

### ДВОВІСНИЙ ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ І ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ЇЇ ВЕРШИН

Сформульовано і розв'язано задачу про двовісний згин розподіленими згинальними моментами на нескінченності ізотропної пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною, береги якої контактують по області сталої ширини, а біля її вершин формуються пластичні зони. З використанням умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару та пластичного шарніра визначено довжину пластичної зони та розкриття берегів тріщини. Проведено числовий аналіз задачі.

**Вступ.** Пластинчасті елементи конструкцій широко використовуються у різних галузях техніки і промисловості, в яких під час експлуатації чи в процесі виготовлення можуть виникнути тріщини, що є сильними концентраторами напружень. Дослідженням згину пластин з тріщинами без урахування контакту їх берегів займалось багато авторів, що відображено у монографіях [1, 7, 14, 15]. В останні роки появились публікації, у яких враховується контакт берегів тріщин як по лінії [2–4, 13, 16–19, 21–24, 26], так по області сталої ширини [9–12, 20, 25].

У цій роботі з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів досліджено задачу двовісного згину ізотропної пластини розподіленими моментами на нескінченності з наскрізною прямолінійною тріщиною, береги якої приходять у гладкий контакт по області сталої ширини поблизу однієї з основ пластини, а біля вершин тріщини формуються пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра [5, 6]. Отримано аналітичний розв'язок задачі. Визначено довжину пластичної зони та розкриття берегів тріщини біля її вершин.

**Формулювання задачі.** Нехай ізотропна пластина товщини  $2h$  з прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки  $2\ell$  знаходиться в умовах двовісного згину розподіленими моментами на нескінченності, вектори яких паралельні і перпендикулярні до берегів тріщини. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат з початком у центрі тріщини, спрямувавши вісь  $Ox$  уздовж неї, а вісь  $Oz$  – перпендикулярно до серединної площини. Під дією зовнішнього навантаження береги тріщини приходять у гладкий контакт по області сталої ширини  $h_1$  поблизу верхньої основи пластини, а біля вершин тріщини формуються пластичні зони довжини  $b$ . Довжина тріщини з пластичними зонами  $2d$ . Лінію розміщення тріщини позначимо через  $L$ , а пластичні зони – через  $L_1$  (див. рис. 1).

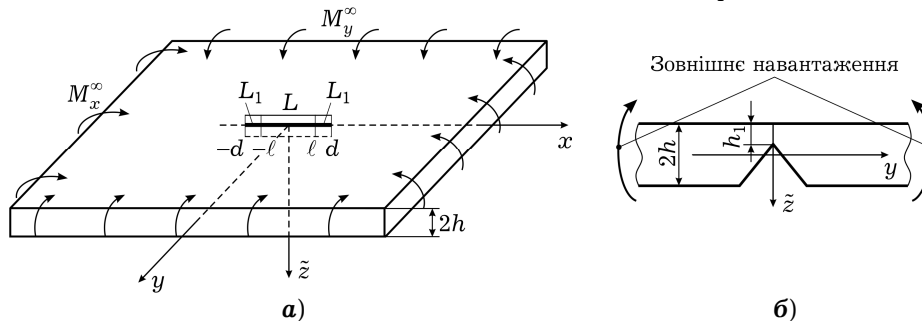


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини.

За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі розбиваємо на розв'язання двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину з використанням класичної теорії, за таких крайових умов:

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0, \quad M_y^{\pm} = M_0, \quad x \in L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = -\frac{N}{2h}, \quad M_y^{\pm} = \beta hN, \quad [v] + \alpha h[\partial_y w] = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad P_y^{\pm} = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (3)$$

де  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  та  $v$  – компоненти тензора напружень і проекція вектора переміщення точки на вісь  $Oy$  у плоскій задачі;  $w$  – прогин пластини;  $\sigma_0$  і  $M_0$  – шукані величини, відповідно нормальне напруження і згинальний момент у пластичній зоні;  $N$  – контактне зусилля ( $N > 0$ );  $M_y$  і  $P_y$  – згинальний момент і перерізувальна сила у сенсі Кірхгофа;  $[f] = f^+ - f^-$ , індексами «+» і «-» позначено граничні значення відповідної величини при  $y \rightarrow \pm 0$ ; константи  $\alpha$  і  $\beta$  мають вигляд [9]

$$\alpha = 0.5\{1 + (1 - \gamma)^2\}, \quad \beta = 1 - \frac{\gamma}{3}, \quad \gamma = \frac{h_1}{h}. \quad (4)$$

**Побудова розв'язку задачі.** Введемо комплексні потенціали плоскої задачі  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  та класичної теорії згину пластин  $\Phi_B(z)$  і  $\Omega_B(z)$ , при цьому скористаємося залежностями [8, 14]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = x\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi'(z), \quad (6)$$

$$\partial_x g = \Phi_B(z) - \Omega_B(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi_B'(z), \quad (7)$$

$$f = \tilde{\alpha}\Phi_B(z) + \Omega_B(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_B'(z)}, \quad (8)$$

де  $\mu = 0.5E/(1 + \nu)$  – модуль зсуву,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \alpha = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{3 + \nu}{1 - \nu},$$

$$g = \partial_x w + i\partial_y w, \quad f(x) = \frac{1}{m} \left( M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right),$$

$$m = -D(1 - \nu), \quad \partial_{\alpha} f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}. \quad (9)$$

$c'$  – невідома стала,  $D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2))$  – циліндрична жорсткість пластини.

Введені комплексні потенціали при великих  $|z|$  подамо у вигляді [8, 14]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= O\left(\frac{1}{z^2}\right), & \Omega(z) &= O\left(\frac{1}{z^2}\right), \\ \Phi_B(z) &= \tilde{\Gamma} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), & \Omega_B(z) &= -\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}' + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^{\infty} + M_y^{\infty}}{4D(1 + \nu)}, \quad \tilde{\Gamma}' = \frac{M_x^{\infty} - M_y^{\infty}}{2m}.$$

Виходячи з крайових умов (1)–(3), запишемо такі рівності:

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ \left( M_y + ic' + i \int_0^x P_y(\varepsilon) d\varepsilon \right)^+ - \left( M_y + ic' + i \int_0^x P_y(\varepsilon) d\varepsilon \right)^- &= 0, \quad x \in L + L_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо врахувати (5) і (8), то крайові умови (11) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ (\tilde{\alpha}\Phi_B(x) - \Omega_B(x))^+ - (\tilde{\alpha}\Phi_B(x) - \Omega_B(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Враховавши (10) і розв'язавши задачі лінійного спряження (12), одержимо

$$\Omega(z) = \Phi(z), \quad \Omega_B(z) = \tilde{\alpha}\Phi_B(z) - (\tilde{\alpha} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'. \quad (13)$$

Беручи до уваги крайові умови (1) та (13), на основі (5) і (8) запишемо

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \sigma_0, \quad x \in L_1, \quad (14)$$

$$ic' + m\{\tilde{\alpha}(\Phi_B^+(x) + \Phi_B^-(x)) - (\tilde{\alpha} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\} = M_0, \quad x \in L_1. \quad (15)$$

Введемо функцію

$$F(z) = -2\beta h^2 \Phi(z) - m\tilde{\alpha}\Phi_B(z) + \{ic' + m((\tilde{\alpha} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}')\}/2. \quad (16)$$

Як впливає з (14) і (15), функція  $F(z)$  задовольняє крайову умову

$$F^+(x) + F^-(x) = c, \quad x \in L_1, \quad (17)$$

де

$$c = -2h^2\beta\sigma_0 - M_0. \quad (18)$$

З крайових умов (2) і (3), враховавши (5), (8), (9) та залежності (13), маємо

$$\begin{aligned} N &= -2h(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)), \quad x \in L, \\ M_y &= -ic' + m\{\tilde{\alpha}(\Phi_B^+(x) + \Phi_B^-(x)) - (\tilde{\alpha} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\}, \quad x \in L. \end{aligned} \quad (19)$$

Підставляючи (19) у другу з крайових умов (2) і беручи до уваги (16), одержимо

$$F^+(x) + F^-(x) = 0, \quad x \in L. \quad (20)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (17), (20) запишемо як

$$F(z) = \frac{d_1 z + d_0}{X_1(z)} + \frac{c}{2\pi X_1(z)} \int_{L_1} \frac{X_1^+(t) dt}{t - z}, \quad (21)$$

де  $d_i$  – невідомі сталі,

$$X_1(z) = \sqrt{z^2 - d^2}. \quad (22)$$

Враховавши (10) і поведінку функції  $F(z)$  (16) при  $|z| \rightarrow \infty$ , на основі (21) запишемо

$$d_0 = 0, \quad d_1 = (ic' - M_y^\infty)/2. \quad (23)$$

З крайових умов (3), беручи до уваги (5), (8), (9), (13), одержимо

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^+ + (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ (\Phi_B(x) - \bar{\Phi}_B(x) - c_1)^+ + (\Phi_B(x) - \bar{\Phi}_B(x) - c_1)^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \end{aligned} \quad (24)$$

де  $c_1 = ic'/(m\tilde{\alpha})$ .

Розв'язавши задачу лінійного спряження (24) і врахувавши поведінку функції  $\Phi(z)$  і  $\Phi_B(z)$  на нескінченності (10), маємо

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi(z), \quad \bar{\Phi}_B(z) = \Phi_B(z) - c_1 z \frac{1}{X_1(z)} + c_1. \quad (25)$$

На основі третьої з крайових умов (2), врахувавши (6), (7) і (13), одержимо

$$(\delta\Phi(x) + \Phi_B(x) + \bar{\Phi}_B(x))^+ - (\delta\Phi(x) + \Phi_B(x) + \bar{\Phi}_B(x))^- = 0, \quad x \in L, \quad (26)$$

де

$$\delta = \frac{x+1}{\alpha\mu h(1+\tilde{x})}.$$

Використавши формули (14) і (15), запишемо

$$(\delta\Phi(x) + \Phi_B(x) + \bar{\Phi}_B(x))^+ + (\delta\Phi(x) + \Phi_B(x) + \bar{\Phi}_B(x))^- = A, \quad x \in L, \quad (27)$$

де

$$A = \delta\sigma_0 + 2\{M_0/m + (\tilde{x}+1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\} \frac{1}{\tilde{x}}.$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (26), (27), одержимо

$$\delta\Phi(z) + \Phi_B(z) + \bar{\Phi}_B(z) = \frac{\tilde{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{A dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} + \tilde{d}X_0(z), \quad (28)$$

де

$$\tilde{X}_0(z) = \sqrt{\frac{z^2 - \ell^2}{z^2 - d^2}}, \quad \tilde{d} = 2\tilde{\Gamma}.$$

Після обчислення інтеграла в (28) [8] запишемо

$$\delta\Phi(z) + \Phi_B(z) + \bar{\Phi}_B(z) = \frac{1}{2}A + \left(\tilde{d} - \frac{1}{2}A\right)\tilde{X}_0(z). \quad (29)$$

Врахувавши (25), рівність (29) подамо так:

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_B(z) = \frac{1}{2}A - c_1 + c_1 z \frac{1}{X_1(z)} + \left(\tilde{d} - \frac{1}{2}A\right)\tilde{X}_0(z). \quad (30)$$

На основі (16) і (21) запишемо

$$\beta h^2 \Phi(z) + m\tilde{x}\Phi_B(z) = d_1 + m\tilde{x}\tilde{\Gamma} - \frac{d_1 z}{X_1(z)} - \frac{c}{2\pi i X_1(z)} \int_{L_1} \frac{X_1^+(t) dt}{t-z}. \quad (31)$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (30) і (31) відносно  $\Phi(z)$  і  $\Phi_B(z)$ , отримуємо

$$\Phi_B(z) = d_3 + \frac{f_3(z)}{X_1(z)}, \quad \Phi(z) = d_5 + \frac{f_4(z)}{X_1(z)}, \quad (32)$$

де

$$f_1(z) = c_1 z + \left(\tilde{d} - \frac{1}{2}A\right)\sqrt{z^2 - \ell^2}, \quad f_2(z) = -d_1 z + \frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{X_1^+(t) dt}{t-z},$$

$$f_3(z) = (\delta f_2(z) - 2\beta h^2 f_1(z)) \frac{1}{\Delta}, \quad f_4(z) = (m\tilde{x}f_1(z) - 2f_2(z)) \frac{1}{\Delta},$$

$$d_3 = (\delta B_2 - 2h^2 \beta B_1) \frac{1}{\Delta}, \quad d_5 = (m\tilde{x}B_1 - 2B_2) \frac{1}{\Delta},$$

$$\Delta = m\tilde{x}\delta - 4\beta h^2, \quad B_1 = \frac{1}{2}A - c_1, \quad B_2 = d_1 + m\tilde{x}\tilde{\Gamma}. \quad (33)$$

Умова однозначності прогину пластини при обході тріщини з пластичними зонами має вигляд

$$\operatorname{Re} \int_{\mathcal{K}} t \Phi_B(t) dt = 0, \quad (34)$$

де  $\mathcal{K}$  – замкнутий контур, що охоплює тріщину з пластичними зонами.

Беручи до уваги вираз для функції  $\Phi_B(z)$  (32) і застосовуючи теорему про лишки при обчисленні інтеграла у рівності (34), після відповідних перетворень одержимо, що  $c' = 0$ , а тому

$$c_1 = 0, \quad d_1 = -0.5M_y^\infty. \quad (35)$$

Коефіцієнти інтенсивності зусиль  $k_i$  і моментів  $K_i$  знайдемо за формулами [15]

$$k_1 - ik_2 = 4h\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow d} (\Phi(x)\sqrt{x-d}), \quad (36)$$

$$K_1 - iK_2 = -2\sqrt{2} D(3+\nu) \lim_{x \rightarrow d} (\Phi_B(x)\sqrt{x-d}).$$

Оскільки напружений стан в околі вершин пластичних зон має бути обмеженим [7], то

$$k_i = 0, \quad K_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (37)$$

Беручи до уваги вирази для функцій  $\Phi(z)$  і  $\Phi_B(z)$  (32), на основі (36) і (37) отримуємо

$$f_3(d) = 0, \quad f_4(d) = 0. \quad (38)$$

Враховуючи залежності (33) для функцій  $f_3(z)$  і  $f_4(z)$ , з (38) одержимо

$$f_1(d) = 0, \quad f_2(d) = 0. \quad (39)$$

Звідси знаходимо

$$\delta\sigma_0 + \frac{2M_0}{m\tilde{x}} = \frac{2M_y^\infty}{m\tilde{x}}, \quad (40)$$

$$\frac{d}{l} = \arccos \frac{\pi M_y^\infty}{2(2h^2\beta\sigma_0 + M_0)}. \quad (41)$$

Для знаходження  $\sigma_0$  і  $M_0$  скористаємося спочатку умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару на нижній основі пластини [6]

$$\sigma_0 + \frac{3M_0}{2h^2} = \sigma_Y, \quad (42)$$

де  $\sigma_Y$  – границя текучості матеріалу пластини.

Розв'язавши систему рівнянь (40) і (42) відносно  $\sigma_0$  і  $M_0$ , маємо

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_Y} = \frac{4(1-\tilde{\sigma})}{4+\tilde{\gamma}}, \quad \tilde{M}_0 = \frac{3M_0}{2h^2\sigma_Y} = \frac{4\tilde{\sigma}+\tilde{\gamma}}{4+\tilde{\gamma}}, \quad (43)$$

$$\text{де } \tilde{\sigma} = \frac{3M_y^\infty}{2h^2\sigma_Y}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{4(3+\nu)}{\alpha(1+\nu)}.$$

Якщо скористатись умовою пластичного шарніра [5, 6]

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_Y}\right)^2 + \frac{M_0}{h^2\sigma_Y} = 1, \quad (44)$$

тоді маємо

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12}\right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12}, \quad \tilde{M}_0 = \tilde{\sigma} + \frac{\tilde{\gamma}}{4} \tilde{\sigma}_0, \quad \rho = 1 - \frac{2}{3} \tilde{\sigma}. \quad (45)$$

Відносну довжину пластичної зони  $\tilde{b} = b/\ell$ , врахувавши (41), знайдемо за формулою

$$\tilde{b} = \arccos \frac{\pi \tilde{\sigma}}{2(3\beta \tilde{\sigma}_0 + \tilde{M}_0)} - 1. \quad (46)$$

Розкриття тріщини у її вершині знайдемо за формулою

$$\tilde{\delta} = \int_a^{\tilde{b}} \frac{\partial}{\partial x} ([v] + [v_B]) dx,$$

яка після перетворень набуде вигляду

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta E}{\ell \sigma_Y} = \frac{32(1 + \alpha)(\tilde{M}_0 + \beta \tilde{\sigma}_0)}{\pi \alpha (\tilde{\gamma} + 12\beta)} \ln(\tilde{b} + 1). \quad (47)$$

**Числовий аналіз і висновки.** Результати числового дослідження задачі, виконані при  $\nu = 0.3$ , наведено на рис. 2 і рис. 3. Обчислені залежності нормованої довжини пластичної зони  $\tilde{b}$  від величини нормованого згинального напруження  $\tilde{\sigma}$  показано на рис. 2, а розкриття тріщини  $\tilde{\delta}$  – на рис. 3. Криві 1–3 побудовано для значень  $\gamma = h_1/h = 0, 0.13, 0.2$  (коли  $\gamma = 0$ , маємо контакт берегів по лінії тріщини). Суцільні криві відповідають випадку використання умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару, а штрихові – з використанням умови пластичного шарніра.

З аналізу графіків на рис. 2 можемо зробити висновок, що зі зростанням згинального напруження  $\tilde{\sigma}$  довжина  $\tilde{b}$  пластичної зони біля вершини тріщини зростає. Для умови пластичності у вигляді поверхневого шару при  $\tilde{\sigma} = 1$  і для умови пластичності у вигляді пластичного шарніра при  $\tilde{\sigma} = 1.5$  вона є нескінченною. Крім цього, врахування ширини  $\gamma$  контакту берегів тріщини приводить до збільшення величини  $\tilde{b}$  порівняно з випадком, коли контакт берегів тріщини відбувається по лінії.

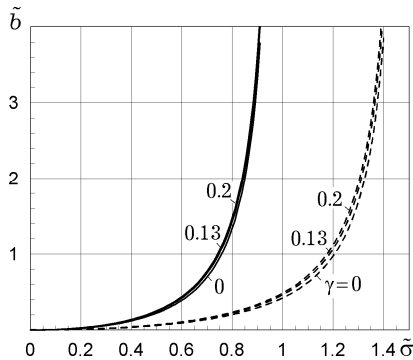


Рис. 2

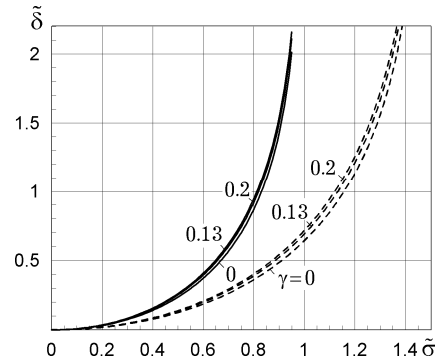


Рис. 3

На рис. 3 бачимо, що врахування ширини області контакту берегів тріщини приводить до збільшення розкриття її берегів порівняно з випадком, коли контакт берегів тріщини відбувається по її лінії.

Довжина пластичної зони біля вершини тріщини та розкриття берегів тріщини на нижній основі пластини, визначені з використанням умови пластичності у вигляді поверхневого шару, є більшими, ніж у випадку використання умови пластичності у вигляді пластичного шарніра, при однакових значеннях  $\tilde{\sigma}$ .

1. *Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. *Божидарник В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В.* Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Проблемы прочности. – 2006. – № 5 (383). – С. 135–141.  
Te same: *Bozhidarnik V. V., Opanasovich V. K., Gerasimchuk P. V.* Bilateral bending of a plate with nonsymmetric through-thickness arc crack with allowance for the contact of its edges // Strength Mater. – 2006. – **38**, No. 5. – P. 548–553.
3. *Божидарник В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В.* Згин пластини з двома рівними симетричними тріщинами по дузі кола з урахуванням контакту їх берегів // Механічна втома матеріалів: Праці 13-го міжнар. колоквиуму. – Тернопіль: Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2006. – С. 450–455.
4. *Божидарник В., Опанасович В., Герасимчук П.* Згин ізотропної пластини, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 7–16.
5. *Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: Сполом, 2007. – 320 с.
6. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
7. *Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
8. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
9. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наук. нотатки Луцьк. техн. ун-ту. – 2007. – Вип. 20 (том 2). – С. 123–127.
10. *Опанасович В. К., Яцик І. М., Сулим Г. Т.* Згин зосередженими моментами пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 71–81.  
Te same: *Opanasovych V. K., Yatsyk I. M., Sulym H. T.* Bending of Reissner's plate containing a through-the-thickness crack by concentrated moments taking into account the width of a contact zone of its faces // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 5. – P. 620–634.
11. *Опанасович В., Дорош М.* Згин розподіленими моментами на нескінченності ізотропної пластини з періодичною системою колінеарних наскрізних тріщин з урахуванням контакту берегів тріщин // Тез. доп. 7-го укр.-польськ. наук. симп. «Актуальні задачі механіки неоднорідних структур». – Львів, 2007. – С. 75–76.
12. *Опанасович В., Дорош М.* Комбінований згин з розтягом пластини, ослабленої двома колінеарними тріщинами, береги яких контактують // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 194–206.
13. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
14. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
15. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 324 с.
16. *Шацький І. П.* Изгиб пластины, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с контактирующими кромками // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 12. – С. 56–61.  
Te same: *Shatskii I. P.* Bending of a plate containing a periodic system of parallel slits with contacting edges // Soviet Appl. Mech. – 1991. – **27**, No. 12. – P. 1186–1190.
17. *Шацький І. П.* Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 62–64.
18. *Шацький І., Даляк Т.* Взаємовплив паралельних тріщин з берегами, які контактують, при згині пластин // Машинознавство. – 2000. – № 1. – С. 27–30.
19. *Шацький І., Маковійчук М.* Змикання берегів колінеарних тріщин при згині пластини на пружній основі // Машинознавство. – 2004. – № 6. – С. 10–12.
20. *Dempsey J. P., Shekhtman I. I., Slepyan L. L.* Closure of a through crack in a plate under bending // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 31–32. – P. 4077–4089.

21. *Heming F. S. (Jr.)* Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // *Int. J. Fract.* – 1980. – **16**, No. 4. – P. 289–304.
22. *Hui C. Y., Zehnder Alan T.* A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments // *Int. J. Fract.* – 1993. – **61**, No. 3. – P. 211–229.
23. *Hui C. Y., Zehnder Alan T., Potdar Y. K.* Williams meets von Karman: Mode coupling and nonlinearity in the fracture of thin plates // *Int. J. Fract.* – 1998. – **93**, No. 1-4. – P. 409–429.
24. *Jones D. P., Swedlow J. L.* The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate // *Int. J. Fract.* – 1975. – **11**, No. 6. – P. 897–914.
25. *Slepyan L. I., Dempsey J. P., Shekhtman I. I.* Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1995. – **43**, No. 11. – P. 1727–1749.
26. *Young M. J., Sun C. T.* Cracked plates subjected to out-of-plane tearing loads // *Int. J. Fract.* – 1993. – **60**, No. 1. – P. 1–18.

**ДВУХОСНЫЙ ИЗГИБ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СКВОЗНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ И ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН ОКОЛО ЕЕ ВЕРШИН**

*Сформулирована и решена задача о двухосном изгибе распределенными моментами на бесконечности изотропной пластины с прямолинейной сквозной трещиной, берега которой контактируют по области постоянной ширины, а вблизи вершин образуются пластические зоны. Используя условия пластичности Треска в виде поверхностного слоя или пластического шарнира, определена длина пластической зоны и раскрытие берегов трещины около ее вершин. Проведен численный анализ задачи.*

**BIAxIAL BENDING ISOTROPIC PLATE WITH A THROUGH-THICKNESS RECTILINEAR CRACK TAKING INTO ACCOUNT THE WIDTH OF A CONTACT ZONE OF ITS FACES AND IN THE PRESENCE OF PLASTIC ZONES NEAR ITS TIPS**

*The problem of biaxial bending of an isotropic plate with a through-the-thickness rectilinear crack by distributed moments at infinity is formulated and solved. The faces of the crack contact along the area of constant width, and the plastic zones are formed near its tips. Using the Tresca's yield condition in the form of a surface layer or a plastic hinge, the length of the plastic zone and the crack opening displacements near its tips are determined. Numerical investigation of the problem is performed.*

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано  
03.12.14