

ПЛОСКА КВАЗІСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ПОКРИТТЯМ ЗА ЗМІШАНИХ УМОВ НАГРІВУ

З використанням інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є побудовано розв'язок плоскої квазістатичної задачі термопружності для півпростору з покриттям. Поверхня покриття нагрівається потоком тепла, симетрично розподіленим у смугі певної ширини та охолоджується за законом Ньютона зовні цієї смуги. Подано результати числового аналізу термонапруженого стану в півпросторі та покритті залежно від інтенсивності охолодження та відносної товщини покриття.

Одним із найпоширеніших технологічних елементів в сучасній інженерній практиці є покриття. Його успішно використовують в ролі антикорозійного, водовідштовхуючого, термозахисного поверхневого наповнювача для виготовлення нових типів матеріалів та модифікації властивостей вже існуючих конструкційних елементів - лопаток турбін, поршнів, головок циліндрів двигунів внутрішнього згоряння та ін. [16, 19, 22].

Математичне моделювання термопружних процесів у кусково-однорідних тілах і розробка методів побудови розв'язків одержаних задач знайшли своє відображення у працях багатьох авторів [7, 9, 17, 20]. Значне місце при вивченні температурних полів і напружень у тілах з покриттями в цих працях займає припущення про те, що відносна товщина покриття істотно менша від товщини основи, на яку воно нанесено. За цим припущенням реалізується наступна схема розв'язування задач термопружної рівноваги тіл з тонкими покриттями: неоднорідність, пов'язана з покриттям, з розгляду виключається, а його наявність моделюється певною математичною залежністю між температурою, тепловими потоками, напруженнями і переміщеннями на поверхні, яка прилягає до покриття, та умовами термомеханічної взаємодії із зовнішнім середовищем. Проте у випадку, коли моделювання взаємодії із зовнішнім середовищем зводиться до так званих змішаних крайових умов, отримати вказані залежності не вдається.

У випадках, коли опис неоднорідності з використанням математичних спрощень провести не вдається або коли він призводить до значних похибок, використовують просторові постановки. Цей підхід ґрунтується на розгляді відповідних вихідних рівнянь для покриття та основи з подальшим узгодженням розв'язків через умови спряження елементів. Такий підхід реалізується з використанням комп'ютерного моделювання у багатьох авторів і, зокрема, в працях [7, 9, 10, 15, 21, 23].

Класичним аналітичним методом розв'язування задач нестационарної теплопровідності та квазістатичної термопружності є метод інтегрального перетворення Лапласа [11]. У просторових випадках поряд із перетворенням Лапласа застосовують ще й інтегральне перетворення за просторовою змінною, вибір якого здійснюється з огляду на об'єкт дослідження та властивості симетрії (відносно площини, осі, точки) чи антисиметрії параметрів поля. У випадку наявності змішаних крайових умов застосування інтегрального перетворення за просторовою змінною приводить до так званих парних (дуальних) інтегральних рівнянь [18], які містять параметр перетворення Лапласа як незалежну змінну. У роботі [6] такі дуальні інтегральні рівняння зведено до рівнянь Фредгольма другого роду, а також запропоновано схему розв'язування цих рівнянь з використанням методу послідовних наближень. У цій же роботі можна знайти синтез результатів, заснованих на методах теорії потенціалу. Всі зазначені розв'язки отримано для безмежних або напівбезмежних однорідних об'єктів. У роботі [8] за допомогою інтегральних перетворень Лапласа і Ганкеля змішану задачу нестационар-

ної теплопровідності для півпростору теж зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Наближений розв'язок цього рівняння запропоновано шукати у вигляді ряду за степенями параметра перетворення Лапласа, однак остаточні формули і будь-який числовий аналіз у роботі відсутні. Результатів з точними, математично обґрунтованими методами розв'язування нестационарних змішаних задач теплопровідності кусково-однорідних тіл у сучасній літературі немає.

У цій праці пропонуємо методику, у якій використовується відносно новий підхід до розв'язування початково-крайових задач математичної фізики – метод поліномів Лагерра [1, 13, 14].

1. Формулювання задачі теплопровідності. Розглянемо півпростір з покриттям, що моделюється шаром товщини h з відмінними від півпростору теплофізичними характеристиками (рис. 1). Джерелом нестационарного теплового процесу в такому тілі є тепловий потік інтенсивності $Q(x,t)$ на граничній поверхні покриття, симетрично розподілений у смугі ширини $2d$. Зовні цієї смуги на поверхні покриття відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. Вважаємо, що початкова температура півпростору та покриття дорівнює нулеві, а на межі поділу покриття і півпростору виконуються умови ідеального теплового контакту.

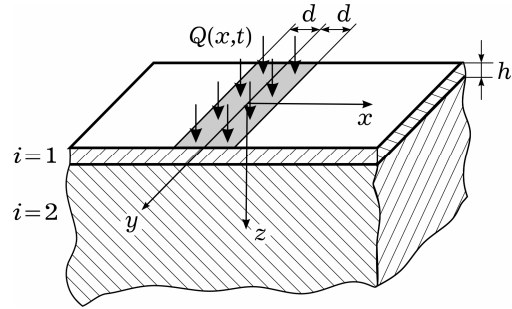


Рис. 1

У термінах безрозмірних змінних і величин $\alpha = x/d$, $\gamma = z/d$, $\tau = a_T^{(2)}t/d^2$, $\gamma_1 = h/d$, $\tilde{a}_T^{(i)} = a_T^{(2)}/a_T^{(i)}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(2)}$, $Bi = \alpha d/\lambda_T^{(1)}$, $q(\alpha, \tau) = Q(\alpha, \tau)d/\lambda_T^{(1)}$, задачу теплопровідності запишемо таким чином:

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_T^{(i)} \partial_\tau T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\partial_\gamma T^{(1)} = -q(\alpha, \tau), \quad \gamma = 0, \quad |\alpha| \leq 1, \quad (3)$$

$$\partial_\gamma T^{(1)} - Bi T^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0, \quad |\alpha| > 1, \quad (4)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_\gamma T^{(1)} = \partial_\gamma T^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1, \quad (5)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} T^{(2)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \partial_\gamma T^{(2)}(\alpha, \gamma, \tau) = 0. \quad (6)$$

Тут $\lambda_T^{(i)}$, $a_T^{(i)}$ – коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності покриття ($i = 1$) та півпростору ($i = 2$) відповідно; α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття, $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$, $i = 1, 2$, – температурне поле у покритті та півпросторі.

До рівняння (1) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ та, враховуючи симетричність температурного поля відносно площини $\alpha = 0$, \cos -перетворення Фур'є за змінною α [11]. Поступаючи далі так, як і в роботі [13], одержимо трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i) \bar{T}_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_i \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_k^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

де $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) \left[\int_0^\infty T_n^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) \cos(\xi\alpha) d\alpha \right] L_n(\lambda\tau) d\tau$ – трансформанта за Лагерром і Фур'є. (Тут $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра [12].)

Загальний розв'язок послідовностей (7) подамо у вигляді алгебричної згортки

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(i)}(\xi)G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi)W_j^{(i)}(\xi, \gamma)], \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

де $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки, які згідно з методом невизначених коефіцієнтів мають вигляд

$$G_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(-\omega_i\gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(\omega_i\gamma)^k}{k!},$$

$$W_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(\omega_i\gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(-\omega_i\gamma)^k}{k!}. \quad (9)$$

Тут введено позначення $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \lambda\tilde{a}_i}$. Коефіцієнти $a_{j,k}^{(i)}$ при цьому одержуємо із рекурентних співвідношень

$$a_{j,k+1}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(a_{j,k+2}^{(i)} - \frac{\lambda\tilde{a}_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)} \right)$$

при довільних $a_{j,0}^{(i)}$ і $a_{j,k}^{(i)} \equiv 0$ при $k > j$. У подальших розрахунках покладемо $a_{0,0}^{(i)} = 1$, $a_{j,0}^{(i)} = 0$, $j \geq 1$, $i = 1, 2$.

Невідомі $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$ знайдемо з умов (3)–(7). Розглянемо спочатку змішані умови (3), (4), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$\gamma = 0: \quad \partial_\gamma T_n^{(1)} = -q_n(\alpha), \quad |\alpha| \leq 1, \quad \partial_\gamma T_n^{(1)} - \text{Bi} T_n^{(1)} = 0, \quad |\alpha| > 1. \quad (10)$$

Безпосереднє застосування \cos -перетворення Фур'є до цих умов неможливе внаслідок їх різномірності, тому другу з умов (10) продовжимо на всю вісь, увівши в розгляд невідому функцію $g_n(\alpha)$:

$$\gamma = 0: \quad \partial_\gamma T_n^{(1)} - \text{Bi} T_n^{(1)} = \begin{cases} g_n(\alpha), & |\alpha| \leq 1, \\ 0, & |\alpha| > 1. \end{cases} \quad (11)$$

Тут слід зазначити, що, якщо покласти в (11) $g_n(\alpha) = -q_n(\alpha)$, то отримаємо граничну умову, яка враховує теплообмін за законом Ньютона по всій граничній поверхні покриття, включаючи і область нагріву. Ця умова часто використовується у формулюваннях задач, щоб таким чином уникнути проблеми різномірності умов.

Після застосування до (11) \cos -перетворення Фур'є одержимо

$$\partial_\gamma \bar{T}_n^{(1)} - \text{Bi} \bar{T}_n^{(1)} = \bar{g}_n(\xi), \quad \gamma = 0, \quad (12)$$

де $\bar{g}_n(\xi) = \int_0^1 g_n(\alpha) \cos(\alpha\xi) d\alpha$.

Застосувавши інтегральне перетворення Лагерра та \cos -перетворення Фур'є до умов (5), (6), одержимо

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}, \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_\gamma \bar{T}_n^{(1)} = \partial_\gamma \bar{T}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1, \quad (13)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \bar{T}_n^{(2)}(\xi, \gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \partial_\gamma \bar{T}_n^{(2)}(\xi, \gamma) = 0. \quad (14)$$

З умови (14) і вигляду фундаментальних розв'язків (9) випливає, що $B_n^{(2)} \equiv 0$. Безпосередньою підстановкою загального розв'язку (8) в умови (12), (13) і перенесенням усіх доданків, які не містять невідомих з нижніми індексами n , у праву частину одержимо послідовність систем трьох алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n,1} \\ c_{n,2} \\ c_{n,3} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Тут

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= -\omega_1 - \text{Bi}, & b_{1,2} &= \omega_1 - \text{Bi}, & b_{2,1} &= \exp(-\omega_1 \gamma_1), & b_{2,2} &= \exp(\omega_1 \gamma_1), \\ b_{2,3} &= -\exp(-\omega_2 \gamma_1), & b_{3,1} &= -\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \exp(-\omega_1 \gamma_1), \\ b_{3,2} &= \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \exp(\omega_1 \gamma_1), & b_{3,3} &= \omega_2 \exp(-\omega_2 \gamma_1), \\ c_{n,1} &= \bar{g}_n(\xi) - \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi) \tilde{G}_j^{(1)}(0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) \tilde{W}_j^{(1)}(0)], \\ c_{n,2} &= \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j^{(2)}(\gamma_1) - A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\gamma_1) - B_{n-j}^{(1)} W_j^{(1)}(\gamma_1)], \\ c_{n,3} &= \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(2)}(\xi) \tilde{G}_j^{(2)}(\gamma_1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)}(\xi) \tilde{G}_j^{(1)}(\gamma_1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)}(\xi) \tilde{W}_j^{(1)}(\gamma_1)]. \end{aligned}$$

Тут введено позначення $G_j^{(i)}(\gamma) \equiv G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $W_j^{(i)}(\gamma) \equiv W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $\tilde{G}_j^{(i)}(\gamma) \equiv d_\gamma G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $\tilde{W}_j^{(i)}(\gamma) \equiv d_\gamma W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$.

Із систем (15) знайдемо рекурентні співвідношення для визначення невідомих $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} &= [-c_{n,1}(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1) + (\omega_1 - \text{Bi})(\omega_2 c_{n,2} + c_{n,3})] \times \\ &\quad \times [(\omega_1 + \text{Bi})(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1) + \\ &\quad + (\omega_1 - \text{Bi})(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1)]^{-1}, \\ B_n^{(1)} &= [c_{n,1}(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1) + (\omega_1 + \text{Bi})(\omega_2 c_{n,2} + c_{n,3})] \times \\ &\quad \times [(\omega_1 + \text{Bi})(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1) + \\ &\quad + (\omega_1 - \text{Bi})(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1)]^{-1}, \\ A_n^{(2)} &= \frac{c_{n,3} - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \exp(\omega_1 \gamma_1) B_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \exp(-\omega_1 \gamma_1) A_n^{(1)}}{\omega_2 \exp(-\omega_2 \gamma_1)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Повернемось до змішаних умов (10). Враховуючи подання (11) і формули обернення \cos -перетворення Фур'є, ці умови запишемо у вигляді послідовності парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty [\bar{g}_n(\xi) + \text{Bi}(A_n^{(1)}(\xi) + B_n^{(1)}(\xi))] \cos(\xi \alpha) d\xi = -\frac{\pi}{2} q_n(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (17)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}_n(\xi) \cos(\xi \alpha) d\xi = 0, \quad \alpha > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Використовуючи розв'язки (16), після перетворень замість послідовності парних інтегральних рівнянь (17) одержуємо рівняння

$$\int_0^{\infty} \bar{g}_n(\xi)[1 + f(\xi)] \cos(\xi\alpha) d\xi = -\frac{\pi}{2} q_n(\alpha) - \int_0^{\infty} F_n(\xi) \cos(\xi\alpha) d\xi, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \text{Bi}[(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1) - (\omega_2 + \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1)] \times \\ &\quad \times [(\omega_1 + \text{Bi})(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1) + \\ &\quad + (\omega_1 - \text{Bi})(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1)]^{-1}, \\ F_n(\xi) &= \{\tilde{c}_{n,1}[(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1) - (\omega_2 + \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1)] + \\ &\quad + 2\omega_1(c_{n,2}\omega_2 + c_{n,3})\} [(\omega_1 + \text{Bi})(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1) + \\ &\quad + (\omega_1 - \text{Bi})(\omega_2 - \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1)]^{-1}, \\ \tilde{c}_{n,1} &= -\sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi) \tilde{G}_j^{(1)}(0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) \tilde{W}_j^{(1)}(0)]. \end{aligned}$$

Для побудови розв'язку парних інтегральних рівнянь (18), (19) застосуємо методику, описану в [2, 3]. Для цього подамо шукану функцію $\bar{g}_n(\xi)$ у вигляді ряду Неймана [4]

$$\bar{g}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} J_{2k+1/2}(\xi). \quad (20)$$

Безпосередньою підстановкою легко пересвідчитись, що рівняння (18) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах $a_{n,k}$, а з рівняння (19) після перетворень одержуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\tilde{a}_{n,k} + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_{n,m} b_{m,k} = c_{n,k}, \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n,k} &= a_{n,k} \left(\sqrt{2k + \frac{1}{2}} \right)^{-1}, \\ b_{m,k} &= 2\sqrt{2m + \frac{1}{2}} \sqrt{2k + \frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} f(\xi) J_{2m+1/2}(\xi) J_{2k+1/2}(\xi) d\xi, \\ c_{n,k} &= 2\sqrt{2k + \frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{\xi}} \bar{q}_n(\xi) + \frac{1}{\xi} F_n(\xi) \right] J_{2k+1/2}(\xi) d\xi, \\ \bar{q}_n(\xi) &= \int_0^{\infty} q_n(\alpha) \cos(\alpha\xi) d\alpha. \end{aligned}$$

Використовуючи властивості рядів Неймана [4], можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} (b_{m,k})^2 = \int_0^1 \int_0^1 M^2(x, y) dy dx,$$

де

$$M(x, y) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} f(t) \sin(xt) \sin(yt) dt.$$

Ця рівність для $M(x, y)$ з урахуванням вигляду функцій $f(\xi)$ дає змогу довести збіжність подвійного ряду

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} (b_{m,k})^2 < \infty. \quad (22)$$

Поступаючи подібним чином із стовпцем вільних членів і використавши метод математичної індукції, можна довести, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} (c_{n,k})^2 < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

У роботі [5] показано, що виконання умов (22), (23) свідчить про квазірегулярність систем (21) і забезпечує збіжність числової процедури редукції (відсікання) цих систем. Крім того, розв'язок систем (21) задовольняє умову

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{a}_{n,k})^2 < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Числове розв'язування систем (21) формально завершує побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності. При цьому температурне поле у покритті та півпросторі розраховується за формулою

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau), \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

2. Визначення напружено-деформованого стану. Напружено-деформований стан у півпросторі з покриттям, викликаний температурним полем (24), визначимо в припущенні, що поверхня покриття $\gamma = 0$ вільна від навантажень, на нескінченності переміщення і напруження дорівнюють нулеві, а на поверхнях поділу матеріалу покриття та півпростору виконуються умови ідеального термомеханічного контакту.

Таким чином, задача полягає у відшуванні розв'язку двох рівнянь Пуассона відносно ключових функцій $\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \operatorname{div} \mathbf{U}^{(i)}$, $i = 1, 2$, – об'ємного розширення і $w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$, $i = 1, 2$, – нормальних компонент вектора пружного переміщення $\mathbf{U}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \Delta \theta^{(i)} &= \alpha_T^{(i)} (3 - 4x_i^{-2}) \Delta T^{(i)}, \\ \Delta w^{(i)} &= (1 - x_i^2) \partial_\gamma \theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3x_i^2 - 4) \partial_\gamma T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (25)$$

при крайових умовах

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, 0, \tau) = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, 0, \tau) = 0, \quad (26)$$

умовах на нескінченності

$$\lim_{\alpha, \gamma \rightarrow \infty} \theta^{(2)}(\alpha, \gamma, \tau) = 0, \quad \lim_{\alpha, \gamma \rightarrow \infty} w^{(2)}(\alpha, \gamma, \tau) = 0 \quad (27)$$

і умовах спряження

$$\begin{aligned} w^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) &= w^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), \quad u^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = u^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\rho, \gamma_1, \tau) &= \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}(\rho, \gamma_1, \tau), \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau). \end{aligned} \quad (28)$$

Тут $x_i^2 = (\lambda_i + 2\mu_i)/\mu_i$; $\alpha_T^{(i)}$, λ_i , μ_i – відповідно коефіцієнти лінійного температурного розширення і сталі Ляме матеріалів покриття і півпростору.

Після застосування до рівнянь (25) інтегрального перетворення Лагерра та інтегрального перетворення Фур'є одержимо їх розв'язок [13]

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) &= C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \alpha_T^{(i)}(3 - 4\alpha_i^{-2})\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma), \\ \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) &= F_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + H_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \\ &+ \frac{\gamma}{2}(1 - \alpha_i^2)[C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma)] + \\ &+ \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i}(3 - 4\alpha_i^{-2})d_\gamma \tilde{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma),\end{aligned}$$

де $\tilde{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi, \gamma)$, $n = 1, 2, \dots$; $\tilde{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma)$.

Враховуючи умови (27), знайдемо, що

$$D_n^{(2)} = H_n^{(2)} \equiv 0.$$

Решту невідомих визначимо із трансформованих крайових умов (26) та умов спряження (28). Це дає систему алгебричних рівнянь

$$[d_{k,\ell}]\{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, C_n^{(2)}, F_n^{(2)}\}^\top = \{f_{n,k}\}, \quad (29)$$

де ненульові коефіцієнти матриці $[d_{k,\ell}]$ та елементи стовпчика вільних членів мають вигляд, наведений у праці [13].

Визначивши $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $F_n^{(1)}$, $H_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $F_n^{(2)}$ із систем (29), остаточний розв'язок задачі (25)–(28) запишемо у вигляді

$$\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau),$$

$$w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau).$$

Компонента $u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$ вектора пружного переміщення визначаємо з рівності

$$u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} [\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma)] \sin(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau),$$

а ненульові компоненти тензора напружень – за співвідношеннями Дюамеля – Неймана.

3. Числовий аналіз і висновки. За формулою (24) проведено розрахунок температурного поля у півпросторі з покриттям у випадку, коли інтенсивність потоку тепла на поверхні покриття задається співвідношенням

$$q(\alpha, \tau) = q^*(1 - \alpha^2)(1 - \exp(-\tau_0\tau)),$$

де q^* – величина, яка має розмірність температури. Множник $1 - \exp(-\tau_0\tau)$ введено у вираз для інтенсивності потоку тепла для узгодження з нульовими початковими умовами, параметр τ_0 при цьому дає змогу прискорити чи сповільнити час виходу теплового навантаження на стаціонарне значення.

Числові розрахунки виконано для основи, виготовленої із титанового сплаву Ti-6Al-4V із теплофізичними властивостями [22]:

$$\begin{aligned}a_T^{(2)} &= 2.61 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}, & \lambda_T^{(2)} &= 6.2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \\ \alpha_T^{(2)} &= 8.86 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, & E_2 &= 105.6 \text{ ГПа}, & \nu_2 &= 0.29,\end{aligned}$$

і покриття, виготовленого із кераміки Si_3N_4 :

$$a_T^{(1)} = 4.92 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}, \quad \lambda_T^{(1)} = 1.21 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}),$$

$$\alpha_T^{(1)} = 5.8 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad E_1 = 348.4 \text{ ГПа}, \quad \nu_1 = 0.24.$$

На рис. 2, рис. 3 подано результати обчислення знерозміреної температури $T^*(\alpha, \gamma, \tau) = T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)/q^*$ на поверхні $\gamma_1 = h/d = 0.1$ поділу матеріалів покриття та півпростору при значеннях інтенсивності охолодження поверхні покриття $Bi = 0, 1, 3$ у моменти часу $\tau = 2$ і $\tau = 10$ відповідно. Суцільні криві на рисунках відповідають випадку врахування теплообміну при $Bi = 3$ на всій поверхні покриття (відсутність змішаних крайових умов). Як бачимо з наведеного, результати розрахунку, що відповідають випадку змішаного нагріву, в числовому еквіваленті знаходяться між результатами, що відповідають теплоізоляції зовні ділянки нагріву ($Bi = 0$) і випадку теплообміну в зоні ділянки нагріву. У початкові моменти часу результати є ближчими до випадку теплоізоляції, з плином часу розбіжність між ними зростає, і вони наближаються до результатів, що враховують теплообмін в зоні ділянки нагріву.

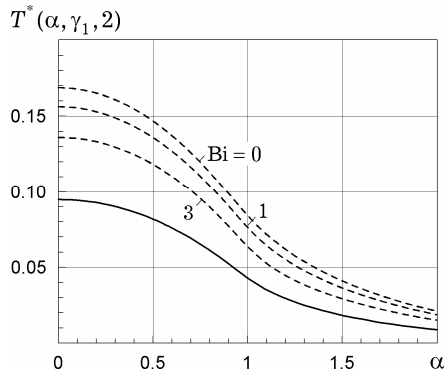


Рис. 2

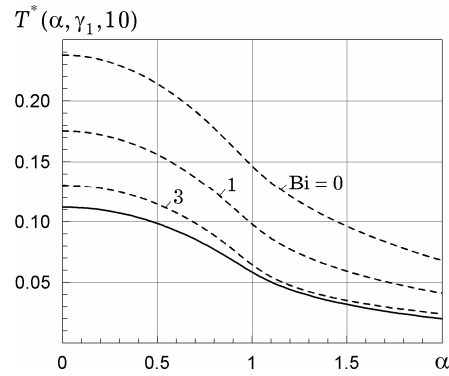


Рис. 3

За знайденим температурним полем розраховано напруження у півпросторі з покриттям. При цьому напруження були знерозмірені з використанням модуля зсуву півпростору: $\sigma_{kl}(\alpha, \gamma, \tau) = \sigma_{kl}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)/\mu_2$. На рис. 4 подано результати обчислення дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$ на поверхні поділу матеріалів покриття та основи в момент часу $\tau = 2$ при $Bi = 1$ та при значеннях відносної товщини покриття $\gamma_1 = 0.01, 0.1, 0.2, 0.5$. Як свідчить наведене, вказані напруження набувають максимального за модулем значення поблизу лінії поділу крайових умов і зі збільшенням відносної товщини покриття зростають.

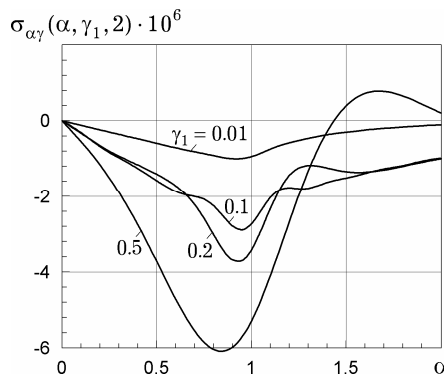


Рис. 4

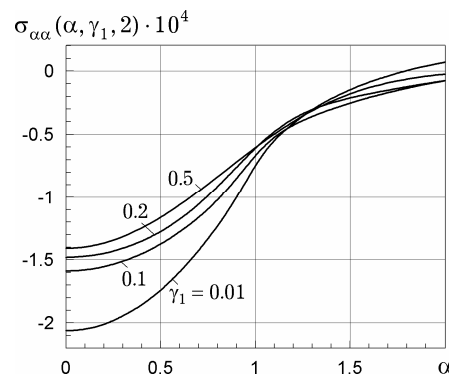


Рис. 5

На відміну від цих результатів, вплив зміни відносної товщини покриття на розподіл та абсолютне значення знерозмірених напружень $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma, \tau)$, результати обчислення яких на поверхні поділу матеріалів покриття і півпростору в момент часу $\tau = 2$ при $Bi = 1$ зображено на рис. 5, є значно меншим. Ці напруження практично скрізь є стискуючими і зі зменшенням відносної товщини покриття їх абсолютне значення зростає. Крім того, ці напруження за абсолютним значенням значно перевищують дотичні.

На рис. 6 подано результати розрахунку розподілу нормальних напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$ за змінною γ на поверхнях $\alpha = 0, 0.5, 1.0, 1.5$ при $\gamma_1 = 0.1$ в момент часу $\tau = 2$ для значень інтенсивності охолодження $Bi = 1.0, 2.0$ поза ділянкою нагріву.

Як випливає з наведеного, рівень нормальних напружень є співмірним із рівнем дотичних напружень і з віддаленням від центру ділянки нагріву знижується. В областях, розміщених під областю нагріву, ці напруження скрізь є стискуючими, зменшення інтенсивності охолодження призводить у цій зоні до збільшення їх абсолютного значення. В областях поза зоною нагріву ці напруження змінюють знак, причому максимального додатного значення набувають на поверхні поділу матеріалів покриття та основи під лінією $\alpha = 1$. Зменшення інтенсивності охолодження ділянки поза зоною нагріву призводить до зменшення рівня нормальних напружень в цій області.

Таким чином, у цій праці з використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є за просторовою змінною одержано розв'язок квазістатичної задачі термопружності для півпростору з покриттям зі змішаними умовами нагрівання.

Здійснено числовий аналіз задачі для різних значень відносної товщини покриття та інтенсивності охолодження. Встановлено, що збільшення відносної товщини покриття призводить до зростання рівня дотичних напружень на поверхні між покриттям і основою поблизу лінії поділу крайових умов. У цій же зоні нормальні напруження є розтягуючими і досягають свого максимального додатного значення. Це може спричинити відшарування покриття, що поряд із високим (домінуючими) рівнем стискуючих напружень у покритті може призвести до його руйнування внаслідок втрати стійкості. З огляду на це залишаються актуальними дослідження, пов'язані з оптимізацією відносної товщини покриття та інтенсивності його охолодження.

1. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1981. - № 1. - С. 3-7.
2. Галазюк В. А., Евтушенко А. А., Турчин И. Н. Нестационарный фрикционный разогрев выступов микронеровностей скользящего контакта // Инж.-физ. журн. - 1996. - **69**, № 5. - С. 768-772.
3. Галазюк В. А., Турчин И. Н. Квазистатическое термонапряженное состояние слоя при смешанных условиях нагрева // Прикл. механика. - 1998. - **34**, № 9. - С. 76-82.

Te same: Galazyuk V. A., Evtushenko A. A., Turchin I. N. Unsteady frictional heating of projections of microirregularities of a sliding contact // J. Eng. Phys. Thermophys. - 1996. - **69**, No. 5. - P. 585-589.

Te same: Galazyuk V. A., Turchin I. N. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions // Int. Appl. Mech. - 1998. - **34**, No. 9. - P. 886-893.

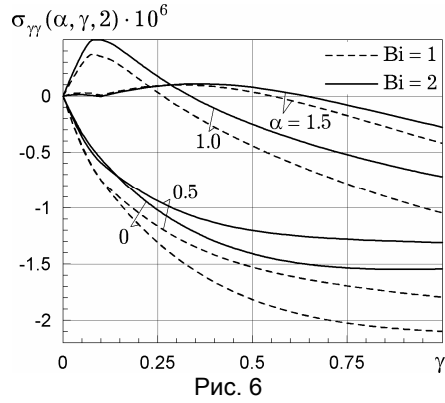


Рис. 6

4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Часть первая. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1949. – 798 с.
Te same: *Watson G. N.* A treatise of the theory of Bessel functions. – New York: The Macmillan Company, 1945. – 804 p.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – Москва–Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.
Te same: *Kantorovich L. V., Krylov V. I.* Approximate methods of higher analysis. – New York: Intersci., 1958. – xv + 681 p.
6. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – Москва: Высш. шк., 2001. – 550 с.
7. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
8. *Мандрик П. А.* Решение уравнения теплопроводности гиперболического типа со смешанными граничными условиями на поверхности изотропного полупространства // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 7. – С. 989–992.
Te same: *Mandrik P. A.* Solution of a heat equation of hyperbolic type with mixed boundary conditions on the surface of an isotropic half-space // Different. Equat. – 2002. – **38**, No. 7. – P. 1054–1057.
9. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
10. *Процюк Б. В.* Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 103–112.
11. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
Te same: *Sneddon I.* Fourier transforms. – New York: McGraw-Hill, 1951. – 542 p.
12. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.* – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
Te same: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Eds M. Abramowitz, I. A. Stegun.* – New York: Dover Publ., 1972. – 1046 p.
13. *Суллим Г. Т., Турчин И. М.* Осесиметричний квазістатичний термонапружений стан у півпросторі з покриттям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 4. – С. 85–95.
Te same: *Sulym H. T., Turchyn I. M.* Axisymmetric quasistatic thermal stressed state in a half space with coating // J. Math. Sci. – 2014. – **198**, No. 1. – P. 103–117.
14. *Турчин И. Н.* Нестационарный торцевой разогрев многослойной полубесконечной плиты // Инж.-физ. журн. – 2012. – **85**, № 6. – P. 1343–1351.
Te same: *Turchyn I. N.* Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2012. – **85**, No. 6. – P. 1453–1462.
15. *Belghazi H., El Ganaoui M., Labbe J. C.* Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source // Int. J. Therm. Sci. – 2010. – **49**, No. 2. – P. 311–318.
16. *Kushnir R. M.* Thermal stresses – Advanced theory and applications // J. Therm. Stresses. – 2010. – **33**, No. 1. – P. 76–78.
17. *Kushnir R., Protsiuk B.* Determination of the thermal fields and stresses in multilayer solids by means of the constructed Green functions // In: *R. B. Hetnarski* (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931.
18. *Sneddon I.* Mixed boundary-value problems in potential theory. – Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1966. – viii+282 p.
19. *Tamarin Y.* Protective coatings for turbine blades. – ASM International, USA, 2002. – vi+248 p.
20. *Tanigawa Y.* Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials // Appl. Mech. Rev. – 1995. – **48**, No. 6. – P. 287–300.
21. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.
22. *Taya M., Arsenault R. J.* Metal matrix composites – Thermomechanical behavior. – Oxford: Pergamon Press, 1989. – ix+264 p.
23. *Wang B. L., Han J. C., Du S. Y.* Thermoelastic fracture mechanics for nonhomogeneous material subjected to unsteady thermal load // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2000. – **67**, No. 1. – P. 87–95.

ПЛОСКАЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОКРЫТИЕМ ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ НАГРЕВА

С использованием интегральных преобразований Лагерра и Фурье построено решение плоской квазистатической задачи термоупругости для полупространства с покрытием. Поверхность покрытия нагревается потоком тепла, симметрично распределенным в полосе определенной ширины, и охлаждается по закону Ньютона вне этой полосы. Представлены результаты численного анализа термонапряженного состояния в полупространстве и покрытии в зависимости от интенсивности охлаждения и относительной толщины покрытия.

PLANE QUASISTATIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR HALF-SPACE WITH COATING UNDER MIXED CONDITIONS OF HEATING

Using the Laguerre and Fourier integral transforms the solution of plane quasi-static thermoelasticity problem for a half-space with coating is constructed. Coating surface is heated by heat flux symmetrically distributed in a band of a certain width, and is cooled by Newton's law outside of this band. The results of numerical analysis of thermal stress state in half-space and coating, depending on the intensity of cooling, and the relative thickness of the coating are presented.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
05.02.15