УДК 514:517.53

Л. Л. Безкоровайна

ГЕОМЕТРИЧНІ АСПЕКТИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Досліджується пара поверхонь, асоційованих з аналітичною в області G функцією. Знайдено залежності між коефіцієнтами перших (других) основних квадратичних форм цих поверхонь і доведено теореми про їх інваріантність відносно конформного перетворення.

Вступ. Ріман у своїй знаменитій дисертації у 1851 р. започаткував обґрунтування геометричних питань теорії аналітичних функцій.

Аналітична в області G функція

$$w(z) = u(x,y) + iv(x,y)\,, \tag{1}$$

де $z = x + iy$, має дивну геометричну властивість конформно відображати область G комплексної змінної z на відповідну область комплексної змінної w [2]. Метод конформних відображень, один з найважливіших геометричних методів, застосовується у багатьох областях математики, фізики тощо.

Стрибок у розвитку зазначених теорій відбувся із введенням поняття простору багатьох комплексних змінних і спричинив їх узагальнення у різних напрямах, які природно розширили коло питань геометричного характеру. Наприклад, простір аналітичних функцій Гарді узагальнює L^p-простір [7, 8]. Поновилися геометричні розробки гармонічних відображень і їх узагальнень [18, 19, 22].

Конформна геометрія на многовидах сьогодні вивчається у численних дослідженнях [9, 11, 21]. Вводиться і досліджується [10] поняття подвійних конформно топологічних інваріантів метричних просторів. У [16] до конформного відображення застосовується метод чисельного моделювання.

Узагальненими аналітичними функціями І. Н. Векуа назвав розв'язки певних класів системи двох диференціальних рівнянь першого порядку з двома невідомими, які узагальнюють систему Коші – Рімана. Для них зберігається ряд основних топологічних і інших властивостей аналітичних функцій однієї змінної [1]. Узагальнені аналітичні функції застосовуються в теорії деформацій поверхонь, у теоріях оболонок і квазіконформних відображень. У роботах [12, 13] розкриваються геометричні аспекти узагальнених аналітичних функцій.

Отже, аналітична функція багата на різнопланові геометричні тлумачення. Навіть окремі її елементи та складові мають свої геометричні інтерпретації.

Введемо поверхні

$$Z = u(x,y)\,, \tag{2}$$

$$Z = v(x,y)\,, \tag{3}$$

$$Z = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}\,, \tag{4}$$

де $x^1 = x$, $x^2 = y$, Z – декартові координати точки у тривимірному евклідовому просторі E^3.

В. К. Дзядик у праці [3] встановив, що трійка поверхонь (2), (3), (4) над однією й тією ж областю має рівні площі і на основі цього довів теорему, яка обґрунтовує геометричне означення аналітичних функцій. Він же показав, що поверхні (2), (3) мають рівні ґауссові кривини.

У роботі [17] були виведені формули для середньої і ґауссової кривин цих поверхонь, кривин ліній рівня $u(x,y) = c$, $v(x,y) = c$, геодезичних кривин. У [20] автори відзначають прості геометричні властивості відповідності між поверхнями (2), (3).

У [15] виявлено, що в теоремі В. К. Дзядика поверхня (4) може бути замінена поверхнею $Z = \varphi(u, v)$, де $\varphi(u, v)$ – будь-яка функція класу $C^1(G)$, що задовольняє рівняння $(\partial_u \varphi)^2 + (\partial_v \varphi)^2 = 1$ (див. [14]).

У роботі [5] Ю. Ю. Трохимчук отримав узагальнення геометричного критерію аналітичності функцій, у якому поверхню (4) замінив поверхнею $Z = au + bv$, де a і b – відмінні від нуля сталі такі, що $a^2 + b^2 = 1$. Трохимчук для реалізації послаблення умов теореми Дзядика використав ряд результатів, отриманих у статті [6].

Надалі поверхні, задані рівняннями (2), (3) і асоційовані з аналітичною функцією $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, будемо називати *дуальними* або, задля конкретності, відповідно u- і v*-поверхнями,* а поверхню (4) – *модульною.*

У цій статті для пари дуальних поверхонь шляхом їх класичного диференціально-геометричного дослідження встановлюємо деякі властивості геометричного характеру. Основні результати випливають зі співставлення перших (других) квадратичних форм пари дуальних поверхонь. Виявлено певні залежності між їх коефіцієнтами, які дозволяють відновити основні квадратичні форми однієї дуальної поверхні за заданими двома основними квадратичними формами, першої і другої, іншої дуальної поверхні. Доведено також теореми про їх інваріантність відносно конформного перетворення.

Основні результати сформульовано в теоремах 1, 5, 7, 8. Вони, зокрема, геометрично підтверджують той загальновідомий факт, що уявну частину аналітичної функції можна виразити через її дійсну частину, і навпаки.

1. Вираження коефіцієнтів першої квадратичної форми однієї дуальної поверхні через коефіцієнти першої квадратичної форми іншої дуальної поверхні.

Теорема 1. *Компоненти* $a_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2$, *метричного тензора дуальної* v*-поверхні можна виразити у відповідних точках через компоненти* g_{ij} u*-поверхні за формулами*

$$a_{11}(x, y) = g_{22}(x, y), \quad a_{12}(x, y) = -g_{12}(x, y), \quad a_{22}(x, y) = g_{11}(x, y). \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. Дуальну u-поверхню (2) подамо у векторно-параметричному вигляді $\overline{r} = (x, y, u(x, y))$ і знайдемо частинні похідні її радіуса-вектора

$$\overline{r}_1 = \overline{r}_x = (1,\, 0,\, u_x), \qquad \overline{r}_2 = \overline{r}_y = (0,\, 1,\, u_y). \tag{6}$$

За відомими формулами $g_{ij} = \overline{r}_i \overline{r}_j$ [4, ч. 1, с. 170] обчислимо компоненти метричного тензора u-поверхні

$$g_{11} = \overline{r}_1^2 = 1 + u_x^2, \qquad g_{12} = \overline{r}_1 \overline{r}_2 = u_x u_y, \qquad g_{22} = \overline{r}_2^2 = 1 + u_y^2. \tag{7}$$

Нехай $\overline{\rho} = (x, y, v(x, y))$ – векторне рівняння дуальної v-поверхні. Врахувавши (7) та умови Коші – Рімана

$$v_x = -u_y, \qquad v_y = u_x, \tag{8}$$

знайдемо тепер компоненти метричного тензора a_{ij} дуальної v-поверхні

$$\overline{\rho}_1 = (1,\, 0,\, v_x) = (1,\, 0,\, -u_y), \qquad \overline{\rho}_2 = (0,\, 1,\, v_y) = (0,\, 1,\, u_x), \tag{9}$$

$$a_{11}(x, y) = \overline{\rho}_1^2 = 1 + v_x^2 = 1 + u_y^2 = g_{22}(x, y),$$

$$a_{12}(x, y) = \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 = v_x v_y = -u_x u_y = -g_{12}(x, y),$$

$$a_{22}(x, y) = \overline{\rho}_2^2 = 1 + v_y^2 = 1 + u_x^2 = g_{11}(x, y). \tag{10}$$

Одержані рівності (10) виражають залежності коефіцієнтів першої основної квадратичної форми дуальної v-поверхні через коефіцієнти першої форми дуальної u-поверхні. Теорему доведено. ♦

Внаслідок симетричності системи рівностей (5) відносно величин g_{ij} і a_{ij} приходимо до такої теореми.

Теорема 2. *Компоненти метричного тензора будь-якої дуальної поверхні можна виразити через компоненти метричного тензора іншої дуальної поверхні за формулами* (5).

Залежність (5), як виявилося, можна поширити на пари поверхонь, асоційованих з деякими неаналітичними функціями. Наприклад, з рівноправності у формулах (5) пари дуальних поверхонь випливає, що функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ у теоремі 1 можна переставити місцями. Це означає, що вони можуть бути «породжені» або аналітичною функцією (1), або неаналітичною функцією комплексної змінної $\tilde{w}(z) = i\overline{w(z)} = v(x,y) + iu(x,y)$.

Справджується також узагальнена

Теорема 3. *Нехай* $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ − *аналітична в області* G *функція. Тоді компоненти метричних тензорів поверхонь, асоційованих з функціями комплексних змінних* $\tilde{w}(z) = \pm u(x,y) \pm iv(x,y)$, $\tilde{w}(z) = \pm v(x,y) \pm$ $\pm iu(x,y)$, *при будь-яких комбінаціях знаків як за умов Коші − Рімана* (8), *так і за умов* $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$, *задовольняють формули* (5).

Д о в е д е н н я цієї теореми базується на тому, що зміна знака при u або при v у формулах (2), (3) приводить до симетричної поверхні (з тією ж самою метрикою).

Теорема 4. *Пара дуальних поверхонь* (2), (3) *і відповідна модульна поверхня* (4), *що визначені над областю* G, *знаходяться у взаємно однозначному еквіареальному відображенні.*

Д о в е д е н н я. Перші основні квадратичні форми дуальних u- і v-поверхонь, згідно з формулами (7), (10), відповідно набувають вигляду

$$\mathrm{I} = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2 =$$
$$= (1 + u_x^2)dx^2 + 2u_x u_y dxdy + (1 + u_y^2)dy^2,$$
$$\mathrm{I}_\rho = a_{11}dx^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dy^2 = g_{22}dx^2 - 2g_{12}dxdy + g_{11}dy^2 =$$
$$= (1 + v_x^2)dx^2 + 2v_x v_y dxdy + (1 + v_y^2)dy^2 =$$
$$= (1 + u_y^2)dx^2 - 2u_x u_y dxdy + (1 + u_x^2)dy^2.$$

Дискримінанти цих квадратичних форм у відповідних точках рівні між собою:

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1 + u_x^2 + u_y^2,$$
$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1 + u_x^2 + u_y^2 = g.$$

Разом з тим, якщо модульну поверхню (4) задати радіус-вектором $\overline{R} = \left(x, y, \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}\right)$, $x, y \in G$, то можна переконатися в тому, що дискримінант її першої квадратичної форми також дорівнює виразу $1 + u_x^2 + u_y^2 = g = a$ (див. [3]).

Таким чином, між точками трійки поверхонь у зазначених параметризаціях встановлено взаємно однозначне відображення, яке зберігає площі будь-якої фігури поверхні. Таке відображення є *еквіареальним* [4, ч. 2, с. 129]. Теорему доведено. ♦

2. Доведення інваріантності системи рівностей (5) при конформному перетворенні.

Лема 1. *Система рівностей* (5) *еквівалентна такій*:

$$\bar{r}_{\bar{z}}^2 + \bar{\rho}_{\bar{z}}^2 = 0, \qquad \bar{r}_{\bar{z}}\bar{r}_z - \bar{\rho}_{\bar{z}}\bar{\rho}_z = 0, \qquad \bar{r}_z^2 + \bar{\rho}_z^2 = 0. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Подібно, як І. Н. Векуа [1, с. 28], введемо диференціальні оператори першого порядку

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y} = -i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{12}$$

Згідно з формулами (7), (10) послідовно знайдемо:

$$g_{11} = (\bar{r}_{\bar{z}} + \bar{r}_z)^2, \qquad g_{12} = -i(\bar{r}_{\bar{z}}^2 - \bar{r}_z^2), \qquad g_{22} = -(\bar{r}_{\bar{z}} - \bar{r}_z)^2,$$

$$a_{11} = (\bar{\rho}_{\bar{z}} + \bar{\rho}_z)^2, \qquad a_{12} = -i(\bar{\rho}_{\bar{z}}^2 - \bar{r}_z^2), \qquad a_{22} = -(\bar{\rho}_{\bar{z}} - \bar{\rho}_z)^2, \tag{13}$$

$$g_{11} - a_{22} = (\bar{r}_{\bar{z}}^2 + \bar{\rho}_{\bar{z}}^2) + 2(\bar{r}_{\bar{z}}\bar{r}_z - \bar{\rho}_{\bar{z}}\bar{\rho}_z) + (\bar{r}_z^2 + \bar{\rho}_z^2),$$

$$g_{12} + a_{12} = -i(\bar{r}_{\bar{z}}^2 + \bar{\rho}_{\bar{z}}^2) + i(\bar{r}_z^2 + \bar{\rho}_z^2),$$

$$g_{22} - a_{11} = -(\bar{r}_{\bar{z}}^2 + \bar{\rho}_{\bar{z}}^2) + 2(\bar{r}_{\bar{z}}\bar{r}_z - \bar{\rho}_{\bar{z}}\bar{\rho}_z) - (\bar{r}_z^2 + \bar{\rho}_z^2). \tag{14}$$

Припустимо тепер, що виконуються рівності (5). Тоді співвідношення (14) є алгебраїчною однорідною системою трьох рівнянь з трьома невідомими $\bar{r}_{\bar{z}}^2 + \bar{\rho}_{\bar{z}}^2$, $\bar{r}_{\bar{z}}\bar{r}_z - \bar{\rho}_{\bar{z}}\bar{\rho}_z$, $\bar{r}_z^2 + \bar{\rho}_z^2$ і з визначником $\Delta = -8i \neq 0$. Така система рівнянь має лише тривіальний розв'язок, який можна виразити формулами (11).

Навпаки, якщо виконуються формули (11), то з системи рівнянь (14) отримаємо $g_{11} - a_{22} = 0$, $g_{12} + a_{12} = 0$, $g_{22} - a_{11} = 0$, що й підтверджує правильність леми. ♦

Теорема 5. *Рівності* (5), *що виражають залежності між компонентами метричних тензорів дуальних поверхонь, відносно конформного перетворення першого* (*другого*) *роду мають інваріантний характер.*

Д о в е д е н н я. Нехай конформне перетворення $\tilde{z} = \Phi(z)$, $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$, де $\Phi(z)$ – аналітична однолиста в області G функція, реалізує відображення області G у деяку область $G_{\tilde{z}}$. Тоді

$$\bar{\tilde{z}} = \overline{\Phi(z)}, \qquad \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \Phi'(z), \qquad \frac{\partial \bar{\tilde{z}}}{\partial \bar{z}} = \overline{\Phi'(z)}, \qquad \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \bar{z}} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{\tilde{z}}}{\partial z} = 0. \tag{15}$$

Використовуючи формули (15), дістанемо такі допоміжні закони перетворення:

$$\bar{r}_z = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \tilde{z}}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} = \bar{r}_{\tilde{z}}\Phi'(z), \qquad \bar{r}_{\bar{z}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\tilde{z}}}\frac{\partial \bar{\tilde{z}}}{\partial z} = \bar{r}_{\bar{\tilde{z}}}\overline{\Phi'(z)},$$

$$\bar{\rho}_z = \bar{\rho}_{\tilde{z}}\Phi'(z), \qquad \bar{\rho}_{\bar{z}} = \bar{\rho}_{\bar{\tilde{z}}}\overline{\Phi'(z)},$$

$$\bar{r}_{\bar{z}}^2 + \bar{\rho}_{\bar{z}}^2 = \bar{r}_{\bar{\tilde{z}}}^2\left(\overline{\Phi'(z)}\right)^2 + \bar{\rho}_{\bar{\tilde{z}}}^2\left(\overline{\Phi'(z)}\right)^2 = (\bar{r}_{\bar{\tilde{z}}}^2 + \bar{\rho}_{\bar{\tilde{z}}}^2)\left(\overline{\Phi'(z)}\right)^2 = 0,$$

$$\bar{r}_{\bar{z}}\bar{r}_z - \bar{\rho}_{\bar{z}}\bar{\rho}_z = (\bar{r}_{\bar{\tilde{z}}}\bar{r}_{\tilde{z}} - \bar{\rho}_{\bar{\tilde{z}}}\bar{\rho}_{\tilde{z}})\left|\Phi'(z)\right|^2 = 0,$$

$$\bar{r}_z^2 + \bar{\rho}_z^2 = (\bar{r}_{\tilde{z}}^2 + \bar{\rho}_{\tilde{z}}^2)\Phi'^2(z) = 0. \tag{16}$$

Оскільки $\Phi'(z) \neq 0$, то з (16) безпосередньо випливає, що кожне з рівнянь системи (11) в результаті конформного перетворення не змінює свого вигляду:

$$\bar{r}_{\tilde{\bar{z}}}^2 + \bar{\rho}_{\tilde{\bar{z}}}^2 = 0, \qquad \bar{r}_{\tilde{\bar{z}}}\bar{r}_{\tilde{z}} - \bar{\rho}_{\tilde{\bar{z}}}\bar{\rho}_{\tilde{z}} = 0, \qquad \bar{r}_{\tilde{z}}^2 + \bar{\rho}_{\tilde{z}}^2 = 0.$$

Тому приходимо до висновку, що ці формули є інваріантними.

Повернемось тепер до питання інваріантності системи рівностей (5). Базуючись на попередніх співвідношеннях, використаємо формули (14), (16) для отримання закону перетворення, наприклад, для суми $g_{12} + a_{12}$:

$$g_{12}(x,y) + a_{12}(x,y) = -i(\bar{r}_{\tilde{\bar{z}}}^2 + \bar{\rho}_{\tilde{\bar{z}}}^2) + i(\bar{r}_{\tilde{z}}^2 + \bar{\rho}_{\tilde{z}}^2) =$$

$$= g_{12}(\tilde{x},\tilde{y}) + a_{12}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0.$$

Подібно отримуємо, що $g_{11}(\tilde{x},\tilde{y}) - a_{22}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$, $g_{22}(\tilde{x},\tilde{y}) - a_{11}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$.

Таким чином, при переході від системи координат x, y до нової системи координат $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ вирази рівностей (5) не змінюються. Це свідчить про їх інваріантність відносно конформного перетворення першого роду.

У випадку конформного перетворення другого роду доведення є аналогічним. Теорему доведено. ♦

3. Представлення перших основних квадратичних форм дуальних поверхонь.

Теорема 6. *Метрична форма дуальної v-поверхні (u-поверхні) може бути подана у вигляді суми трьох інваріантних відносно конформного перетворення першого (другого) роду квадратичних форм, які виражені через компоненти метричного тензора дуальної u-поверхні (v-поверхні).*

Д о в е д е н н я. При вивченні так званої спряжено ізометричної сітки на поверхні додатної кривини І. Н. Векуа подав першу основну квадратичну форму цієї поверхні у вигляді суми трьох інваріантних відносно конформного перетворення квадратичних форм [1, с. 102]:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} g^{+} dz d\bar{z} + \frac{1}{4} g^{-} d\bar{z}^2 + \frac{1}{2} \bar{g}^{-} dz^2, \tag{17}$$

де $g^{+} = g_{11} + g_{22}$, $g^{-} = g_{11} - g_{22} + 2ig_{12}$.

Покажемо, що запропонований І. Н. Векуа метод можна перенести і на випадок пари дуальних поверхонь.

Справді, припустивши, що формула (17) визначає першу основну форму дуальної u-поверхні з метричним тензором g_{ij}, введемо функції a^{+}, a^{-} точки v-поверхні:

$$a^{+} = a_{11} + a_{22}, \qquad a^{-} = a_{11} - a_{22} + 2ia_{12}.$$

З урахуванням (5) виразимо їх через компоненти метричного тензора g_{ij} дуальної u-поверхні:

$$a^{+} = a_{11} + a_{22} = g_{11} + g_{22} = g^{+}, \qquad a^{-} = g_{22} - g_{11} - 2ig_{12} = -g^{-}. \tag{18}$$

Ці залежності дають змогу подати у відповідних точках першу основну квадратичну форму v-поверхні не тільки через величини a^{+}, a^{-}, але й через величини g^{+}, g^{-} дуальної u-поверхні:

$$\mathrm{I}_{\rho} = \frac{1}{2} a^{+} dz d\bar{z} + \frac{1}{4} a^{-} d\bar{z}^2 + \frac{1}{2} \bar{a}^{-} dz^2 = \frac{1}{2} g^{+} dz d\bar{z} - \frac{1}{4} g^{-} d\bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{g}^{-} dz^2.$$

Інваріантність кожного з трьох доданків внаслідок попереднього очевидна.

Нарешті, на підставі формул (18) для форми I з (17) отримуємо

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} a^{+} dz d\bar{z} - \frac{1}{4} a^{-} d\bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{a}^{-} dz^2.$$

Теорему доведено. ♦

4. Вираження коефіцієнтів другої основної квадратичної форми однієї дуальної поверхні через коефіцієнти другої основної квадратичної форми іншої дуальної поверхні.

Теорема 7. *Коефіцієнти* λ_{ij}, $i, j = 1, 2$, *другої основної квадратичної форми дуальної* v*-поверхні у відповідних точках можна виразити через коефіцієнти* b_{ij} *другої основної квадратичної форми дуальної* u*-поверхні за формулами*

$$\lambda_{11}(x, y) = -b_{12}(x, y),$$

$$\lambda_{12}(x, y) = b_{11}(x, y) = -b_{22}(x, y), \qquad \lambda_{22}(x, y) = b_{12}(x, y). \tag{19}$$

Д о в е д е н н я. Зазначимо, що при доведенні цієї теореми і в подальшому будемо користуватися тотожностями, які виконуються у відповідних точках дуальних поверхонь, асоційованих з аналітичною функцією $w = u + iv$, і є наслідком умов Коші − Рімана (8):

$$v_{xx} = -u_{xy}, \qquad v_{yx} = u_{xx}, \qquad v_{yy} = u_{xy},$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{20}$$

Для знаходження коефіцієнтів b_{ij} другої основної квадратичної форми дуальної u-поверхні використаємо (6) і формули $b_{ij} = \overline{r}_{ij}\overline{n}$, де $\overline{n}$ − орт нормалі до поверхні, а $\overline{r}_{ij} = \dfrac{\partial^2 \overline{r}}{\partial x^i \partial x^j}$ (див. [4, ч. 1, с. 196]):

$$\overline{r}_{11} = (0,\ 0,\ u_{xx}), \qquad \overline{r}_{12} = (0,\ 0,\ u_{xy}), \qquad \overline{r}_{22} = (0,\ 0,\ u_{yy}) = -\overline{r}_{11},$$

$$\overline{n} = \left(-\frac{u_x}{\sqrt{g}}, -\frac{u_y}{\sqrt{g}}, \frac{1}{\sqrt{g}}\right),$$

$$b_{11} = \overline{r}_{11}\overline{n} = \frac{u_{xx}}{\sqrt{g}}, \qquad b_{12} = \overline{r}_{12}\overline{n} = \frac{u_{xy}}{\sqrt{g}},$$

$$b_{22} = \overline{r}_{22}\overline{n} = -\overline{r}_{11}\overline{n} = \frac{u_{yy}}{\sqrt{g}} = -\frac{u_{xx}}{\sqrt{g}} = -b_{11}. \tag{21}$$

Беручи до уваги формули (9) і (20), визначимо також коефіцієнти другої квадратичної форми дуальної v-поверхні:

$$\overline{\rho}_{11} = (0,\ 0,\ v_{xx}) = (0,\ 0,\ -u_{yx}) = -\overline{r}_{12},$$

$$\overline{\rho}_{12} = (0,\ 0,\ v_{xy}) = (0,\ 0,\ u_{xx}) = \overline{r}_{11},$$

$$\overline{\rho}_{22} = (0,\ 0,\ v_{yy}) = (0,\ 0,\ u_{xy}) = -\overline{\rho}_{11} = \overline{r}_{12},$$

$$\overline{m} = \frac{\overline{\rho}_1 \times \overline{\rho}_2}{\sqrt{g}} = \left(\frac{u_y}{\sqrt{g}}, -\frac{u_x}{\sqrt{g}}, \frac{1}{\sqrt{g}}\right),$$

$$\lambda_{11} = \overline{\rho}_{11}\overline{m} = -\overline{r}_{12}\overline{n} = \frac{v_{xx}}{\sqrt{g}} = -\frac{u_{xy}}{\sqrt{g}} = -b_{12},$$

$$\lambda_{12} = \overline{\rho}_{12}\overline{m} = \overline{r}_{11}\overline{n} = \frac{v_{xy}}{\sqrt{g}} = \frac{u_{xx}}{\sqrt{g}} = -\frac{u_{yy}}{\sqrt{g}} = b_{11} = -b_{22},$$

$$\lambda_{22} = \overline{\rho}_{22}\overline{m} = \overline{r}_{12}\overline{n} = \frac{u_{xy}}{\sqrt{g}} = -\lambda_{11} = b_{12}, \tag{22}$$

де $\overline{m}$ − орт нормалі до v-поверхні.

Формули (22) є наслідком того, що абсциси та ординати векторів $\bar{r}_{ij}$, $\bar{\rho}_{ij}$ дорівнюють нулеві, а аплікати векторів $\bar{n}$ і $\bar{m}$ рівні між собою, тому скалярний добуток $\bar{\rho}_{ij}\bar{m} = \bar{\rho}_{ij}\bar{n}$, $i, j = 1, 2$. Три останні з формул (22) є виразами коефіцієнтів λ_{ij} другої квадратичної форми II_ρ v-поверхні через коефіцієнти b_{ij} квадратичної форми II u-поверхні, що й потрібно було довести. Теорему доведено. ♦

Принагідно підкреслимо, що, на відміну від системи рівностей (5), система рівностей (19) не має властивості симетричності відносно пари дуальних поверхонь. Тому для залежностей (19) не виконуються аналоги теорем 2 і 3.

Відповідно до формул (22) і (19) другі основні квадратичні форми II і II_ρ можемо подати у такому вигляді:

$$\mathrm{II} = b_{ij}dx^i dx^j = b_{11}(dx^2 - dy^2) + 2b_{12}dxdy =$$

$$= \frac{u_{xx}}{\sqrt{g}}(dx^2 - dy^2) + \frac{2u_{xy}}{\sqrt{g}}dxdy\,,$$

$$\mathrm{II}_\rho = \lambda_{ij}dx^i dx^j = \lambda_{11}(dx^2 - dy^2) + 2\lambda_{12}dxdy =$$

$$= b_{12}(-dx^2 + dy^2) + 2b_{11}dxdy\,. \tag{23}$$

5. Доведення інваріантності рівностей системи (19) при конформному перетворенні.

Лема 2. *Дійсна та уявна частини аналітичної функції* (1) *задовольняють тотожності*

$$v_{\bar{z}} - iu_{\bar{z}} = 0, \qquad v_z + iu_z = 0\,, \tag{24}$$

$$v_{\bar{z}\bar{z}} - iu_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad v_{zz} + iu_{zz} = 0, \quad v_{\bar{z}z} = 0, \quad u_{\bar{z}z} = 0\,. \tag{25}$$

Д о в е д е н н я. Якщо рівності (24) представимо через частинні похідні за x та y згідно з операторами (12), то переконаємося, що кожна з них рівносильна умовам Коші – Рімана. Якщо ж продиференціюємо (24) за z і $\bar{z}$, то за умови $v_{\bar{z}z} = v_{z\bar{z}}$ отримаємо (25). Лему доведено. ♦

Лема 3. *Для пари дуальних поверхонь системи рівностей* (19) *і* (25) *є еквівалентними.*

Д о в е д е н н я. Введемо до розгляду оператори другого порядку

$$\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial\bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{26}$$

вирази яких природно випливають з (12), і застосуємо їх до функцій u і v. Внаслідок гармонічності цих функцій відразу встановлюємо, що $v_{\bar{z}z} = 0$, $u_{\bar{z}z} = 0$, $v_{yy} = -u_{xx}$. Тоді

$$v_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2}(v_{xx} + iv_{xy}), \qquad v_{zz} = \frac{1}{2}(v_{xx} - iv_{xy})\,,$$

звідки маємо

$$v_{xx} = v_{\bar{z}\bar{z}} + v_{zz}, \qquad v_{xy} = -i(v_{\bar{z}\bar{z}} - v_{zz}), \qquad v_{yy} = -(v_{\bar{z}\bar{z}} + v_{zz})\,.$$

Аналогічно для функції u:

$$u_{xx} = u_{\bar{z}\bar{z}} + u_{zz}, \quad u_{xy} = -i(u_{\bar{z}\bar{z}} - u_{zz}), \quad u_{yy} = -(u_{\bar{z}\bar{z}} + u_{zz})\,. \tag{27}$$

Використовуючи формули (21), (22), (27), можемо тепер подати вирази $\lambda_{11}+b_{12}$, $\lambda_{12}-b_{12}$, $\lambda_{22}-b_{12}$ через $v_{\bar z\bar z}-iu_{\bar z\bar z}$, $v_{zz}+iu_{zz}$:

$$\lambda_{12}-b_{11}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(-i(v_{\bar z\bar z}-iu_{\bar z\bar z})+i(v_{zz}+iu_{zz})\right),$$

$$\lambda_{11}+b_{12}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left((v_{\bar z\bar z}-iu_{\bar z\bar z})+(v_{zz}+iu_{zz})\right), \tag{28}$$

$$\lambda_{22}-b_{12}=-\frac{1}{\sqrt{g}}\left((v_{\bar z\bar z}-iu_{\bar z\bar z})+(v_{zz}+iu_{zz})\right). \tag{29}$$

Припустимо тепер, що виконуються рівності (19). Тоді (28) є алгебраїчною однорідною системою двох рівнянь відносно двох невідомих $v_{\bar z\bar z}-iu_{\bar z\bar z}$, $v_{zz}+iu_{zz}$ з детермінантом $\Delta=\dfrac{2i}{g}\neq 0$. Очевидно, ця система має лише тривіальний розв'язок $v_{\bar z\bar z}-iu_{\bar z\bar z}=0$, $v_{zz}+iu_{zz}=0$. Що стосується рівняння (29), то за умови (19) воно є наслідком першого з рівнянь системи (28).

Навпаки, якщо виконуються тотожності (25), то з (28), (29) дістанемо рівності (19). Лему доведено. ♦

Теорема 8. *Рівності* (19)*, які виражають залежність між коефіцієнтами других основних квадратичних форм пари дуальних поверхонь, відносно конформного перетворення першого* (*другого*) *роду носять інваріантний характер.*

Д о в е д е н н я. Спочатку встановимо інваріантність системи рівнянь (25). Для цього відмітимо, що при конформному перетворенні $\tilde z=\Phi(z)$, $\tilde z=\tilde x+i\tilde y$, де $\Phi(z)$ − аналітична однолиста в області G функція, згідно з (15) справджуються такі закони перетворення похідних за $\bar z$ і z від функції $v(x,y)$:

$$v_{\bar z}=v_{\bar{\tilde z}}\overline{\Phi'(z)},\qquad v_z=v_{\tilde z}\Phi'(z),\qquad v_{\bar z\bar z}=v_{\bar{\tilde z}\bar{\tilde z}}\overline{\Phi'(z)}+v_{\bar{\tilde z}}\overline{\Phi''(z)},$$

$$v_{zz}=v_{\tilde z\tilde z}\Phi'^2(z)+v_{\tilde z}\Phi''(z),\qquad v_{\bar z z}=v_{z\bar z}=v_{\tilde z\bar{\tilde z}}\left|\Phi'(z)\right|^2.$$

Подібні закони перетворення виконуються і для частинних похідних за $\bar z$ і z від функції $u(x,y)$. З останньої рівності на підставі (25) при $\Phi'(z)\neq 0$ безпосередньо випливає, що змішані похідні за новими змінними $\tilde z$, $\bar{\tilde z}$ дорівнюють нулеві: $v_{\tilde z\bar{\tilde z}}=0$, $u_{\tilde z\bar{\tilde z}}=0$. Формули перетворення для виразів $v_{\bar z\bar z}-iu_{\bar z\bar z}$, $v_{zz}+iu_{zz}$ при цьому набувають вигляду

$$v_{\bar z\bar z}-iu_{\bar z\bar z}=(v_{\bar{\tilde z}\bar{\tilde z}}-iu_{\bar{\tilde z}\bar{\tilde z}})\left(\overline{\Phi'(z)}\right)^2+(v_{\bar{\tilde z}}-iu_{\bar{\tilde z}})\overline{\Phi''(z)},$$

$$v_{zz}+iu_{zz}=(v_{\tilde z\tilde z}+iu_{\tilde z\tilde z})\Phi'(z)^2+(v_{\tilde z}+iu_{\tilde z})\Phi''(z).$$

Оскільки $v_{\bar z}-iu_{\bar z}=(v_{\bar{\tilde z}}-iu_{\bar{\tilde z}})\overline{\Phi'(z)}$ і ліва частина цієї рівності згідно з (24), (25) дорівнює нулеві, то при $\Phi'(z)\neq 0$ маємо $v_{\bar{\tilde z}}-iu_{\bar{\tilde z}}=0$, $v_{\bar{\tilde z}\bar{\tilde z}}-iu_{\bar{\tilde z}\bar{\tilde z}}=0$. Аналогічно одержимо $v_{\tilde z\tilde z}+iu_{\tilde z\tilde z}=0$.

Отже, рівності (24), (25), як і слід було очікувати, не змінюють свого вигляду при конформному перетворенні.

Завершальний етап доведення цієї теореми базується на тому, що праві частини рівностей (28), (29) можна тепер формально подати через нові змінні $\tilde x$, $\tilde y$. Наприклад, першому співвідношенню надамо вигляду

$$\lambda_{11}(x,y)+b_{12}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{g(\tilde{x},\tilde{y})}}\left[(v_{\tilde{\bar{z}}\tilde{\bar{z}}}-iu_{\tilde{\bar{z}}\tilde{\bar{z}}})+(v_{\tilde{z}\tilde{z}}+iu_{\tilde{z}\tilde{z}})\right]=$$

$$=\lambda_{11}(\tilde{x},\tilde{y})+b_{12}(\tilde{x},\tilde{y}),$$

звідки маємо

$$\lambda_{11}(\tilde{x},\tilde{y})+b_{12}(\tilde{x},\tilde{y})=0.$$

Подібно отримуємо рівності

$$\lambda_{12}(\tilde{x},\tilde{y})-b_{11}(\tilde{x},\tilde{y})=0,\qquad \lambda_{22}(\tilde{x},\tilde{y})-b_{12}(\tilde{x},\tilde{y})=0.$$

Теорему доведено. ♦

6. Представлення других основних квадратичних форм дуальних поверхонь.

Теорема 9. *Другу основну квадратичну форму дуальної* u*-поверхні можна подати у вигляді суми двох квадратичних форм, які є інваріантними відносно конформного перетворення першого (другого) роду:*

$$\mathrm{II}=\frac{1}{4}b^{-}d\bar{z}^{2}+\frac{1}{4}\overline{b^{-}}dz^{2}. \tag{30}$$

Д о в е д е н н я ґрунтується на можливості поширити метод І. Н. Векуа, застосований ним в [1] до першої основної квадратичної форми поверхні, на другу основну квадратичну форму дуальних поверхонь.

Введемо функції b^{+}, b^{-} точки u-поверхні, які виражаються через коефіцієнти її другої основної форми за формулами

$$b^{+}=b_{11}+b_{22},\qquad b^{-}=b_{11}-b_{22}+2ib_{12}$$

і передусім переконаємося у тому, що квадратичну форму II з формули (23) для u-поверхні можна подати у вигляді (30).

Справді, з попереднього маємо, що $b_{22}=-b_{11}$, тому

$$b^{+}=0,\qquad b^{-}=2(b_{11}+ib_{12}). \tag{31}$$

Взявши до уваги формулу $d\bar{z}=dx-idy$, шляхом безпосередньої перевірки переконаємося, що

$$\frac{1}{4}b^{-}d\bar{z}^{2}=\frac{1}{2}\big(b_{11}(dx^{2}-dy^{2})+2b_{12}dxdy+$$

$$+i(-2b_{11}dxdy+b_{12}(dx^{2}-dy^{2}))\big).$$

Оскільки сума двох доданків у (30) дорівнює $2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{4}b^{-}d\bar{z}^{2}\right]$, то для квадратичної форми II, замість (30), одержимо

$$\mathrm{II}=b_{11}(dx^{2}-dy^{2})+2b_{12}dxdy.$$

Щоб встановити інваріантність величини $b^{-}d\bar{z}^{2}$, повернемося до операторів (26). Застосувавши їх до вектор-функції $\bar{r}(x,y)$, знайдемо

$$\bar{r}_{\bar{z}\bar{z}}=\frac{1}{2}(\bar{r}_{11}+i\bar{r}_{12}),\qquad \bar{r}_{zz}=\frac{1}{2}(\bar{r}_{11}-i\bar{r}_{12}),\qquad \bar{r}_{\bar{z}z}=0,$$

$$\bar{r}_{11}=\bar{r}_{\bar{z}\bar{z}}+\bar{r}_{zz},\qquad \bar{r}_{22}=\bar{r}_{\bar{z}\bar{z}}-\bar{r}_{zz},\qquad \bar{r}_{12}=i(\bar{r}_{zz}-\bar{r}_{\bar{z}\bar{z}}). \tag{32}$$

Помножимо скалярно на орт $\bar{n}$ кожну з рівностей (32):

$$\bar{n}\bar{r}_{11}=\bar{n}(\bar{r}_{\bar{z}\bar{z}}+\bar{r}_{zz})=b_{11},$$

$$\bar{n}\bar{r}_{22}=-\bar{n}(\bar{r}_{\bar{z}\bar{z}}+\bar{r}_{zz})=b_{22},$$

$$\bar{n}\bar{r}_{12}=i\bar{n}(\bar{r}_{zz}-\bar{r}_{\bar{z}\bar{z}})=b_{12}.$$

З огляду на отримані рівності величині b^- можемо надати вигляду

$$b^- = 2(b_{11} - ib_{12}) = 4\overline{n}\overline{r}_{zz}.$$

При конформному перетворенні $\tilde{z} = \Phi(z)$, $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$, $\Phi'(z) \neq 0$, виконуються такі закони перетворення розглядуваних величин:

$$\overline{r}_{\overline{z}\overline{z}} = \overline{r}_{\overline{\tilde{z}}\overline{\tilde{z}}}\left(\overline{\Phi'(z)}\right)^2 + \overline{r}_{\overline{\tilde{z}}}\overline{\Phi''(z)},$$

$$\overline{r}_{zz} = \overline{r}_{\tilde{z}\tilde{z}}\Phi'(z)^2 + \overline{r}_{\tilde{z}}\Phi''(z),$$

$$b^- = 4\overline{n}\overline{r}_{zz} = 4\tilde{\overline{n}}\left(\overline{r}_{\tilde{z}\tilde{z}}\Phi'(z)^2 + \overline{r}_{\tilde{z}}\Phi''(z)\right) = \tilde{b}^-\Phi'(z)^2 + 4\tilde{\overline{n}}\overline{r}_{\tilde{z}}\Phi''(z),$$

$$\overline{b}^- = \tilde{\overline{b}}^-\left(\overline{\Phi'(z)}\right)^2 + 4\tilde{\overline{n}}\,\overline{r}_{\overline{\tilde{z}}}\overline{\Phi''(z)}. \tag{33}$$

Тут через $\tilde{\overline{n}}$, $\tilde{b}^-$, $\tilde{\overline{b}}^-$ позначено відповідні величини, виражені через нові координати $\tilde{x}$, $\tilde{y}$. Оскільки $\overline{n}\overline{r}_z = 0$, $\overline{n}\overline{r}_{\overline{z}} = 0$, то внаслідок консерватизму кутів при відображеннях за допомогою аналітичних функцій $(\Phi'(z) \neq 0)$ маємо також, що

$$\tilde{\overline{n}}\overline{r}_{\tilde{z}} = 0, \qquad \tilde{\overline{n}}\overline{r}_{\overline{\tilde{z}}} = 0.$$

Спираючись на формули $d\tilde{z} = \Phi'(z)dz$, $d\overline{\tilde{z}} = \overline{\Phi'(z)}\,d\overline{z}$ і (33), остаточно дістанемо формули перетворення

$$b^-d\overline{z}^2 = \tilde{b}^-d\overline{\tilde{z}}^2, \qquad \overline{b}^-dz^2 = \tilde{\overline{b}}^-d\tilde{z}^2,$$

які засвідчують інваріантність комплексних доданків у (30) у випадку дуальної u-поверхні. Теорему доведено. ♦

Теорема 10. *Другу основну квадратичну форму дуальної v-поверхні (u-поверхні) можна подати у вигляді суми двох квадратичних форм, які виражені через коефіцієнти другої основної форми u-поверхні (v-поверхні) і є інваріантними відносно конформного перетворення першого (другого) роду.*

Д о в е д е н н я. Введемо до розгляду функції точки дуальної v-поверхні

$$\lambda^+ = \lambda_{11} + \lambda_{22}, \qquad \lambda^- = \lambda_{11} - \lambda_{22} + 2i\lambda_{12}.$$

Згідно з формулами (19), (31) у відповідних точках означимо рівності

$$\lambda^+ = b^+ = 0,$$

$$\lambda^- = 2(\lambda_{11} + i\lambda_{12}) = 2(-b_{12} + ib_{11}) = 2i(b_{11} + ib_{12}) = ib^-, \tag{34}$$

внаслідок яких квадратичну форму II_ρ v-поверхні можемо виразити у комплексному вигляді через величини основної квадратичної форми u-поверхні:

$$\mathrm{II}_\rho = \frac{1}{4}\lambda^-d\overline{z}^2 + \frac{1}{4}\overline{\lambda}^-dz^2 = \frac{1}{4}ib^-d\overline{z}^2 - \frac{1}{4}i\overline{b}^-dz^2.$$

Що стосується питання інваріантності отриманих доданків, то відповідь на нього випливає з попередньої теореми.

Очевидно також, що вираз (30) другої основної квадратичної форми II дуальної u-поверхні можна подати на підставі (34) через величини другої основної форми v-поверхні у вигляді

$$\mathrm{II} = -\frac{i}{4}\lambda^{-1}d\overline{z}^2 + \frac{i}{4}\overline{\lambda}^-dz^2,$$

що й потрібно було довести. Теорему доведено. ♦

Висновки. У статті доведено (теореми 1, 7), що між коефіцієнтами основних квадратичних форм, першої і другої, пари дуальних поверхонь існують прості залежності:

$$a_{11} = g_{22}, \qquad a_{12} = -g_{12}, \qquad a_{22} = g_{11},$$
$$\lambda_{11} = -b_{12}, \qquad \lambda_{12} = b_{11}, \qquad \lambda_{22} = b_{12}.$$

У теоремах 5, 8 доведено їх інваріантність при конформному перетворенні. Таким чином, можна зробити висновок: всі диференціально-геометричні властивості однієї дуальної поверхні цілком можна визначити з рівняння іншої дуальної поверхні.

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 630 с.
3. *Дзядык В. К.* Геометрическое определение аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 1 (91). – С. 191–194.
4. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении / Под ред. Г. Б. Гуревича: Ч. 1. Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1947. – 512 с; Ч. 2. Поверхности в пространстве. Отображения и изгибания поверхностей. Специальные вопросы. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1948. – 410 с.
5. *Трохимчук Ю. Ю.* Об одном критерии аналитичности функций // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1410–1418.
   Те саме: *Trokhimchuk Yu. Yu.* On one criterion for analyticity of functions // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, No. 10. – P. 1581–1590.
6. *Трохимчук Ю. Ю., Сафонов В. М.* Об одном критерии постоянства комплексной функции // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1096–1104.
   Те саме: *Trokhimchuk A. V., Safonov V. M.* On one criterion of constancy of a complex function // Ukr. Math. J. – 1999. – **51**, No. 8. – P. 1237–1245.
7. *Bogdan K., Dyda B., Luks T.* On Hardy space of local and nonlocal operators // Hiroshima Math. J. – 2014. – **44**, No. 2. – P. 193–215.
8. *Cargo G. T.* Some geometric aspects of functions of Hardy class H^p // J. Math. Anal. Appl. – 1963. – **7**, No. 3. – P. 471–474.
9. *DeMarco L.* The conformal geometry of billiards // Bull. Amer. Math. Soc. – 2011. – **48**, No. 1. – P. 33–52.
10. *DiMarco C. A.* Topological conformal dimension // Conform. Geom. Dynam. – 2015. – **19**. – P. 19–34.
11. *Fu F., Yang X., Zhao P.* Geometrical and physical characteristics of a class of conformal mappings // J. Geom. Phys. – 2012. – **62**, No. 6. – P. 1467–1479.
12. *Giorgadze G.* Geometric aspects of generalized analytic functions // In: Topics in Analysis and its Applications / Eds. G. A. Barsegian, H. G. W. Begehr. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. – Vol. 147. – Dordrecht: Springer, 2004. – P. 69–81.
13. *Giorgadze G.* Some analytical and geometrical aspects of stable partial indices // J. Math. Sci. – 2013. – **193**, No. 3. – P. 461–477.
14. *Goodman A. W.* A partial differential equation and parallel plane curves // Amer. Math. Monthly. – 1964. – **71**, No. 3. – P. 257–264.
15. *Goodman A. W.* On a characterization of analytic functions // Amer. Math. Monthly. – 1964. – **71**, No. 3. – P. 265–267.
16. *Gu X. D., Zeng W., Luo F., Yau S.-T.* Numerical computation of surface conformal mappings // Comput. Methods Funct. Theory. – 2012. – **11**, No. 2. – P. 747–787.
17. *Jerrard R.* Curvatures of surfaces associated with holomorphic functions // Colloq. math. – 1970. – **21**, No. 1. – P. 127–132.
18. *Jun S. H.* Harmonic mapping related with the minimal surface generated by analytic functions // Korean. J. Math. – 2015. – **23**, No. 3. – P. 439–446.
19. *Kalaj D., Mateljević M.* (K, K')-quasiconformal harmonic mappings // Potential Analysis. – 2012. – **36**, No. 1. – P. 117–135.
20. *Kreyszig E., Pendl A.* Über die Gauss – Krümmung der Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen // Elem. Math. – 1973. – **28**, No. 1. – P. 10–13.
21. *Nie C.* The space-like surfaces with vanishing conformal form in the conformal space // Conform. Geom. Dynam. – 2012. – **16**. – P. 204–208.
22. *Urakawa H.* The geometry of biharmonic maps // In: Harmonic Maps and Differential Geometry / Eds. E. Loubeau, S. Montaldo. AMS Contemporary Math. Ser. – Vol. 542. – Providence: AMS, 2011. – P. 159–175.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Исследуется пара поверхностей, ассоциированных с аналитической в области G *функцией. Получены зависимости между коэффициентами первых (вторых) основных квадратичных форм этих поверхностей и доказаны теоремы об их инвариантности относительно конформного преобразования.*

GEOMETRIC ASPECTS OF ANALYTIC FUNCTIONS

The pair of the surfaces associated with analytic function in domain G *is investigated. The dependencies between the coefficients of the first (second) main quadratic forms of the these surfaces are obtained and the theorems are proved on their invariance under conformal transformation.*

Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, Одеса

Одержано
29.02.16