел тепла на місці включення, потужність яких за заданої температури визначається з інтегрального рівняння з логарифмічним ядром. Для існування обмеженого розв'язку цього рівняння у безмежному тілі загальна потужність теплових джерел повинна дорівнювати нулеві. Функції Ері та Буссінеска дають змогу задовольнити крайові умови.

З використанням інтегрального перетворення Фур'є і сингулярних інтегральних рівнянь розв'язані задачі термопружності для півплощини з періодичною системою перпендикулярних до її межі тріщин [10, 12–14]. Задача теплопровідності й термопружності для безмежного тіла зі стрічковим тепловиділюваним елементом за умов плоскої деформації розв'язана у праці [4] з використанням інтегралів Фур'є і рядів Неймана за функціями Бесселя першого роду.

Термопружний стан, зумовлений джерелом тепла у півпросторі, визначено в [11] за допомогою функції Буссінеска, коли на межі тіла підтримується стала температура. З використанням логарифмічного потенціалу простого шару, термопружного потенціалу переміщень і функції напружень Ері в [1] розв'язана двовимірна задача термопружності за плоскої деформації півбезмежного тіла з перпендикулярною до його межі теплоактивною тріщиною.

У цій роботі розв'язано двовимірну задачу стаціонарної теплопровідності й термопружності для півбезмежного тіла з тепловиділенням у паралельній до його межі стрічковій області, на якій задано температуру або спрямований у протилежні сторони тепловий потік. Межа тіла підтримується при нульовій температурі і вільна від зовнішніх зусиль.

1. Задача теплопровідності. Розглянемо півбезмежне ізотропне тіло за тепловиділення у паралельній до його межі стрічковій області L ширини 2ℓ. У декартовій системі координат xOy (рис. 1) визначимо спочатку розподіл температури у півплощині $y \geq 0$, якщо в точці $x = \xi$, $y = h$ знаходиться джерело тепла сталої інтенсивності w. Для забезпечення нульової температури на межі $y = 0$ доповнимо півплощину до повної площини і в точці $x = \xi$, $y = -h$ помістимо стік тепла такої ж інтенсивності. Тоді [5]

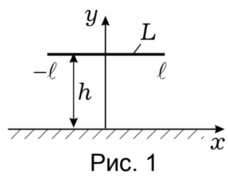

Рис. 1

$$T(x, y) = W \ln \frac{r_2}{r_1}, \tag{1}$$

де

$$W = \frac{w}{2\pi\lambda}, \quad r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-h)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+h)^2},$$

λ − коефіцієнт теплопровідності.

Нехай в області L задано джерела тепла інтенсивності $w(\xi)$. Тоді в системі координат з початком у центрі області L маємо

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\ell}^{\ell} w(\xi) \ln \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y+2h)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} d\xi. \tag{2}$$

Якщо в області L задано температуру $T(x)$, то для визначення потужності теплових джерел $w(\xi)$ із (2) при $y = 0$ маємо інтегральне рівняння в безрозмірних величинах (віднесених до ℓ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} w(\xi) \left(\ln \frac{1}{|x-\xi|} + Q(x-\xi) \right) d\xi = F(x), \qquad |x| < 1, \tag{3}$$

де

$$Q(x-\xi) = \frac{1}{2} \ln ((x-\xi)^2 + 4d^2), \qquad F(x) = \frac{2\lambda}{\ell} T(x), \qquad d = \frac{h}{\ell}.$$

Для побудови розв'язку рівняння (3) подамо потужність теплових джерел у вигляді розвинення за поліномами Чебишова 1-го роду $T_k(x)$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(x). \tag{4}$$

Підставивши (4) у (3) та використавши спектральне співвідношення [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{1}{|x-\xi|} d\xi = \mu_k T_k(x),$$

$$\mu_0 = \ln 2, \quad \mu_k = \frac{1}{k}, \quad k \geq 1, \quad |x| < 1,$$

отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\mu_k T_k(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{Q(x-\xi) T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] = F(x). \tag{5}$$

Рівність (5) помножимо на $\dfrac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, проінтегруємо за змінною x на інтервалі $(-1, 1)$ і використаємо співвідношення ортогональності поліномів Чебишова. В результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k B_{kn} = F_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

де

$$B_{kn} = \tilde{\mu}_k + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{Q(x-\xi)T_k(\xi)T_n(x)}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-x^2}}\,d\xi\,dx\,,$$

$$\tilde{\mu}_0 = \pi\ln 2, \qquad \tilde{\mu}_k = \frac{\pi}{2k}, \qquad k \ge 1\,,$$

$$F_n = \int_{-1}^{1}\frac{F(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Після розв'язання системи (6) чисельним методом знайдемо коефіцієнти b_k.

Рівняння (3) можна розв'язати наближено, якщо різницеве регулярне ядро $Q(x-\xi)$ замінити виродженим. Для цього при $|x-\xi| < 2d$ розкладемо його в ряд Тейлора і подамо у вигляді розвинення $Q(x-\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)\xi^m$. З (3) отримаємо інтегральне рівняння 1-го роду з логарифмічним ядром:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} w(\xi)\ln\frac{1}{|x-\xi|}\,d\xi = f(x), \qquad |x| < 1\,, \tag{7}$$

де

$$f(x) = F(x) - \sum_{m=0}^{\infty} C_m Q_m(x), \qquad C_m = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\xi^m w(\xi)\,d\xi\,.$$

Якщо у розкладі ядра $Q(x-\xi)$ обмежитися двома членами, то

$$Q(x-\xi) = \left(\frac{x-\xi}{2d}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{2d}\right)^4 = \sum_{m=0}^{4} Q_m(x)\xi^m\,,$$

де

$$Q_0(x) = Dx^2(x^2 - 8d^2) + \ln 2d, \qquad Q_1(x) = -4Dx(x^2 - 4d^2)\,,$$

$$Q_2(x) = 2D(3x^2 - 4d^2), \quad Q_3(x) = -4Dx, \quad Q_4(x) = -(64d^4)^{-1} = D\,.$$

За відсутності регулярного ядра ($B_{kn} = \tilde{\mu}_k$) розв'язок системи (6) має вигляд (4), де

$$b_k = \frac{1}{\tilde{\mu}_k}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad k = 0,1,\ldots\,. \tag{8}$$

Підставимо (8) у (4), тоді розв'язок рівняння (7) подамо у вигляді [7]

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{1}{\pi\ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} kT_k(x)\int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi\right]. \tag{9}$$

2. Задача термопружності. Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді суми:

$$u(x,y) = \bar{u}(x,y) + \bar{\bar{u}}(x,y)\,,$$

$$\sigma(x,y) = \bar{\sigma}(x,y) + \bar{\bar{\sigma}}(x,y)\,,$$

де доданки $\bar{u}(x,y)$, $\bar{\sigma}(x,y)$ характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений дзеркально розташованими відносно осі Ox джерелами і стоками тепла, а доданки $\bar{\bar{u}}(x,y)$, $\bar{\bar{\sigma}}(x,y)$ – переміщення і напруження у півплощині $y \geq 0$, які забезпечують виконання умов

$$\sigma_{yy}(x,0) = 0, \qquad \sigma_{xy}(x,0) = 0. \tag{10}$$

Для визначення напружено-деформованого стану тіла використаємо термопружний потенціал переміщень, який задовольняє рівняння Пуассона [5]

$$\Delta\Psi(x,y) = mT, \tag{11}$$

за допомогою якого напруження і переміщення знаходимо за формулами

$$\bar{\sigma}_{xx} = -2G\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}, \qquad \bar{\sigma}_{yy} = -2G\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \qquad \bar{\sigma}_{xy} = 2G\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y},$$

$$\bar{u}_x = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \qquad \bar{u}_y = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \tag{12}$$

де $m = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha$, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення, G – модуль зсуву.

Розв'язок рівняння (11) з урахуванням виразу для температури (1) має вигляд

$$\Psi(x,y) = \frac{mW}{4}\left[r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1 - 4hy\right]. \tag{13}$$

За формулами (12), врахувавши (13), знайдемо

$$\bar{\sigma}_{xx}(x,y) = -Gm\left[T(x,y) - W(x-\xi)^2\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\right],$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x,y) = -Gm\left[T(x,y) + W(x-\xi)^2\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\right],$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(x,y) = GmW(x-\xi)\left(\frac{y+h}{r_2^2} - \frac{y-h}{r_1^2}\right),$$

$$\bar{u}_x(x,y) = \frac{m}{2}(x-\xi)T(x,y),$$

$$\bar{u}_y(x,y) = \frac{m}{2}\left[yT(x,y) + hW(\ln r_2 r_1 - 1)\right]. \tag{14}$$

В результаті з (14) на межі при $y = 0$ маємо

$$\bar{\sigma}_{xx}(x,0) = 0, \qquad \bar{\sigma}_{yy}(x,0) = 0, \qquad \bar{\sigma}_{xy}(x,0) = 2GmhW\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + h^2},$$

$$\bar{u}_x(x,0) = 0, \qquad \bar{u}_y(x,0) = \frac{mhW}{2}\left[\ln\left((x-\xi)^2 + h^2\right) - 1\right]. \tag{15}$$

Отже, одержано розв'язок задачі термопружності для півбезмежного тіла, межа якого закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою ($u_x = 0$, $\sigma_{yy} = 0$).

Якщо межа тіла вільна від навантаження (умови (10)), то для зняття дотичних напружень маємо функцію напружень Ері [5]:

$$F(x,y) = 2GmhWy\ln r_2,$$

за допомогою якої знаходимо

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2GmhW\frac{(3y+2h)(x-\xi)^2 + (y+2h)(y+h)^2}{r_2^4},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2GmhWy\frac{(y+h)^2-(x-\xi)^2}{r_2^4},$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y)=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=-2GmhW(x-\xi)\frac{(x-\xi)^2-y^2+h^2}{r_2^4}. \tag{16}$$

Через функцію напружень Ері не визначаються безпосередньо переміщення. Тут вигідніше використовувати функцію Буссінеска $\Phi(x,y)$, яку подамо у вигляді суми двох гармонічних функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$:

$$\Phi(x,y)=\varphi(x,y)+y\psi(x,y).$$

Згідно з [6]

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y)=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad \bar{\bar{u}}_y(x,y)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-4(1-\nu)\psi,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,y)=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\nu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,y)=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-2(2-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,y)=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right). \tag{17}$$

Щоб задовольнити крайові умови (10), візьмемо [11]

$$\varphi(x,y)=-2mhW(1-\nu)\left((y+h)(\ln r_2-1)-(x-\xi)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h}\right),$$

$$\psi(x,y)=-mhW\ln r_2. \tag{18}$$

Підставивши (18) у (17), отримаємо формули для напружень (16) і знайдемо переміщення:

$$\bar{\bar{u}}_x(x,y)=-mhW\left(\frac{y(x-\xi)}{r_2^2}-2(1-\nu)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{y+h}\right),$$

$$\bar{\bar{u}}_y(x,y)=-mhW\left(\frac{y(y+h)}{r_2^2}-(1-2\nu)\ln r_2\right). \tag{19}$$

В результаті з (16) і (19) на межі при $y=0$ маємо

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x,0)=\frac{4Gmh^2W}{(x-\xi)^2+h^2},\qquad \bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x,0)=0,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x,0)=-2GmhW\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+h^2},$$

$$\bar{\bar{u}}_x(x,0)=2mhW(1-\nu)\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{h},$$

$$\bar{\bar{u}}_y(x,0)=\frac{mhW}{2}(1-2\nu)\ln\left((x-\xi)^2+h^2\right). \tag{20}$$

Як бачимо з (15) і (20), крайові умови (10) виконуються.

З (14), (16) і (19) отримаємо переміщення і напруження в області тепловиділення джерелами тепла інтенсивності $w(\xi)$ в системі координат з початком у центрі області L:

$$u_x(x,0) = \frac{m}{4\pi\lambda} \int_{-\ell}^{\ell} w(\xi) \left[(x-\xi) \left(\ln \frac{r_0}{|x-\xi|} - \frac{2h^2}{r_0^2} \right) + \right.$$

$$\left. + 4h(1-\nu) \operatorname{arctg} \frac{x-\xi}{2h} \right] d\xi ,$$

$$u_y(x,0) = \frac{mh}{4\pi\lambda} \int_{-\ell}^{\ell} w(\xi) \left(4(1-\nu) \ln r_0 - 1 - \frac{4h^2}{r_0^2} \right) d\xi ,$$

$$\sigma_{xx}(x,0) = -mG \left(T(x) - \frac{h^2}{\pi\lambda} \int_{-\ell}^{\ell} w(\xi) \frac{3r_0^2 - 8h^2}{r_0^4} d\xi \right) ,$$

$$\sigma_{yy}(x,0) = -mG \left(T(x) - \frac{h^2}{\pi\lambda} \int_{-\ell}^{\ell} w(\xi) \frac{r_0^2 + 8h^2}{r_0^4} d\xi \right) ,$$

$$\sigma_{xy}(x,0) = \frac{4mh^3G}{\pi\lambda} \int_{-\ell}^{\ell} w(\xi) \frac{x-\xi}{r_0^4} d\xi , \tag{21}$$

де $r_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + 4h^2}$.

3. Результати числових досліджень. Розглянемо приклад, коли в області тепловиділення L задано тепловий потік $w(x) = w_0 = \text{const}$. Тоді з (3) і (21) температуру і напруження знаходимо аналітично:

$$T^*(x) = 2d \cdot \theta(x,d) + (x+1) \ln \frac{\sqrt{(x+1)^2 + 4d^2}}{|x+1|} -$$

$$- (x-1) \ln \frac{\sqrt{(x-1)^2 + 4d^2}}{|x-1|} ,$$

$$\sigma_{xx}^*(x,0) = -T^*(x) + 2d \cdot \theta(x,d) - 2d^2 H(x,d) ,$$

$$\sigma_{yy}^*(x,0) = \sigma_{xx}^*(x,0) + 4d^2 H(x,d) ,$$

$$\sigma_{xy}^*(x,0) = -4d^3 \left[\frac{1}{(x+1)^2 + 4d^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 4d^2} \right] , \tag{22}$$

де

$$\theta(x,d) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2d} - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2d} ,$$

$$H(x,d) = \frac{x+1}{(x+1)^2 + 4d^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + 4d^2} ,$$

$$T^*(x) = \frac{2\pi\lambda}{\ell w_0} T(x), \qquad \sigma_{ij}^*(x,y) = \frac{2\pi\lambda}{mG\ell w_0} \sigma_{ij}(x,y) .$$

На рис. 2 наведено розподіл температури $T^*(x)$ при віддаленні області тепловиділення від межі $(d = h/\ell = 0.5, 0.8, 1.0, 2.0)$. При цьому температура збільшується і для її обмеженості необхідно, щоб сумарна потужність теплових джерел дорівнювала нулеві.

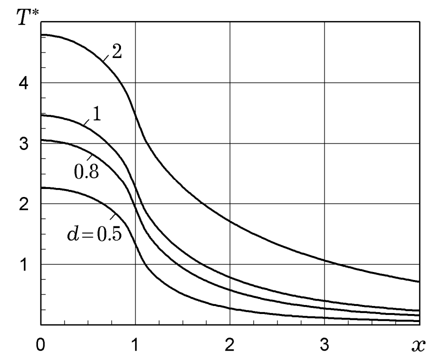

Рис. 2

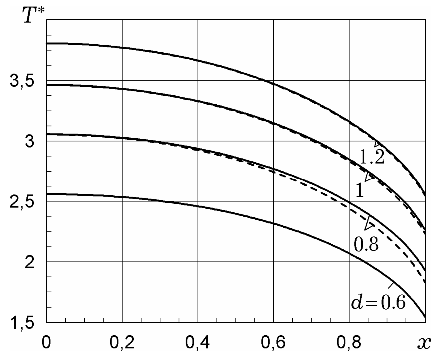

Рис. 3

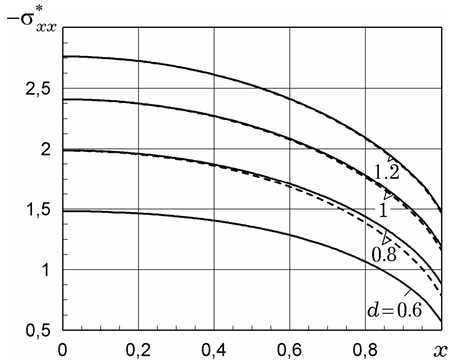

Рис. 4

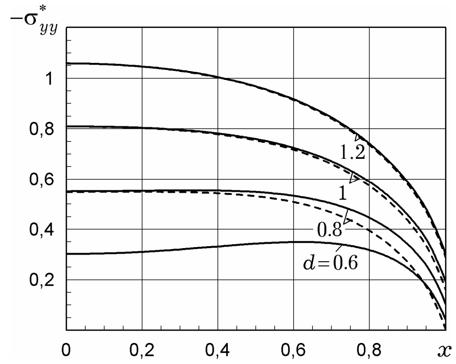

Рис. 5

На рис. 3 – рис. 5 відповідно подано розподіл температури $T^*(x)$ і нормальних напружень $\sigma^*_{ij}(x,y)$ в області тепловиділення $(0 < x < 1)$ для значень $d = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$. Суцільними лініями зображено точні значення, обчислені за формулами (22), а штриховими – наближені, отримані за допомогою розкладу ядра $Q(x-\xi)$ у ряд Тейлора. Як бачимо, вже при $d \geq 0.8$ точні і наближені значення температури та напружень збігаються.

На рис. 6 наведено розподіл температури $T^*(x)$ і нормальних напружень $\sigma^*_{ij}(x,y)$ в центрі області тепловиділення $(x = 0)$. При віддаленні від межі тіла температура та нормальні напруження зростають.

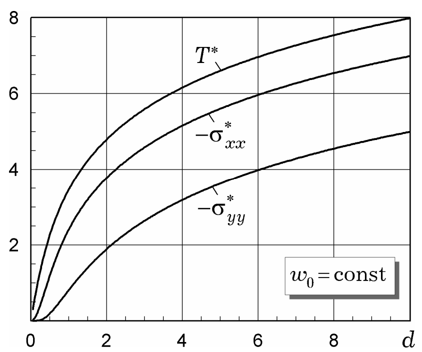

Рис. 6

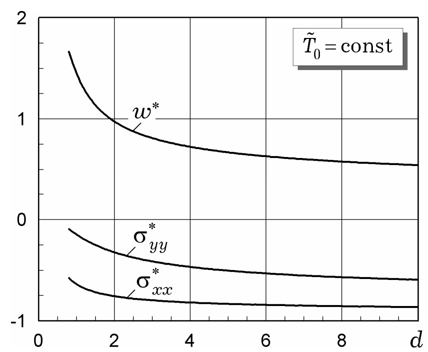

Рис. 7

Розглянемо інший приклад, коли в області тепловиділення задано сталу температуру $T(x) = \tilde{T}_0 = \mathrm{const}$. Тоді із (9), врахувавши (8), знаходимо потужність теплових джерел $w(x)$:

$$w(x) = \frac{2\lambda\tilde{T}_0 b_0}{\ell\sqrt{1-x^2}}\left[1 + \frac{8(1-2d^2)}{128d^4-3}T_2(x) + \frac{1}{128d^4}T_4(x)\right], \tag{23}$$

де

$$b_0 = \left[\ln 4d + \frac{1}{8d^2} - \frac{1}{32d^4} + \frac{1-2d^2}{2d^2(128d^4-3)}\right]^{-1}.$$

Підставивши (23) у (21), чисельно визначаємо переміщення і напруження в області тепловиділення.

Для цього прикладу на рис. 7 при $x = 0$ подано розподіл джерел тепла $w^*(x) = w(x)\dfrac{\ell}{2\lambda\tilde{T}_0}$, де $w(x)$ обчислено за (23), і нормальних напружень $\sigma_{ij}^*(x,y) = \dfrac{\ell\sigma_{ij}(x,y)}{2\lambda\tilde{T}_0}$. При віддаленні області тепловиділення від межі тіла вони прямують до сталих величин.

Висновки. Отримано замкнутий розв'язок двовимірної задачі термопружності для півбезмежного тіла, що нагрівається стаціонарним джерелом тепла, із незакріпленою межею за нульової температури на ній. Співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Гріна, використано для визначення термопружного стану, зумовленого нагрівом тіла джерелами тепла, розподіленими по паралельній до межі стрічковій області.

Наведеними формулами описується також напружений стан чверть простору $x \ge 0$, $y \ge 0$, межа $x = 0$ якого за парної функції $w(x)$ теплоізольована і гладко закріплена ($u_x = 0$, $\sigma_{xy} = 0$), а за непарної функції – межа гнучко закріплена ($u_y = 0$, $\sigma_{xx} = 0$) за нульової температури на ній.

Формули (1) і (3) можна використати при розв'язуванні задач електростатики для півпростору із нульовим електричним потенціалом на межі, коли у стрічковій області задано електричні заряди $w(\xi)$. Функція (2) описує електричний потенціал у тілі.

Поздовжній зсув тіла є еквівалентним до двовимірної задачі стаціонарної теплопровідності [3]. Тому розв'язок наведеної тут задачі теплопровідності можна використати при дослідженні напруженого стану півпростору при поздовжньому зсуві, якщо температурі $T(x,y)$ поставити у відповідність переміщення $u_z(x,y)$, тепловим потокам – дотичні напруження, джерелу тепла – зосереджену силу, а коефіцієнту теплопровідності – модуль зсуву.

1. *Кит Г. С., Ивасько Н. М.* Плоская деформация полубесконечного тела с перпендикулярной к его границе теплоактивной трещиной // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 30–37.
2. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 280 с.
3. *Кіт Г. С.* Про аналогію між поздовжнім зсувом і стаціонарною теплопровідністю тіл з включеннями та тріщинами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1977. – № 4. – С. 334–338.
4. *Кіт Г. С., Галазюк О. В.* Плоска деформація тіла зі стрічковим тепловиділювальним елементом // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2012. – **48**, № 1. – С. 26–32.
   Те саме: *Kit H. S., Halazyuk O. V.* Plane deformation of a body containing a ribbon fuel element // Mater. Sci. – 2012. – **48**, No. 1. – P. 20–28.
5. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 168 с.
   Те саме: *Melan E., Parkus H.* Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 S.

6. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
   То же: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon Press, 1962. – xii+628 p.
7. *Попов Г. Я., Реут В. В., Моісеєв М. Г., Вайсфельд Н. Д.* Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів: Навч. посібник. – Одеса: Астропринт, 2010. – 116 с.
8. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.
9. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
10. *Feng Y., Jin Z.* Thermal fracture of functionally graded plate with parallel surface cracks // Acta Mech. Solida Sinica. – 2009. – **22**, No. 5. – P. 453–464.
11. *Min-zhong W., Ke-fu H.* Thermoelastic problems in the half space – An application of the general solution in elasticity // Appl. Math. Mech. – 1991. – **12**, No. 9. – P. 849–862.
12. *Rizk Abd El-Fattah A.* Transient stress intensity factors for periodic array of cracks in a half-plane due to convective cooling // J. Therm. Stresses. – 2003. – **26**, No. 5. – P. 443–456.
13. *Ueda S., Ando J.* Thermal mechanical response of elastic half-plane with infinite row of parallel cracks under uniform heat flux // JSME. Int. J. **A**-Solid M. – 2006. – **49**, No. 2. – P. 250–257.
14. *Yildirim B., Kutlu Ö., Kadioğlu S.* Periodic crack problem for a functionally graded half-plane an analytic solution // Int. J. Solids Struct. – 2011. – **48**, No. 21. – P. 3020–3031.

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ К ЕГО ГРАНИЦЕ ЛЕНТОЧНОЙ ОБЛАСТИ

С использованием логарифмического потенциала простого слоя, термоупругого потенциала перемещений, функции напряжений Эри и функции Буссинеска решены двумерные задачи стационарной теплопроводности и термоупругости при плоской деформации полубесконечного тела при тепловыделении в параллельной к его границе ленточной области (на которой заданы температура или тепловой поток). Граница тела поддерживается при нулевой температуре. Исследовано распределение напряжений в области тепловыделений при заданных в ней источниках тепла постоянной интенсивности и постоянной температуре.

TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A HALF-SPACE WITH HEAT RELEASE ON A RIBBON-LIKE DOMAIN PARALLEL TO ITS BOUNDARY

Using a logarithmic potential of a simple layer, thermoelastic displacement potential, Airy stress function and Boussinesq function, the two-dimensional problems of stationary heat conduction and thermoelasticity are solved for plane deformation of semi-infinite solid with heat release on a parallel to its boundary ribbon-like domain (where temperature or heat flux are given). The boundary of the body is maintained at zero temperature. The stress distribution in the domain of heat release under given in it the heat sources of constant intensity and constant temperature is investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.08.16