

ПЛАСТИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ МАТЕРІАЛІВ ПРИ НАВАНТАЖЕННІ ПО КУСКОВО-ГЛАДКИХ ТРАЄКТОРІЯХ З ДІЛЯНКАМИ РОЗВАНТАЖЕННЯ ЗА ПРУЖНИМ ЗАКОНОМ

З використанням варіанта теорії пластичності, заснованої на концепції ковзання, з урахуванням деформаційної анізотропії запропоновано методичку визначення пластичної деформації матеріалів при навантаженні по кусково-гладких траєкторіях з ділянками розвантаження за пружним законом. Закладена в теорію матеріальна функція пластичності Π при заданій функції зміцнення F визначається з експерименту на розтяг – стиск або експерименту на знакозмінне закручення тонкостінної трубки.

Попередні зауваження. Експериментальному та теоретичному дослідженню пластичної деформації матеріалів при складному навантаженні по кусково-гладких траєкторіях присвячено значну кількість робіт – наукових монографій і статей [1–6, 10, 11, 14–20, 28, 30, 38, 40, 44]. Значна увага також приділена експериментальному дослідженню складної пластичної деформації при наявності на кусково-гладких траєкторіях ділянок розвантаження за пружним законом [2–5, 7, 8, 20]. Однак кількість робіт з аналітичним описом у межах існуючих варіантів теорії пластичності деформації матеріалів за таких складних процесів з ділянками розвантаження надто обмежена [2, 16, 18] і у більшості випадків зводиться до опису однопараметричного знакозмінного навантаження (розтяг – стиск або знакозмінний зсув). Відставання публікацій аналітичних досліджень від експериментальних можна пояснити, з одного боку, неадекватністю експерименту існуючих диференціально-лінійних ($\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijmn} \dot{\epsilon}_{mn}$) варіантів теорії пластичності при зазначених процесах навантаження. А з іншого боку – у недостатній мірі розробленими і підготовленими в математичному плані до аналітичного опису деформації матеріалів та елементів конструкцій диференціально-нелінійними варіантами теорії пластичності, визначальні рівняння $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\epsilon}_{ij}$ яких можна подати у такому вигляді [26]:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijmn} \dot{\epsilon}_{mn} - \Psi_{ij}(\dot{\epsilon}_{mn}), \quad (*)$$

де $\Psi_{ij}(\dot{\epsilon}_{mn})$ – залежні від історії навантаження однорідні функції першого степеня від швидкостей деформації.

Пропонуємо методичку побудови визначальних рівнянь зазначеного типу (*) у межах диференціально-нелінійного варіанту теорії ковзання [30, 37], який уже одержав експериментальне підтвердження при активному ($\dot{\epsilon}_i^{(p)} > 0$) навантаженні по дволанкових траєкторіях [10, 11, 27, 28, 37]. Названа теорія задовольняє постулат Друккера, принцип макродетермінізму (стійкості процесу деформування), диференціальну потенціальність визначальних рівнянь зв'язку $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\epsilon}_{ij}$, описує явище занурення на діаграмі інтенсивність напружень \sim інтенсивність деформації, а також ефекти Баушінгера і Фейгена [21, 23, 25, 29, 39]. У межах теорії [30, 37] сформульовано та розв'язано задачі стійкості елементів конструкцій (стержнів, пластин, плит і тривимірних тіл) при складному докритичному навантаженні. Досліджено вплив історії навантаження (пам'яті матеріалу) на величину критичних параметрів [26, 28, 37, 38, 41]. Показано, що при істотно немонотонній деформації втрата стійкості елементів конструкції відбувається не внаслідок біфуркації процесу деформування у швидкостях (критерій Шенлі – Работнова), а внаслідок біфуркації процесу деформування у прискореннях

[35]. Застосування диференціально-нелінійних рівнянь типу (*) у граничних задачах теорії пластичності подано, зокрема, в роботах [12, 13]. На основі вищенаведеного можемо зробити висновок, що диференціально-нелінійний варіант теорії пластичності [30, 37], заснованої на концепції ковзання [42], із розряду пізнавальних став робочим.

1. Вихідні рівняння теорії ковзання [30, 37]. Задача побудови визначальних рівнянь зв'язку $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$ диференціально-нелінійного варіанта теорії ковзання за умови плоскопластичної деформації в математичному плані зводиться до визначення швидкості інтенсивності зсуву $\phi'_t(\theta, t)$ і меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ із системи інтегральних рівнянь

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[\epsilon_i^{(p)}(t), \lambda_k^*(t), |\theta - \theta_0|] \phi'_t(\theta, t) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta(t) - 2(\theta_0 + \Phi_0)], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau_s + \int_{t_0}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R[\epsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi), |\theta - \theta_0|] \phi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \quad \theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)], \end{aligned}$$

$$R[\epsilon_i^{(p)}(t), \lambda_k^*(t), \omega] = \Pi[\epsilon_i^{(p)}(t), \lambda_k^*(t)] F(\omega), \quad (2)$$

$$S(t) = \sqrt{S_1^2(t) + S_3^2(t)}, \quad S_1(t) = \frac{\sigma_x(t) - \sigma_y(t)}{\sqrt{2}}, \quad S_3(t) = \sqrt{2} \tau_{xy}(t),$$

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_0, \quad 2\Phi_1(t) = \arctg[S_3(t)/S_1(t)], \quad \Phi_0 = \Phi_1(t_0),$$

$$\vartheta(t) = \arctg[dS_3(t)/dS_1(t)]. \quad (3)$$

Тут і надалі використовуємо раніше прийняті у роботах [27, 37] позначення.

Ефективні аналітичні та числові методи розв'язування рівнянь (1) і (2) відносно $\phi'_t(\theta, t)$, $\alpha_{1,2}(t)$ при активних процесах деформування (без зон розвантаження) запропоновано в роботах [24, 27, 28, 32, 33, 36, 37, 40] як для сингулярних функцій зміцнення $F(\omega)$ ($F(0) \leq \infty$, $|F'(0)| = \infty$), так і регулярних ($F(0) < \infty$, $F'(0) = 0$). У цій роботі пропонуємо узагальнення одержаних результатів на кусково-гладкі траєкторії при наявності зон розвантаження. Дослідження проведемо на прикладі сингулярної функції зміцнення $F(\omega)$, яку з точністю до постійного множника задаємо формулою

$$F(\omega) = a_0 + a_2 \cos 2\omega + a_3 \delta(\omega) + a_4 \delta\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right), \quad (4)$$

де $\delta(\omega)$ – дельта функція Дірака, $a_i \sim \text{const}$.

За відомих $\phi'_t(\theta, t)$, $\alpha_{1,2}(t)$ компоненти вектора швидкості $\dot{\Gamma}^{(p)}$ плоскопластичної деформації визначаються квадратурами [30, 37]

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_1^{(p)}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \phi'_t(\theta, t) \cos 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \\ \dot{\Gamma}_3^{(p)}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \phi'_t(\theta, t) \sin 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_1^{(p)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\dot{\varepsilon}_x^{(p)}(t) - \dot{\varepsilon}_y^{(p)}(t)], & \dot{\Gamma}_3^{(p)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\gamma}_{xy}^{(p)}(t) = \sqrt{2} \dot{\varepsilon}_{xy}(t), \\ \dot{\varepsilon}_i^{(p)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \dot{\Gamma}^{(p)}(t).\end{aligned}\quad (6)$$

Пружні складові вектора швидкості $\dot{\Gamma}^{(e)}(t)$ задаємо законом Гука

$$\dot{\Gamma}_1^{(e)}(t) = \frac{\dot{S}_1(t)}{2G}, \quad \dot{\Gamma}_3^{(e)}(t) = \frac{\dot{S}_3(t)}{2G}, \quad \dot{\Gamma}(t) = \dot{\Gamma}^{(e)}(t) + \dot{\Gamma}^{(p)}(t), \quad G = \frac{E}{3}. \quad (7)$$

Зазначимо, що рівняння (5)–(7) задовольняють постулат ізотропії Ільюшина [9].

2. Деформація елемента тіла за пропорційного навантаження. Спочатку наведемо деякі необхідні для подальших досліджень результати розв'язку задачі визначення плоскопластичної деформації елемента тіла (рис. 1) за пропорційного навантаження $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t)$, $t \in [0, t_A]$, уздовж осі OS_1

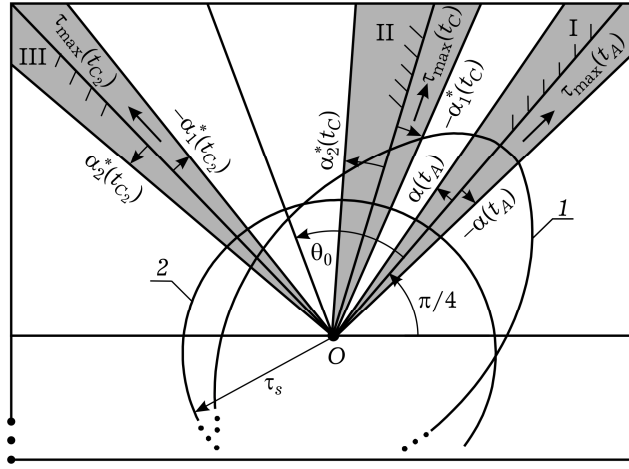


Рис. 1

($S_1 = [\sigma_x(t) - \sigma_y(t)]/\sqrt{2} \geq 0$, $S_3 = \sqrt{2} \tau_{xy}(t) \equiv 0$). У цьому випадку згідно з (3) маємо $\Phi_1(t) = \Phi(t_0) = \Phi(t) = \vartheta(t) \equiv 0$ і з рівняння (1) для швидкості інтенсивності ковзання одержуємо [27]

$$\Pi \cdot \varphi'_t(\theta, t) = A_1(\alpha) \cos 2\theta + C_1(\alpha), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}A_1(\alpha) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a_3 + 2a_0\alpha}{[a_3 + a_2(\alpha + 0.25 \sin 4\alpha)](a_3 + 2a_0\alpha) - a_0a_2 \sin 2\alpha}, \\ C_1(\alpha) &= -A_1(\alpha) \frac{a_0 \sin 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha}.\end{aligned}\quad (9)$$

Межі множини напрямків ковзання $\theta_0 = \mp \alpha_{1,2}(t)$ визначаються рівнянням (2), на основі якого можемо одержати [27]

$$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha(t), \quad \frac{a_3 + a_2(\alpha - 0.25 \sin 4\alpha)}{(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{S(t)}{\tau_s}. \quad (10)$$

Для вектора швидкості плоскопластичної деформації маємо

$$\dot{\Gamma}^{(p)} = \frac{B_{11}(\alpha) \dot{\mathbf{S}}(t)}{\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]}, \quad \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] \equiv \Pi[\varepsilon_i^{(p)}, 0],$$

$$B_{11}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \left[(\alpha + 0.25 \sin 4\alpha) - \frac{a_0 \sin 4\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha} \right]. \quad (11)$$

Пластична деформація матеріалу супроводжується деформаційною анізотропією. У межах моделі плоскопластичного середовища [37] деформаційна анізотропія характеризується опором зсуву $R_m(\theta_0, t)$, що визначається лівою частиною рівняння (2) при $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$. Зокрема, при пропорційному навантаженні $\mathbf{O}\mathbf{A} = \mathbf{S}(t_A)$ уздовж осі OS_1 і $F(\omega)$ (4) маємо [27, 37]

$$R_m(\theta_0, t_A) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} S(t_A) \cos 2\theta_0, & \theta_0 \in [-\alpha(t_A), \alpha(t_A)], \\ b_0^{(1)}(\alpha_A) + b_1^{(1)}(\alpha_A) \cos 2\theta_0, & \theta_0 \in \left[\alpha(t_A), \frac{\pi}{2} - \alpha(t_A) \right], \\ b_0^{(2)}(\alpha_A) + b_1^{(2)}(\alpha_A) \cos 2\theta_0, & \theta_0 \in \left[\frac{\pi}{2} - \alpha(t_A), \frac{\pi}{2} + \alpha(t_A) \right], \end{cases} \quad (12)$$

$$R_m(\theta_0 \pm \pi, t_A) = (R_m(\theta_0, t_A)), \quad R_{-m}(\theta_0, t_A) = R_m(\pi/2 + \theta_0, t_A). \quad (13)$$

Тут

$$b_0^{(1)}(\alpha_A) = \tau_s [1 + A_0(\alpha_A) a_0 (\sin 2\alpha_A - 2\alpha_A \cos 2\alpha_A)],$$

$$b_1^{(1)}(\alpha_A) = \tau_s [A_0(\alpha_A) a_2 (\alpha_A - 0.25 \sin 4\alpha_A)],$$

$$b_0^{(2)} = b_0^{(1)}(\alpha_A) + \tau_s A_0(\alpha_A) \alpha_4 \cos 2\alpha_A,$$

$$b_1^{(2)}(\alpha_A) = b_1^{(1)}(\alpha_A) - \tau_s A_0(\alpha_A) \alpha_4,$$

$$A_0(\alpha_A) = [(a_3 + 2a_0\alpha_A) \cos 2\alpha_A - a_0 \sin 2\alpha_A]^{-1}, \quad \alpha_A = \alpha(t_A). \quad (14)$$

Якісну картину залежності $R_m \sim \theta_0$, яка визначається формулами (12)–(14), показано на рис. 1 лінією 1.

Коло радіуса τ_s (лінія 2) відображає опір зсуву початково ізотропного матеріалу. Графік $R_m \sim \theta_0$ за пропорційного навантаження має дві осі симетрії, уздовж яких згідно з законом парності дотичних напружень діють $\tau_{\max}(t)$, $t \in [t_0, t_A]$. Множину напрямків ковзання $\theta_0 \in [-\alpha(t_A), \alpha(t_A)]$ на рис. 1 затемнено і позначено цифрою **I**. За відомого значення $R_m(\theta_0, t)$ лінію Σ (рис. 2) перетину поверхні навантаження з площиною OS_1S_3

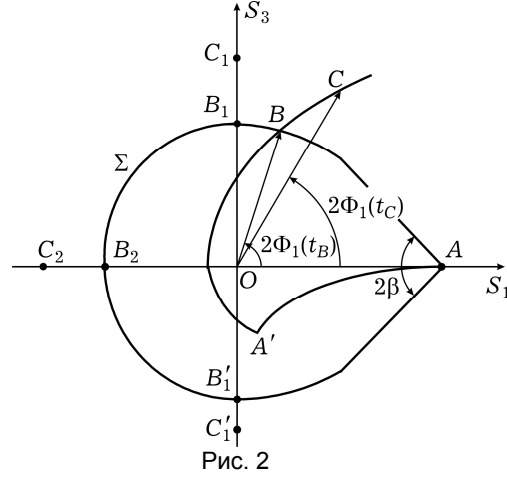


Рис. 2

п'ятивимірному простору девіатора напружень Ільюшина будемо [37] на основі рівнянь, які при $\Phi_0 = 0$ запишемо у такій параметричній формі:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{2} R_m(\theta_0, t_A) \cos 2\theta_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial R_m(\theta_0, t_A)}{\partial \theta_0} \sin 2\theta_0, \\ S_3 &= \sqrt{2} R_m(\theta_0, t_A) \sin 2\theta_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial R_m(\theta_0, t_A)}{\partial \theta_0} \cos 2\theta_0 \end{aligned} \quad (15)$$

або, враховуючи (12)–(14),

$$S_1 = \sqrt{2} [b_1^{(k)}(\alpha_A) + b_0^{(k)} \cos 2\theta_0], \quad S_3 = \sqrt{2} b_0^{(k)}(\alpha_A) \sin 2\theta_0, \quad (16)$$

де

$$k = \begin{cases} 1, & \theta_0 \in [\alpha(t_A), \pi/2 - \alpha(t_A)], \\ 2, & \theta_0 \in [\pi/2 - \alpha(t_A), \pi/2 + \alpha(t_A)]. \end{cases}$$

Кут сингулярності 2β у точці A на Σ задається формулою

$$2\beta = \pi - 4\alpha(t_A). \quad (17)$$

Для визначення ефекту Баушінгера можна одержати [27, 37]

$$\tau_s^-(\alpha_A) = |OB_2| = R_m(\pi/2, t_A) = b_0^{(2)}(\alpha_A) - b_1^{(2)}(\alpha_A), \quad \tau_s^- = \sigma_s^-/\sqrt{3}. \quad (18)$$

Оскільки лінія $R_m \sim \theta_0$ за пропорційного навантаження має дві осі симетрії, то для її побудови досить провести обчислення за формулами (12) зі зміною кута θ_0 в інтервалі $[0, \pi/2]$. Вузлові значення кутів θ_0 і $2\Phi_1(t)$ ліній $R_m \sim \theta_0$ і Σ , що даються формулами (12) і (16), наведено в табл. 1, у якій позначено $k_{1,2}(\alpha_A) = b_1^{(1)}(\alpha_A) \pm b_0^{(1)}(\alpha_A) \cos 2\alpha_A$.

Таблиця 1

θ_0	α_A	$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{b_1^{(1)}(\alpha_A)}{b_0^{(1)}(\alpha_A)}$	$\pi/2 - \alpha_A$	$\pi/2$
$2\Phi_1(t)$	$\arctg \frac{b_0^{(1)}(\alpha_A) \sin 2\alpha_A}{k_1(\alpha_A)}$	$\pi/2$	$\arctg \frac{b_0^{(1)}(\alpha_A) \sin 2\alpha_A}{k_2(\alpha_A)}$	π

3. Кусково-гладкі траєкторії навантаження з ділянками пружного розвантаження. Повернемося до рис. 2 і розглянемо траєкторію $OAA'BC$ з ділянкою пружного розвантаження $AA'B$. У цьому випадку $\Gamma^{(p)}(t_B) = \Gamma^{(p)}(t_A)$. Приріст пластичної деформації поновлюється на ділянці BC , для якої вихідні рівняння (1) і (2) теорії ковзання [30] з урахуванням деформаційної анізотропії $R_m(\theta_0, t_A)$ (12)–(14) перепишемо так:

$$\int_{-\alpha^*(t)}^{\alpha^*(t)} F(|\theta^* - \theta_0^*|) \psi(\theta^*, t) d\theta^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta^*(t) - 2\theta_0^*], \quad (19)$$

$$\int_{t_B - \alpha^*(\xi)}^t \int_{-\alpha^*(\xi)}^{\alpha^*(\xi)} F(|\theta^* - \theta_0^*|) \psi(\theta^*, \xi) d\theta^* d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0^* + \alpha^*(t) - \Phi(t)] -$$

$$- b_0^{(k)}(\alpha_A) - b_1^{(k)}(\alpha_A) \cos 2[\theta_0^* + \alpha^*(t)],$$

$$\theta_0^* \in [-\alpha^*(t), \alpha^*(t)], \quad t \geq t_B, \quad (20)$$

де

$$\theta^* = \theta - \alpha^*(t), \quad \theta_0^* = \theta_0 - \alpha^*(t),$$

$$2\alpha^*(t) = \alpha_2(t) + \alpha_1(t), \quad 2\alpha^* = \alpha_2(t) - \alpha_1(t),$$

$$\psi(\theta^*, t) = \Pi[\varepsilon_i^{(p)}(t), \lambda_k^*(t)] \varphi_t'(\theta^* + \alpha^*(t), t),$$

$$\vartheta^*(t) = \vartheta(t) - 2\alpha^*(t). \quad (21)$$

Для компонент вектора швидкості плоскопластичної деформації $\dot{\Gamma}^{(p)}$ за формулами (5) з урахуванням (21) одержуємо

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_1^{(p)}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2\Pi} \int_{-\alpha^*(t)}^{\alpha^*(t)} \psi(\theta^*, t) \cos 2[\theta^* + \alpha^*(t)] d\theta^*, \\ \Gamma_3^{(p)}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2\Pi} \int_{-\alpha^*(t)}^{\alpha^*(t)} \psi(\theta^*, t) \sin 2[\theta^* + \alpha^*(t)] d\theta^*, \quad \Phi_0 = 0.\end{aligned}\quad (22)$$

Як уже зазначалося, методи розв'язування системи рівнянь типу (19), (20) відомі [24, 33, 37]. Для швидкості інтенсивності ковзання $\varphi'_t(\theta, t) \equiv \varphi'_t(\theta^* + \alpha^*(t), t)$ із рівняння (19) маємо

$$\begin{aligned}\Pi\varphi'_t(\theta^* + \alpha^*(t), t) &\equiv \psi(\theta^*, t) = A_1(\alpha^*) \cos \vartheta^*(t) \cos 2\theta^* + \\ &+ B_1(\alpha^*) \sin \vartheta^* \sin 2\theta^* + C_1(\alpha^*) \cos \vartheta^*(t),\end{aligned}\quad (23)$$

де

$$B_1(\alpha^*) = \frac{\sqrt{2}}{2} [a_3 + a_2(\alpha^* - 0.25 \sin 4\alpha^*)]^{-1},$$

а $A_1(\alpha^*)$, $C_1(\alpha^*)$ визначаються формулами (9), у яких при цьому потрібно покласти $\alpha = \alpha^*$. Після обчислення квадратур (22) для компонент вектора $\dot{\Gamma}^{(p)}(t)$ одержуємо

$$\begin{aligned}\Pi\dot{\Gamma}_1^{(p)}(t) &= B_{11}(\alpha^*) \cos \vartheta^* \cos 2\alpha^*(t) - B_{12}(\alpha^*) \sin \vartheta^* \sin 2\alpha^*(t), \\ \Pi\dot{\Gamma}_3^{(p)}(t) &= B_{11}(\alpha^*) \cos \vartheta^* \sin 2\alpha^*(t) + B_{12}(\alpha^*) \sin \vartheta^* \cos 2\alpha^*.\end{aligned}\quad (24)$$

Тут позначено

$$\begin{aligned}B_{11}(\alpha^*) &= \frac{\sqrt{2}}{2} A_1(\alpha^*) \left[\alpha^* + 0.25 \sin 4\alpha^* - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha^*}{a_3 + 2a_0\alpha^*} \right], \\ B_{12}(\alpha^*) &= \frac{\sqrt{2}}{2} B_1(\alpha^*) (\alpha^* - 0.25 \sin 4\alpha^*), \quad \alpha^* = \alpha^*(t), \quad \alpha^* = \alpha^*(t).\end{aligned}\quad (25)$$

У системі координат CS_vS_q з початком у довільній точці C ділянки BC траєкторії навантаження $OAA'BC$ (рис. 2) і повернутій відносно OS_1S_3 проти годинникової стрілки на кут $2(\alpha^* + \Phi_0)$ формули (24) спрощуються і набувають вигляду

$$\Pi d\Gamma_v^{(p)}(t) = B_{11}(\alpha^*) dS_v, \quad \Pi d\Gamma_q^{(p)}(t) = B_{12}(\alpha^*) dS_q.\quad (26)$$

4. Визначення меж напрямків ковзання. У записані для компонент вектора $\dot{\Gamma}^{(p)}(t)$ формули (24) входять дві, поки що невідомі, функції $\alpha^* = \alpha^*(t)$ і $\alpha^* = \alpha^*(t)$. Для їх визначення використаємо рівняння (20). Залежно від геометрії траєкторії навантаження можливі два випадки. Перший з них має місце, коли процес пластичного деформування на другому етапі активного навантаження BC (рис. 2) відбувається без часткового заморожування систем ковзання, тобто, коли множина напрямків $\theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]$ розширюється, так що $\dot{\alpha}_{1,2}(t) = \dot{\alpha}^*(t) \mp \dot{\alpha}^*(t) \geq 0$. У цьому випадку в рівнянні (20) з урахуванням (4) виконаємо перестановку порядку інтегрування і за-

пишемо його так:

$$\begin{aligned}
a_3 \Psi[\theta_0^*, t] + \int_{-\alpha^*(t)}^{\alpha^*(t)} [a_2 \cos 2(\theta^* - \theta_0^*) + a_0] \Psi[\theta^*, t] d\theta^* = \\
= \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0^* + \alpha^*(t) - \Phi(t)] - b_0^{(k)}(\alpha_A) - \\
- b_1^{(k)}(\alpha_A) \cos 2[\theta_0^* + \alpha^*(t)], \\
\theta_0^* \in [-\alpha^*(t), \alpha^*(t)], \quad t \geq t_B, \quad k = 1, 2. \quad (27)
\end{aligned}$$

Тут

$$\Psi[\theta_0^*, t] = \int_{t_0^*(\theta_0^*)}^t \psi(\theta^*, \xi) d\xi, \quad (28)$$

а $t^*(\theta_0^*) \in [t_B, t]$ – момент часу, починаючи з якого в заданому напрямку $\mathbf{n}(\theta_0^*)$ започатковуються перші ковзання на другому етапі активного (BC) навантаження. Із рівняння (28) випливає, що

$$\Psi[\mp \alpha^*(t), t] = 0. \quad (29)$$

Після подвійного диференціювання рівняння (27) за θ_0^* одержимо

$$\begin{aligned}
a_3 \Psi''[\theta_0^*, t] - 4a_2 \int_{-\alpha^*(t)}^{\alpha^*(t)} \cos 2(\theta^* - \theta_0^*) \Psi[\theta^*, t] d\theta^* = \\
= 2\sqrt{2} S(t) \cos 2[\theta_0^* - \Phi(t)] + b_1^{(k)}(\alpha_A) \cos 2[\theta_0^* + \alpha^*(t)], \quad (30)
\end{aligned}$$

де

$$\Psi''[\theta_0^*, t] = \frac{\partial^2 \Psi[\theta_0^*, t]}{\partial^2 \theta_0^*}.$$

Якщо з (27) і (30) вилучити інтегральний член, то прийдемо до такого диференціального рівняння:

$$\Psi''[\theta_0^*, t] + 4\Psi[\theta_0^*, t] = 4C(t), \quad (31)$$

де

$$C(t) = -\frac{1}{a_3} \left(b_0^{(k)}(\alpha_A) + a_0 \int_{-\alpha^*(t)}^{\alpha^*(t)} \psi(\theta^*, t) d\theta^* \right). \quad (32)$$

Частковим розв'язком неоднорідного рівняння (31) є

$$\Psi[\theta_0^*, t] = D(\alpha^*) (\cos 2\theta_0^* - \cos 2\alpha^*), \quad (33)$$

де

$$D(\alpha^*) = \frac{b_0^{(k)}(\alpha_A)}{(a_3 + 2a_0\alpha^*) \cos 2\alpha^* - a_0 \sin 2\alpha^*}.$$

Визначена у такий спосіб функція $\Psi[\theta_0^*, t]$ (33) тотожно задовольняє рівняння (27), (29) з $C(t)$ (32) і, отже, є їх розв'язком за таких умов:

$$\operatorname{tg} 2\alpha^*(t) = \frac{S_3(t)}{S_1(t) - \sqrt{2} b_1^{(k)}(\alpha_A)}, \quad (34)$$

$$D(\alpha^*)[a_3 + a_2(\alpha^* - 0.25 \sin 4\alpha^*)] = \frac{\sqrt{2}}{2}[S_1(t) \cos 2\alpha^*(t) + S_3(t) \sin 2\alpha^*(t) - \sqrt{2} b_1^{(k)}(\alpha_A) \cos 2\alpha^*(t)], \quad t \geq t_B. \quad (35)$$

При наявності побудованої за формулами (16) лінії Σ і заданої траєкторії навантаження $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t)$ рівняння (34) і (35) визначають функції $\alpha^*(t)$, $\alpha^*(t)$, а отже, і межі напрямків ковзання $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ при $t \geq t_B$. Зокрема, в початковий момент часу $t = t_B$ другого етапу пружнопластичного деформування маємо $2\alpha^*(t_B) = \alpha_2(t_B) + \alpha_1(t_B) = 0$, а $2\alpha^*(t_B) \equiv \alpha_2(t_B) - \alpha_1(t_B)$ визначається рівнянням (34), у якому потрібно покласти $t = t_B$. У зв'язку з деформаційною анізотропією матеріалу $R_m(\theta_0, t)$ (12) множина напрямків ковзання $\theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]$ не є симетричною відносно напрямків дії максимальних дотичних напружень і перші ковзання при $t = t_B + 0$ відхиляються від напрямку $\tau_{\max}(t_B)$ на величину кута $2[\alpha(t_B) + \Phi_0]$ у бік зменшення опору зсуву $R_m(\theta_0, t)$ (рис. 1).

Наведені вище для другого етапу пружнопластичного деформування результати одержано за умови $\dot{\alpha}_{1,2}(t) = \dot{\alpha}_2(t) \mp \dot{\alpha}(t) \geq 0$. Якщо ж з деякого моменту часу $t > t_B$ відбувається часткове заморожування систем ковзання, так що $\dot{\alpha}_1(t) \cdot \dot{\alpha}_2(t) < 0$ (істотно немонотонна деформація [21, 27]), то задача визначення функцій $\alpha^*(t)$, $\alpha^*(t)$ зводиться до задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Відповідна методика розглянута у роботах [27, 33, 36, 37] для дволанкових траєкторій навантаження, але без зон розвантаження за пружним законом. Методика залишається без істотних змін і при наявності таких зон.

На основі постулату ізотропії Ільюшина [9] одержані для плоскопластичної деформації результати узагальнюються на випадок довільного розташування плоских траєкторій навантаження в п'ятивимірному просторі девіатора напружень і, зокрема, в координатних площинах OS_1S_2 і OS_2S_3 ($S_2 = \sqrt{3/2}(\sigma_z - \sigma)$, $\dot{\Gamma}_2^{(p)} = \sqrt{3}(\dot{\epsilon}_z^{(p)}/2)$), що відповідають плоскому напруженому стану і можуть бути реалізовані в експерименті на розтяг (стиск) із закрученням тонкостінної трубки.

5. Приклади кусково-гладких траєкторій навантаження.

Приклад 5.1. Розглянемо деформацію трубчатого зразка під дією розтягуючої осрової сили та крутного моменту. Нехай процес навантаження трубки в площині OS_2S_3 задається траєкторією $OAOB_1C_1$. (Тут, як і у наступному **прикладі 5.2**, вісь OS_1 на рис. 2 потрібно змінити на OS_2 .) Геометричні параметри ділянки траєкторії B_1C_1 визначаються формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\Phi_1(t) &= \frac{S_3(t)}{S_2(t)} = \infty, & 2\Phi_1(t) &= \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} 2\Phi_0 &\equiv \frac{S_3(t_A)}{S_2(t_A)} = 0, & 2\Phi(t) &= 2\Phi_1(t) - 2\Phi_0 = \frac{\pi}{2}, \\ \vartheta(t) &= \frac{\pi}{2}, & \vartheta^* &= \vartheta(t) - 2\alpha^*(t), \\ b_0^{(k)}(\alpha_A) &\equiv b_0^{(1)}(\alpha_A), & b_1^{(k)}(\alpha_A) &\equiv b_1^{(1)}(\alpha_A). \end{aligned} \quad (36)$$

При цьому на основі (24) для компонент вектора швидкості пластичної деформації при $t \geq t_{B_1}$ одержуємо

$$\begin{aligned} \Pi \dot{\Gamma}_2^{(p)} &= \frac{1}{2} [B_{11}(\alpha^*) - B_{12}(\alpha^*)] \sin 4\alpha^*, \\ \Pi \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= B_{11}(\alpha^*) \sin^2 2\alpha^* + B_{12}(\alpha^*) \cos 2\alpha^*, \quad t \geq t_B. \end{aligned} \quad (37)$$

Коефіцієнти $B_{11}(\alpha^*)$, $B_{12}(\alpha^*)$ задаються формулами (25) при $\alpha = \alpha^*$, а для визначення функцій $\alpha^*(t)$, $\alpha^*(t)$ на основі (34) і (35) маємо такі рівняння:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha^*(t) &= \frac{-S_3(t)}{2b_1^{(1)}(\alpha_A)}, \\ D(\alpha^*) [a_3 + a_2(\alpha^* - 0.25 \sin 4\alpha^*)] &= \frac{\sqrt{2}}{2} [S_3(t) \sin 2\alpha^* - \\ &\quad - \sqrt{2} b_1^{(1)}(\alpha_A) \cos 2\alpha^*], \quad 2\alpha^*(t_B) = 0, \quad t \geq t_B. \end{aligned}$$

Із першого з цих рівнянь з огляду на характер навантаження трубки випливає, що $4\alpha^* > \pi$. Отже, $\dot{\Gamma}_2^{(p)}(t) < 0$, що приводить до скорочення розтягнутої за межі пружності та розвантаженої тонкостінної трубки при її подальшому закрученні. Якщо в розглянутій в **прикладі 5.1** задачі змінити порядок прикладання до трубки крутного моменту і осьової сили, то прийдемо до відомого в теорії пластичності ефекту, установленого раніше експериментально М. Feigen [39, 43].

Приклад 5.2. Як другий розглянемо приклад пружнопластичного деформування тонкостінної трубки при знаковмінному її навантаженні осьовою силою. Нехай процес навантаження трубки характеризується траєкторією $ОАОВ_2C_2$ (рис. 2). Для ділянки пружнопластичного стиску B_2C_2 , враховуючи заміну OS_1 на OS_2 , маємо

$$\begin{aligned} 2\Phi_0 &= 0, \quad 2\Phi_1(t) = 2\Phi(t) = \pi, \quad \vartheta^* = \pi - 2\alpha^*(t), \quad S_3(t) \equiv 0, \\ b_0^{(k)}(\alpha_A) &= b_0^{(2)}(\alpha_A), \quad b_1^{(k)}(\alpha_A) = b_1^{(2)}(\alpha_A), \quad t \geq t_{B_2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Величина ефекту Баушінгера τ_s^- задається формулою (18). Для визначення функцій $\alpha^*(t)$, $\alpha^*(t)$ на основі (34) і (35) маємо такі рівняння:

$$\alpha^*(t) \equiv \pi, \quad D(\alpha^*) [a_3 + a_2[\alpha^* - 0.25\alpha^*]] = \frac{S_2(t)}{\sqrt{2}} - b_1^{(2)}(\alpha_A), \quad t \geq t_{B_2}. \quad (39)$$

Множина напрямків ковзання $\theta_0^* \in [-\alpha_1^*(t_{C_2}), \alpha_2^*(t_{C_2})]$, що відповідає пружнопластичному стиску вздовж B_2C_2 (рис. 2), на рис. 1 затемнена і позначена цифрою **III**.

За формулами (38), з урахуванням (24) для компонент вектора $\dot{\Gamma}^{(p)}(t)$ одержуємо

$$\dot{\Gamma}_2^{(p)}(t) = \frac{-B_{11}(\alpha^*)}{\Pi}, \quad \dot{\Gamma}_3^{(p)}(t) \equiv 0, \quad t > t_{B_2}. \quad (40)$$

Сумарні компоненти $\Gamma^{(p)}(t_{C_2})$ визначаємо шляхом інтегрування:

$$\Gamma_2^{(p)}(t_{C_2}) = \int_{t_0}^{t_A} \dot{\Gamma}_2^{(p)}(t) dt + \int_{t_{B_2}}^{t_{C_2}} \dot{\Gamma}_2^{(p)}(t) dt, \quad \Gamma_3^{(p)}(t_{C_2}) = 0. \quad (41)$$

Пружні складові деформації задаємо законом Гука (7). Залежність між інтенсивностями $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ будемо з урахуванням формул

$$\sigma_i = \sqrt{3/2} S, \quad \varepsilon_i^{(p)} = \sqrt{2/3} \Gamma^{(p)}, \quad S = [S_2^2 + S_3^2]^{1/2},$$

$$\Gamma^{(p)} = [(\Gamma_2^{(p)})^2 + (\Gamma_3^{(p)})^2]^{1/2}. \quad (42)$$

Приклад 5.3. Як наступний приклад розглянемо знаковміне закручення тонкостінної трубки. У цьому випадку вісь OS_1 на рис. 2 замінюється на OS_3 , а OS_3 – на OS_2 . Далі на основі постулату ізотропії Ільюшина з урахуванням результатів **прикладу 5.2** для $t \geq t_{B_2}$ можемо записати

$$\dot{\Gamma}_2^{(p)} = 0, \quad \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{-B_{11}(\alpha^*)}{\Pi},$$

$$\Gamma_3^{(p)}(t) = \int_{t_0}^{t_A} \dot{\Gamma}_3^{(p)}(t) dt + \int_{t_{B_2}}^{t_{C_2}} \dot{\Gamma}_3^{(p)}(t) dt, \quad t \geq t_{C_2}. \quad (43)$$

Результати цього прикладу будуть конкретизовані і використані далі.

6. Про матеріальні функції моделі плоскопластичного середовища [30] та методи їх визначення з урахуванням ефекту Баушінгера. В основу побудови визначальних рівнянь теорії ковзання [30, 37] закладено дві матеріальні функції: функція зміцнення $F(\omega)$ і функція пластичності $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*]$. Перша з них, F , враховує взаємодію систем ковзання, формує деформаційну анізотропію матеріалу і в кінцевому рахунку визначає його векторні властивості. У праці [34] розглянуто функцію зміцнення у загальному вигляді:

$$F(\omega) = a_0 \omega^{-h_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos 2n\omega + a_1 \delta(\pi/2 - \omega)^{-h_2}, \quad (44)$$

де

$$a_0, a_1, a_{2n}, h_1, h_2 \sim \text{const}, \quad h_1, h_2 < 1,$$

а також її часткові випадки. Найпростіші з них приводять до відомих теорій пластичної течії з ізотропним, $F \equiv a = \text{const}$, кінематичним, $F = b \cos 2\omega$, або комбінованим зміцненням, $F = a + b \cos 2\omega$, і відкривають можливості природного узагальнення [32, 36] цих теорій.

Залежно від характеру функції $F(\omega)$ закладена в теорію пластичності [30, 37] концепція ковзання може приводити як до сингулярних, так і до регулярних поверхонь навантаження Σ . Регулярні поверхні маємо при всіх допустимих $F(\omega)$, $\omega \in [0, \pi/2]$, які задовольняють умови $F(0) > 0$, $F(\pi/2) < 0$, $F'(0) = 0$ ($F' = dF/d\omega$), а сингулярні, коли $F(0) > 0$, $F(\pi/2) < 0$, $|F'(0)| > 0$. До цього другого класу належить $F(\omega)$ (4).

Функція пластичності $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*]$ враховує вплив на залежність $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\varepsilon}_{ij}$ інтенсивності пластичної деформації $\varepsilon_i^{(p)}$, її екстремальних значень λ_k^* , що відповідають зміні знака швидкості $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}(t)$ на протилежний, або максимальному значенню $\varepsilon_i^{(p)}$ за всю історію навантаження, і в кінцевому рахунку описує скалярні властивості матеріалу. У випадку пластичного деформування, за якого $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}(t)$ є неспадною функцією часу ($\dot{\varepsilon}_i^{(p)}(t) \geq 0$), замість $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*]$ приймають $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$. Функція пластичності дозволяє певною мірою нівелювати деяку невизначеність, що закладається в теорію при

виборі часткових функцій зміцнення $F(\omega)$, і корегувати рівняння зв'язку $\sigma_{mn} \sim \varepsilon_{mn}$ з макроекспериментом.

Для практичної побудови функцій пластичності $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$, $\Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*]$ за базові можна використати експерименти на розтяг – стиск, або знакозмінне закручення тонкостінної трубки. За формулами (10), (11) для пружнопластичного закручення на ділянці abc діаграми $\tau \sim \gamma$ (рис. 3) маємо

$$d\gamma^{(p)} = \frac{2B_{11}(\alpha)}{\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]} d\tau, \quad (45)$$

де $\alpha = \alpha[\tau/\tau_s]$ визначається рівнянням

$$\frac{a_3 + a_2(\alpha - 0.25 \sin 4\alpha)}{(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha} = \frac{\sigma_i}{\sigma_s}, \quad (46)$$

де $\sigma_i = \sqrt{3} \tau$, $\sigma_s = \sqrt{3} \tau_s$, $\varepsilon_i^{(p)} = \gamma^{(p)}/\sqrt{3}$.

З іншого боку, можемо записати

$$d\gamma^{(p)} = d\gamma - d\gamma^e = \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G} \right) d\tau, \quad (47)$$

де G , G_t – пружний і дотичний модулі діаграми $\tau \sim \gamma$. Порівнюючи теоретичну залежність $d\gamma^{(p)} \sim d\tau$ (45) з експериментальною (47), одержуємо формулу для визначення функції пластичності

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] = \frac{2}{3} \frac{EE_t}{E - E_t} B_{11}[\sigma_i/\sigma_s], \quad (48)$$

де $E = 3G$, $E_t = 3G_t$, $\sigma_i = \sqrt{3} \tau$, $\sigma_s = \sqrt{3} \tau_s$, $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}(t) \geq 0$, $B_{11}[\sigma_i/\sigma_s] = B_{11}(q[\sigma_i/\sigma_s])$ і $q[\sigma_i/\sigma_s] = \alpha(t)$ – розв'язок рівняння (46) відносно α , $\alpha < \pi/4$.

Розглянемо тепер задачу побудови функції пластичності $\Pi_1 = \Pi_1[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_1^*]$, де $\lambda_1^* = \varepsilon_i^{(p)}(t_C) = \gamma^{(p)}(t_C)/\sqrt{3} = |OO^*|/\sqrt{3}$, на ділянці $a^*b^*c^*$ діаграми $\tau^* \sim \gamma^*$, зображеної в системі координат $O^*\gamma^*\tau^*$ (де $\tau^* = -\tau$, $\gamma^* = \gamma^{(p)}(t_C) - \gamma$). У цьому випадку необхідно використати результати розв'язку задачі **прикладу 5.3**. На основі (43) маємо

$$\frac{d\gamma^{*(p)}}{d\tau^*} = \frac{2B_{11}(\alpha^*)}{\Pi_1[\varepsilon_i^*(t), \lambda_1^*]}, \quad \varepsilon_i^*(t) = \frac{\gamma^{*(p)}}{\sqrt{3}} = \frac{|O^*m^*|}{\sqrt{3}},$$

$$\dot{\gamma}^{*(p)} = \frac{d\gamma^{*(p)}}{dt} = \sqrt{2} \dot{\Gamma}_3^{*(p)}(t), \quad \lambda_1^* = \varepsilon_i^*(t_C) = \frac{\gamma^{(p)}(t_C)}{\sqrt{3}}, \quad (49)$$

де $B_{11}(\alpha^*)$ задається формулою (25), а функція $\alpha^* = \alpha^*[\tau^*/\tau_s^-]$ і величина $\tau_s^- \equiv \tau_s^*$ визначаються рівняннями (39) і (18) з урахуванням заміни $S_1(t)$ на $S_3(t)$.

Аналогічно до формули (47) можемо записати

$$d\gamma^{*(p)} \equiv d\gamma^* - d\gamma^{*(e)} = \left(\frac{1}{G_t^*} - \frac{1}{G^*} \right) d\tau^*. \quad (50)$$

Тут індекс «*» означає належність величин γ^* , τ^* , G^* , G_t^* до ділянки $a^*b^*c^*$ діаграми $\tau^* \sim \gamma^*$ (рис. 3). Порівняння теоретичної формули (49) з експериментальною (50) визначає функцію $\Pi_1[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_1^*]$, побудовану з ура-

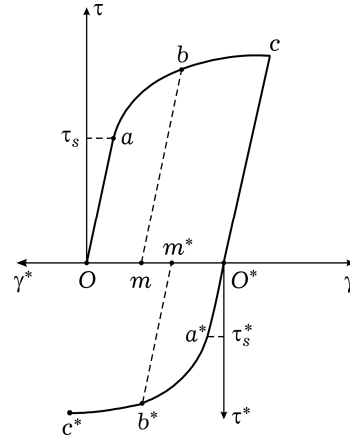


Рис. 3

хуванням ефекту Баушінгера. У такий спосіб одержуємо

$$\Pi_1[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_1^*] = \frac{2}{3} \frac{E^* E_t^*}{E^* - E_t^*} B_{11}[\sigma_i^*/\sigma_s^-], \quad \sigma_s^- \equiv \sigma_s^*, \quad (51)$$

де $E^* = 3G^*$, $E_t^* = 3G_t^*$, $\sigma_i^* = \sqrt{3}|\tau^*|$, $\varepsilon_i^{(p)} = \gamma^{*(p)}/\sqrt{3}$, $B_{11}[\sigma_i^*/\sigma_s^-] = B_{11}(q[\sigma_i^*/\sigma_s^-])$ і $q[\sigma_i^*/\sigma_s^-] = \alpha^*$, $\alpha^* < \pi/4$, – розв’язок рівнянь (39) з урахуванням заміни $S_1(t)$ на $S_3(t)$.

Приклад 6.1. У деяких часткових випадках знакозмінного навантаження експериментальні діаграми $\sigma_i \sim \varepsilon_i^{(p)}$ і $\sigma_i^* \sim \varepsilon_i^{*(p)}$ для металів і їх сплавів можна з достатньою мірою точності замінити графіками степеневі функції типу $y = a_k + b_k(c_k - x)^n$, $a_k, b_k, c_k - x > 0$, $k = 1, 2$, $n = 1/m < 1$. Використаємо таку можливість для побудови функцій пластичності Π_0 і Π_1 .

Для ділянки abc діаграми $\tau \sim \gamma$ (рис. 3) запишемо

$$\gamma = \gamma^{(e)} + \gamma^{(p)}, \quad \gamma^{(e)} = \tau/G, \quad \gamma^{(p)} = [b_1(\tau - \tau_s)]^{m_1}, \quad m_1 > 1, \quad (52)$$

або в розв’язаному відносно τ вигляді

$$\tau = \tau_s + \frac{1}{b_1}(\gamma^{(p)})^{1/m_1}. \quad (53)$$

Із (52) маємо

$$\frac{d\gamma^{(p)}}{d\tau} = m_1 b_1 [b_1(\tau - \tau_s)]^{m_1-1}. \quad (54)$$

Порівняння формул (45) і (54) дає

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] = \frac{2c_1 B_{11}(q[\sigma_i/\sigma_s])}{(\varepsilon_i^{(p)})^{n_1}}, \quad c_1 = 3^{n_1/2} m_1 b_1, \quad n_1 = \frac{m_1 - 1}{m_1} < 1. \quad (55)$$

Для функції $\Pi_1[\varepsilon_i^{*(p)}(t), \lambda_1^*]$ у системі координат $O^* \gamma^* \tau^*$ (рис. 3) аналогічно до (55) можна одержати

$$\Pi_1[\varepsilon_i^{*(p)}(t), \lambda_1^*] = \frac{2c_2 B_{11}^*(q^*[\sigma_i^*/\sigma_s^-])}{(\varepsilon_i^{*(p)}(t))^{n_2}}, \quad c_2 = 3^{n_2/2} m_2 b_2, \quad (56)$$

$$n_2 = \frac{m_2 - 1}{m_2}, \quad \sigma_s^- = \sqrt{3} \tau_s^-, \quad \varepsilon_i^{*(p)}(t) = \frac{\gamma^{*(p)}}{\sqrt{3}}, \quad \gamma^{*(p)} = |O^* m^*|. \quad (56)$$

У вихідній системі координат $O\gamma\tau$ (рис. 3) формулу (56) перепишемо так:

$$\Pi_1[\lambda_1^* - \varepsilon_i^{(p)}(t)] = 2c_2 B_{11}(q[\sigma_i/\sigma_s^-]) \cdot (\lambda_1^* - \varepsilon_i^{(p)}(t))^{n_2}, \quad (57)$$

$$\lambda_1^* = \varepsilon_i^{(p)}(t_C), \quad \varepsilon_i^{(p)}(t) = |O^* m^*| = |OO^*| - |Om^*|, \quad \sigma_s^- = \sqrt{3} \tau_s^-.$$

Для деяких матеріалів параметри c_1 , n_1 і c_2 , n_2 можуть співпадати.

Якісну картину графіків залежності $\Pi_0, \Pi_1 \sim \varepsilon_i^{(p)}$, побудованих на основі формул (55), (56) для сталі-45 з використанням експериментальних даних робіт [15, 19], показано на рис. 4. Інтегровна особливість функцій Π_0 і Π_1 при $\varepsilon_i^{(p)} = 0$ і $\varepsilon_i^{(p)} = \lambda_1^*$ забезпечує неперервність дотичного модуля $E_t = d\sigma_i/d\varepsilon_i$, а також адекватність теорії експерименту в околі точок переходу від пружних до пластичних ділянок діаграми $\sigma_i \sim \varepsilon_i$.

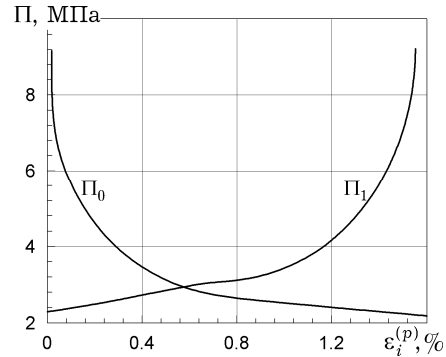


Рис. 4

Питання побудови Π_0 , Π_1 при регулярних функціях зміцнення F розглянуто у роботах [31, 36], де аналогічно до формул (48) і (51) одержано

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] = \frac{1}{3} \frac{EE_t}{E - E_t}, \quad \Pi_0[\varepsilon_1^{(p)}, \lambda_1^*] = \frac{1}{3} \frac{EE_t^*}{E - E_t^*}. \quad (58)$$

Методику побудови для ідеально пружнопластичного матеріалу комбінованої матеріальної функції $R = \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_1^*]F(\omega)$ з урахуванням установленої в експерименті зміни поверхні навантаження Σ при деформації на площинці текучості ($\sigma_i = \sigma_s = \text{const}$) розглянуто у роботі [22].

1. *Абрамова Л. В., Крюкова И. В.* К теории упругопластических деформаций металлов по траекториям в виде двухзвенных ломаных // Проблемы прочности. – 1981. – № 1. – С. 8–12.
Te same: *Abramova L. V., Kryukova I. V.* Elastoplastic metal strain theory for two-link broken paths // Strength Mater. – 1981. – **13**, No. 1. – P. 5–10.
2. *Аннин Б. Д., Жигалкин В. М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 342 с.
3. *Гаврилов М. П., Гусенков А. П.* Сопrotивление деформированию при некоторых режимах сложного малоциклового нагружения // Машиноведение. – 1975. – № 1. – С. 62–69.
4. *Дегтярев В. П.* Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1967. – 131 с.
5. *Жигалкин В. М., Гинзбург И. Э., Семенов В. Н., Усольцева О. М.* Влияние сложного нагружения с частичными разгрузками на характер упрочнения стали // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1994. – № 3. – С. 58–64.
Te same: *Zhigalkin V. M., Ginzburg I. É., Semenov V. N., Usol'tseva O. M.* Effect of complex loading with partial unloading on the nature of steel strengthening // J. Min. Sci. – 1994. – **30**, No. 3. – P. 275–280.
6. *Жуков А. М., Работнов Ю. Н.* Исследование пластической деформации стали при сложном нагружении // Инж. сб. – 1954. – **18**. – С. 105–112.
7. *Зубчанинов В. Г., Гультаев В. И.* Экспериментальное исследование устойчивости оболочек при сложном нагружении и разгрузении материала // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2011. – № 2 (10). – С. 21–24.
8. *Зубчанинов В. Г., Гультаев В. И.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек из стали 45 при сложном докритическом нагружении // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2011. – № 2 (10). – С. 16–20.
9. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
10. *Кудряшов Н. Н., Рычков Б. А., Швайко Н. Ю.* Теоретическое и экспериментальное исследование законов деформации сплава АК-6 при сложном нагружении // Изв. АН КиргССР. – 1970. – № 1. – С. 28–35.
11. *Кудряшов Н. Н., Швайко Н. Ю.* Деформация анизотропно упрочняющейся среды при нагружении по двузвенной ломаной // Сложная деформация твердого тела. – Фрунзе: Изд-во Илим, 1969. – С. 35–74.
12. *Кузьменко В. И.* Контактные задачи для упругопластической полосы при сложном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 128–135.
13. *Кузьменко В. И.* О контактных задачах теории пластичности при сложном нагружении // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48**, № 3. – С. 473–481.
14. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – Москва, Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58–82.
15. *Леонов М. Я., Рычков Б. А.* Развитие концепции скольжения в теории пластичности // Физ.-хим. механика материалов. – 1982. – **18**, № 4. – С. 3–12.
Te same: *Leonov M. Ya., Rychkov B. A.* Development of the concept of slip in the theory of plasticity // Soviet Mater. Sci. – 1982. – **18**, No. 4. – P. 291–299.
16. *Москвитин В. В.* Пластичность при переменных нагружениях. – Москва: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1965. – 263 с.

17. *Мохель А. Н., Салганик Р. Л., Христианович С. А.* О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов: Определяющие уравнения и расчеты по ним // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 119–141.
18. *Рычков Б. А.* Сложная деформация пластических материалов при нагружениях без поворота главных осей тензора напряжений // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1993. – № 1. – С. 112–119.
19. *Рычков Б. А.* Сложная деформация стали-45 // К проблеме механики реального твердого тела. – Фрунзе: Изд-во Илим, 1984. – С. 66–78.
20. *Тальтов Г. Б.* Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. – Ленинград: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1968. – 134 с.
21. *Швайко А. Ю., Швайко М. Ю.* Дослідження явища занурення на діаграмі інтенсивність напружень – інтенсивність деформацій при складному навантаженні пружнопластичних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 1. – С. 174–184.
Te same: *Shvaiko A. Yu., Shvaiko M. Yu.* Investigation of the phenomenon of deepening in the stress-intensity-strain-intensity diagram for elastoplastic materials under complex loading // J. Math. Sci. – 2014. – **201**, No. 2. – P. 214–228.
22. *Швайко М. Ю.* Модель пластичного деформування матеріалів з площинкою текучості // Доп. НАН України. Сер. А. – 1997. – № 6. – С. 78–84.
23. *Швайко М. Ю.* Про коректність теорій пластичності, які враховують взаємовплив механізмів непружного деформування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 2. – С. 54–62.
Te same: *Shvaiko M. Yu.* Correctness of the theories of plasticity taking into account the mutual influence of the mechanisms of inelastic deformation // Mater. Sci. – 2001. – **37**, No. 2. – P. 199–209.
24. *Швайко М. Ю.* Про методи розв'язування інтегральних рівнянь теорії пластичності, заснованої на концепції ковзання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 48–57.
Te same: *Shvaiko M. Yu.* On methods for the solution of integral equations of the theory of plasticity based on the concept of slip // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 548–560.
25. *Швайко М. Ю.* Про стійкість деформування і диференціальну потенціальність визначальних рівнянь теорії пластичності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 3. – С. 42–52.
Te same: *Shvaiko M. Yu.* Stability of deformation and differential potentiality of constitutive equations of the theory of plasticity // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 3. – P. 361–373.
26. *Швайко М. Ю.* Теорія ковзання та її застосування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 4. – С. 107–120.
Te same: *Shvaiko M. Yu.* Slip theory and its applications // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 4. – P. 590–605.
27. *Швайко М. Ю., Фількевич М. М.* Аналітичне та експериментальне дослідження деформації сталі-45 при складному навантаженні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 188–197.
28. *Швайко Н. Ю.* Влияние истории нагружения на устойчивость элементов конструкций. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. гос. ун-та, 1991. – 168 с.
29. *Швайко Н. Ю.* К вопросу о принципе макродетерминизма в теории пластичности // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, 2000. – Т. 1. – С. 40–45.
30. *Швайко Н. Ю.* К теории пластичности, основанной на концепции скольжения // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 11. – С. 12–24.
Te same: *Shvaiko N. Yu.* Theory of plasticity, based on the concept of slip // Soviet Appl. Mech. – 1976. – **12**, No. 11. – P. 1102–1112.
31. *Швайко Н. Ю.* К теории скольжения с гладкими и сингулярными поверхностями нагружения // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. статей к 75-летию Е. И. Шемякина. – Москва: Физматлит, 2006. – С. 849–858.
32. *Швайко Н. Ю.* Концепция скольжения и гладкие поверхности нагружения в теории пластичности // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 10. – С. 58–63.
33. *Швайко Н. Ю.* Методы решения уравнений, описывающих закон деформирования линейной анизотропно упрочняющейся плоскопластической среды // Сложная деформация твердого тела. – Фрунзе: Изд-во Илим, 1969. – С. 3–34.

34. Швайко Н. Ю. О возможном общем виде функции упрочнения линейной плоско-пластической среды // Гидромеханика и теория упругости. – 1972. – Вып. 14. – С. 109–120.
35. Швайко Н. Ю. О двух формах бифуркации процесса деформирования упруго-пластического тела при сложном нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 8. – С. 651–655.
36. Швайко Н. Ю. О теории пластичности с гладкими поверхностями нагружения // Физ.-хим. механика материалов. – 1997. – **33**, № 6. – С. 63–70.
Te same: *Shvaiko N. Yu. On the theory of plasticity with smooth surfaces of loading // Mater. Sci.* – 1997. – **33**, No. 6. – P. 803–812.
37. Швайко Н. Ю. Сложное нагружение и вопросы устойчивости. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. гос. ун-та, 1989. – 176 с.
38. Швайко Н. Ю. Сложное нагружение и некоторые вопросы устойчивости элементов конструкций // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 2. – С. 6–34.
Te same: *Shvaiko N. Yu. Complex loading and some problems of stability of structural elements // Soviet Appl. Mech.* – 1979. – **15**, No. 2. – P. 95–116.
39. Швайко Н. Ю. Эффект Фейгена и его описание теорий пластичности, основанной на концепции скольжения // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – 2010. – **18**, № 5. – Сер. Механіка. – Вип. 14, т. 1. – С. 15–25.
40. Швайко Н. Ю., Клышев Ю. В., Рычков Б. А. Линейно анизотропно упрочняющаяся среда // Пластичность и хрупкость. – Фрунзе: Изд-во Илим, 1967. – С. 3–55.
41. Швайко Н. Ю., Янко В. И. Численное исследование влияния эффекта Баушингера на бифуркацию процесса деформирования цилиндрической оболочки // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – Горький: Горьк. гос. ун-т, 1979. – Вып. 13. – С. 128–133.
42. *Batdorf S. B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip // NASA. Techn. Notes No. 1871.* – April, 1949.
Te same: *Батдорф С. Б., Будянски Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика: Сб. пер. иностр. статей.* – 1962. – № 1. – С. 135–155.
43. *Feigen M. Inelastic behavior under combine tension and torsion // Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954.* – New York: Pergamon Press, 1955. – P. 469–476.
44. *Rusinko A., Rusinko K. Synthetic theory of plasticity // In: Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and creep of metals.* – (Chapt. 3. – P. 181–236.) – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. – 434 p.

ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ПО КУСОЧНО-ГЛАДКИМ ТРАЕКТОРИЯМ С УЧАСТКАМИ РАЗГРУЗКИ ПО УПРУГОМУ ЗАКОНУ

В рамках варианта теории пластичности, основанной на концепции скольжения, предложена с учетом деформационной анизотропии методика определения пластической деформации материалов при нагружении по кусочно-гладким траекториям с участками разгрузки по упругому закону. Заложена в основу теории материальная функция пластичности Π при заданной функции упрочнения F определяется из эксперимента на растяжение – сжатие или на знакопеременное кручение тонкостенной трубки.

PLASTIC DEFORMATION OF MATERIALS UNDER LOADING ALONG PIECEWISE SMOOTH TRAJECTORIES WITH AREAS OF UNLOADING BY ELASTIC LAW

Within the framework of variant of plasticity theory based on the sliding concept the method for determination of plastic deformation of materials with taking into account the strain anisotropy under loading along piecewise smooth trajectories with areas of unloading by elastic law is proposed. Forming the basis of the theory the material function of plasticity Π for a given function of hardening F is determined from experiment the tension – compression or from the experiment alternating torsion of thin-walled tube.

Дніпропетр. нац. ун-т
ім. О. Гончара, Дніпропетровськ

Одержано
12.04.15