

**ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ РАДІАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ У РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНІЙ ТЕРМОЧУТЛИВІЙ ПОРОЖНИСТІЙ КУЛІ**

*Визначено термонапружений стан радіально-неоднорідної термочутливої порожнистої кулі при заданих сталих навантаженнях на поверхнях і відомому в ній температурному полі. Відповідну задачу термопружності у напруженнях зведено до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіальної компоненти тензора напружень. Досліджено вплив температурних залежностей характеристик радіально-неоднорідного матеріалу на напруження та переміщення.*

Значна кількість елементів устаткування і деталей механічних конструкцій виготовляється і експлуатується в умовах високих температур, які змінюють фізико-механічні властивості матеріалів. Це вимагає як створення високоякісних матеріалів з підвищеними міцнісними властивостями і значною термостійкістю, так і розвитку математичних моделей розрахунку термонапруженого стану в таких матеріалах.

В останні роки все більшого поширення набуває використання функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ). ФГМ – це неоднорідні матеріали, що характеризуються неперервною зміною своїх властивостей від просторових координат за рахунок зміни об'ємної частки складових речовин відповідно до певного закону. ФГМ, як правило, створюються для роботи в умовах підвищених температур і температурних змін з метою продовження часу експлуатації конструкцій за рахунок оптимізації термонапруженого стану.

У роботах [3, 5–8] проаналізовано проблеми експлуатації матеріалів за наявності і відсутності в них тріщин у випадку термічних і механічних навантажень. Зокрема, у [3, 5, 7, 9] і [11] досліджено термонапружений стан порожнистих циліндра та кулі, виготовлених з ФГМ. Відомо, що невеликі зміни температури можуть викликати значні зміни напруженого стану. Тому актуальною є проблема врахування впливу термочутливості ФГМ на термонапружений стан тіла.

У цій роботі досліджено вплив температурної залежності фізико-механічних характеристик матеріалів на термонапружений стан радіально-неоднорідної порожнистої кулі, яка перебуває під дією сталих силових навантажень на межових поверхнях при відомому у ній розподілі температури.

Задачі такого типу, як правило, зводяться до крайових задач зі змінними коефіцієнтами, розв'язування яких є досить складним, а тому вимагає розробки та застосування ефективних методів. З цією метою відповідну крайову квазістатичну задачу термопружності у напруженнях на основі безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги та сумісності зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіального напруження, у якому враховано і крайові умови. Колові напруження, деформації і переміщення визначаються зі зв'язків між деформаціями та напруженнями (закон Гука) та рівнянь Коші.

**Формулювання задачі.** Розглянемо радіально-неоднорідну порожнисту кулю з радіусами зовнішньої  $R_2$  та внутрішньої  $R_1$  поверхонь. Вважаємо, що модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та коефіцієнт лінійного теплового розширення є неперервними функціями від радіальної координати  $r$  та температури. На внутрішній і зовнішній поверхнях кулі задано сталі навантаження  $p_1$ ,  $p_2$  відповідно, відомим також є стаціонарне температурне поле  $\bar{T}(r)$  в кулі.

Для визначення радіальних  $\sigma_{rr}$  і колових  $\sigma_{\varphi\varphi}$  складових тензора напружень та відповідно деформацій  $e_{rr}$ ,  $e_{\varphi\varphi}$  і вектора переміщень  $u_r$  використаємо [4]:

– рівняння рівноваги

$$\rho \frac{d\sigma_{rr}(\rho)}{d\rho} + 2(\sigma_{rr}(\rho) - \sigma_{\varphi\varphi}(\rho)) + \rho F_r(\rho) = 0; \quad (1)$$

– рівняння суцільності

$$\rho \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}(\rho)}{d\rho} = \sigma_{rr}(\rho) - \sigma_{\varphi\varphi}(\rho); \quad (2)$$

– зв'язки між деформаціями та напруженнями

$$e_{rr}(\rho) = \frac{1}{E(\rho, T(\rho))} [(1 + \nu(\rho, T(\rho)))\sigma_{rr}(\rho) - 2\nu(\rho, T(\rho))\sigma(\rho)] + \Phi(T(\rho)),$$

$$e_{\varphi\varphi}(\rho) = \frac{1}{E(\rho, T(\rho))} \left[ (1 - \nu(\rho, T(\rho)))\sigma(\rho) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(1 + \nu(\rho, T(\rho)))\sigma_{rr}(\rho) \right] + \Phi(T(\rho)); \quad (3)$$

– умови на межах

$$\sigma_{rr}(\rho_1) = -p_1, \quad \sigma_{rr}(1) = -p_2. \quad (4)$$

У випадку радіально-неоднорідної кулі зв'язок між переміщеннями та деформаціями [4] у сферичній системі координат має вигляд

$$e_{rr}(\rho) = \frac{du_r(\rho)}{d\rho}, \quad e_{\varphi\varphi}(\rho) = \frac{u_r(\rho)}{\rho}. \quad (5)$$

У виразах (1)–(5)  $\rho = \frac{r}{R_2}$  – безрозмірна координата,  $\frac{R_1}{R_2} = \rho_1$ ,  $E(\rho, T(\rho))$  – модуль пружності,  $\nu(\rho, T(\rho))$  – коефіцієнт Пуассона,  $F_r(\rho)$  – густина масових сил,  $\Phi(T(\rho)) = \int_{T_0}^{T(\rho)} \alpha(\rho, \tau) d\tau$ ,  $T(\rho) = \bar{T}(\rho R_2)$  – відомий розподіл температури як розв'язок рівняння теплопровідності або з експерименту,  $T_0 = \text{const}$  – відлікова температура, при якій за відсутності деформацій напруження дорівнюють нулеві,  $\alpha(\rho, T(\rho))$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення,  $\sigma(\rho) = \frac{1}{2}\sigma_{rr}(\rho) + \sigma_{\varphi\varphi}(\rho)$  – сумарне напруження,  $u_r(\rho) = \frac{\bar{u}_r(\rho R_2)}{R_2}$  – безрозмірне переміщення,  $\bar{u}_r(r) = \bar{u}_r(\rho R_2)$  – переміщення.

**Зведення задачі термопружності до розв'язування інтегрального рівняння.** Рівняння рівноваги (1) перепишемо у вигляді [4]

$$\frac{d}{d\rho} (\rho^3 \sigma_{rr}(\rho)) = \rho^2 (2\sigma(\rho) - \rho F_r(\rho)). \quad (6)$$

Рівняння суцільності (2) з урахуванням (1) і (3) у напруженнях [2, 4] подамо як

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 - \nu(\rho, T)}{E(\rho, T)} \sigma + \Phi(T(\rho)) \right) = \frac{\sigma_{rr}}{2} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 + \nu(\rho, T)}{E(\rho, T)} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{1 + \nu(\rho, T)}{E(\rho, T)} F_r(\rho). \quad (7)$$

Після безпосереднього інтегрування рівняння (6) отримаємо зв'язок між радіальними та сумарними напруженнями:

$$\rho^3 \sigma_{rr}(\rho) - \rho_1^3 \sigma_{rr}(\rho_1) = \int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 (2\sigma(\eta) - \eta F_r(\eta)) d\eta. \quad (8)$$

Якщо підставити  $\rho = 1$  у вираз (8), то отримаємо інтегральну умову, яку повинні задовольняти сумарні напруження:

$$\int_{\rho_1}^1 \eta^2 (2\sigma(\eta) - \eta F_r(\eta)) d\eta = \rho_1^3 p_1 - p_2. \quad (9)$$

В результаті інтегрування рівняння суцільності (7) отримаємо залежність між сумарними і радіальними напруженнями:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) - \frac{1}{2} \frac{E(\rho, T(\rho))}{1 - \nu(\rho, T(\rho))} \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_{rr}(\eta) \varphi'(\eta, T(\eta)) d\eta = \frac{E(\rho, T(\rho))}{1 - \nu(\rho, T(\rho))} \times \\ \times \left[ B - \frac{1}{2} \int_{\rho_1}^{\rho} F_r(\eta) \varphi(\eta, T(\eta)) d\eta - \Phi(T(\rho)) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\varphi(\rho) = \frac{1 + \nu(\rho, T)}{E(\rho, T)}$ ,  $\varphi'(\rho) = \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 + \nu(\rho, T)}{E(\rho, T)} \right)$ ,  $B$  – константа, яку визначаємо з інтегральної умови (9).

З виразу (10) і рівняння рівноваги (6) маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^3 \sigma_{rr}(\rho)) + \frac{\rho F_r(\rho)}{2} = \frac{1}{2} \frac{E(\rho, T)}{1 - \nu(\rho, T)} \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_{rr}(\eta) \varphi'(\eta) d\eta + \\ + \frac{E(\rho, T)}{1 - \nu(\rho, T)} B - F(\rho) - \frac{E(\rho, T)}{1 - \nu(\rho, T)} \Phi(T(\rho)). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{Тут } F(\rho) = \frac{1}{2} \frac{E(\rho, T)}{1 - \nu(\rho, T)} \int_{\rho_1}^{\rho} F_r(\eta) \varphi(\eta, T) d\eta.$$

Внаслідок інтегрування рівняння (11) у межах від  $\rho_1$  до  $\rho$  і перетворення повторних інтегралів з використанням формули інтегрування частинами отримаємо інтегральне рівняння відносно радіального напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(\rho) - \frac{1}{\rho^3} \int_{\rho_1}^{\rho} [V(\rho) - V(\eta)] \varphi'(\eta, T(\eta)) \sigma_{rr}(\eta) d\eta = \\ = 2B \frac{V(\rho)}{\rho^3} + H(\rho) + Q(\rho) - \frac{\rho_1^3}{\rho^3} p_1, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} V(\rho) &= \int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 \frac{E(\eta, T(\eta))}{1 - \nu(\eta, T(\eta))} d\eta, \\ H(\rho) &= -\frac{1}{\rho^3} \int_{\rho_1}^{\rho} (2\eta^2 F(\eta) + \eta^3 f(\eta)) d\eta, \\ Q(\rho) &= -\frac{1}{\rho^3} \int_{\rho_1}^{\rho} 2\eta^2 \frac{E(\eta, T(\eta))}{1 - \nu(\eta, T(\eta))} \Phi(T(\eta)) d\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставляючи у вираз (12) значення  $\rho = 1$  та беручи до уваги граничні умови (4), визначаємо сталу  $2B$ :

$$2B = -\frac{1}{2} \int_{\rho_1}^1 \left[ 1 - \frac{V(\eta)}{V(1)} \right] \varphi'(\eta, T(\eta)) \sigma_{rr}(\eta) d\eta - \frac{H(1)}{V(1)} - \frac{Q(1)}{V(1)} + \frac{\rho_1^3 p_1}{V(1)} - \frac{p_2}{V(1)}. \quad (14)$$

Отже, інтегральне рівняння для визначення радіального напруження має вигляд:

$$\sigma_{rr}(\rho) + \int_{\rho_1}^1 \mathcal{K}(\rho, \eta) \sigma_{rr}(\eta) d\eta = \Psi(\rho), \quad (15)$$

де

$$\Psi(\rho) = H(\rho) - \frac{H(1)}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(1)} + Q(\rho) - \frac{Q(1)}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(1)} + \frac{\rho_1^3 p_1}{\rho^3} \left[ \frac{V(\rho)}{V(1)} - 1 \right] - \frac{p_2}{\rho^3} \frac{V(\rho)}{V(1)}, \quad (16)$$

$$\mathcal{K}(\rho, \eta) = \begin{cases} V(\eta) \left[ 1 - \frac{V(\rho)}{V(1)} \right] \frac{\varphi'(\eta, T(\eta))}{2\rho^3}, & \eta < \rho, \\ V(\rho) \left[ 1 - \frac{V(\eta)}{V(1)} \right] \frac{\varphi'(\eta, T(\eta))}{2\rho^3}, & \eta \geq \rho. \end{cases} \quad (17)$$

Інтегральне рівняння (15) є рівнянням Фредгольма другого роду і дозволяє визначити радіальні напруження з урахуванням умов на межах і заданого температурного поля, яке можна визначити експериментально або з розв'язку відповідної крайової задачі теплопровідності. Ядро (17) інтегрального рівняння є неперервним і залежить лише від фізичних характеристик матеріалу. Права частина (16) рівняння (15) подана у вигляді доданків  $H(\rho)$ ,  $Q(\rho)$ , які враховують вплив масових сил, температурного поля і силових навантажень.

Сумарні напруження можна визначити з рівняння (10), колові напруження – за формулою  $\sigma_{\phi\phi}(\rho) = \sigma(\rho) - \frac{1}{2} \sigma_{rr}(\rho)$ , деформації – за формулами (3), радіальне переміщення – з використанням формул (5).

**Розв'язування інтегрального рівняння [1].** Для визначення розв'язку інтегрального рівняння (16) поділимо кулю на  $N$  тонких концентричних шарів. Вважатимемо, що товщина  $k$ -го шару є такою, що для підінтегральної функції  $Y(x)$  виконується формула трапецій:

$$\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} Y(\eta) d\eta = \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{2} (Y(\rho_k) + Y(\rho_{k+1})) + o((\rho_{k+1} - \rho_k)^2). \quad (18)$$

Отже, якщо у рівнянні (16) інтеграл замінити сумою інтегралів на кожному з інтервалів розбиття і до кожного з них, у свою чергу, застосувати формулу (18), то отримаємо вираз

$$\sigma_{rr}(\rho) + \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{2} (\mathcal{K}(\rho, \rho_k) \sigma_{rr}(\rho_k) + \mathcal{K}(\rho, \rho_{k+1}) \sigma_{rr}(\rho_{k+1})) \right] = \Psi(\rho).$$

З цієї рівності, записаної для всіх значень  $\rho = \rho_i$ ,  $i = 1, \dots, N + 1$ , у випадку рівномірної сітки  $\omega_h = \left\{ \rho_i = (i - 1)h, i = 1, \dots, N + 1, h = \frac{1 - \rho_1}{N} \right\}$ , отримуємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь відносно  $N + 1$  невідомих  $\sigma_{rr}(\rho_i)$ ,  $i = 1, \dots, N + 1$ :

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{h}{2} \mathcal{K}_{11}\right) \sigma_{rr}(\rho_1) + h\mathcal{K}_{12} \sigma_{rr}(\rho_2) + \dots + \frac{h}{2} \mathcal{K}_{1,N+1} \sigma_{rr}(\rho_{N+1}) = \Psi(\rho_1), \\
& \frac{h}{2} \mathcal{K}_{21} \sigma_{rr}(\rho_1) + (1 + h\mathcal{K}_{22}) \sigma_{rr}(\rho_2) + \dots + \frac{h}{2} \mathcal{K}_{2,N+1} \sigma_{rr}(\rho_{N+1}) = \Psi(\rho_2), \\
& \dots\dots\dots, \\
& \frac{h}{2} \mathcal{K}_{N+1,1} \sigma_{rr}(\rho_1) + h\mathcal{K}_{12} \sigma_{rr}(\rho_2) + \dots + \left(1 + \frac{h}{2} \mathcal{K}_{N+1,N+1}\right) \sigma_{rr}(\rho_{N+1}) = \Psi(\rho_{N+1}).
\end{aligned} \tag{19}$$

Тут  $\mathcal{K}_{ij} = \mathcal{K}(\rho_i, \rho_j)$ .

У випадку тонкої порожнистої кулі (сферична оболонка) замість системи рівнянь (19) отримуємо одне рівняння, з якого радіальне напруження визначається наближеною формулою

$$\sigma_{rr}(\rho) = \frac{1}{1 + \frac{1-\rho_1}{2} \mathcal{K}(\rho, \rho)} \Psi(\rho) + \left[ \frac{\rho - \rho_1}{2} \mathcal{K}(\rho, \rho_1) p_1 + \frac{1 - \rho}{2} \mathcal{K}(\rho, 1) p_2 \right]. \tag{20}$$

**Приклад 1.** Для оцінки ефективності запропонованого методу обчислимо радіальні напруження у випадку відсутності температурного поля, коли коефіцієнт Пуассона є сталим  $\nu(\rho) = \nu_0 = \text{const}$ , а модуль пружності має степеневу залежність від радіальної координати:  $E(\rho) = E_0 \rho^{s_0}$ ,  $E_0 = \text{const}$ ,  $s_0 = \text{const}$ . Вважатимемо, що коефіцієнт лінійного теплового розширення  $\alpha(\rho) = 0$  і масові сили відсутні:  $F_r(\rho) = 0$ . Така задача має точний аналітичний розв'язок. Рівняння рівноваги (6) і суцільності (7) у цьому випадку мають вигляд

$$\frac{d}{d\rho} (\rho^3 \sigma_{rr}(\rho)) = 2\rho^2 \sigma(\rho), \tag{21}$$

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 - \nu_0}{E_0 \rho^{s_0}} \sigma \right) = \frac{\sigma_{rr}(\rho)}{2} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 + \nu_0}{E_0 \rho^{s_0}} \right). \tag{22}$$

Остаточний вираз як для  $\sigma_{rr}$ , так і для  $\sigma$ , не залежить від  $E_0$ , що випливає з рівнянь (21), (22). Якщо підставити  $\sigma(\rho)$ , визначене з рівняння рівноваги (21), у рівняння суцільності (22) і вибрати розв'язок для  $\sigma_{rr}(\rho)$  у вигляді  $\rho^\lambda$ , то отримаємо точний вираз [4] для  $\sigma_{rr}(\rho)$  (точний розв'язок задачі позначатимемо індексом «ex»):

$$\sigma_{rr}^{\text{ex}}(\rho) = C_1 \rho^{\lambda_1} + C_2 \rho^{\lambda_2}, \tag{23}$$

де

$$\lambda_1 = \frac{-3 + s_0 + \sqrt{(3 - s_0)^2 + 4s_0 \left(3 - \frac{1 + \nu_0}{1 - \nu_0}\right)}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-3 + s_0 - \sqrt{(3 - s_0)^2 + 4s_0 \left(3 - \frac{1 + \nu_0}{1 - \nu_0}\right)}}{2}.$$

Сталі  $C_1, C_2$ , визначені з умов (4) на поверхнях, мають вигляд

$$C_1 = -2p_2 + \frac{p_1}{\rho_1^{\lambda_2} - \rho_1^{\lambda_1}}, \quad C_2 = \frac{-p_1 + p_2\rho_1^{\lambda_1}}{\rho_1^{\lambda_2} - \rho_1^{\lambda_1}}.$$

У табл. 1 подано результати обчислень радіальних напружень, отриманих на основі розв'язування системи алгебричних рівнянь (19), а також отриманих за формулою (23).

Таблиця 1

$\rho$	$N = 10, E_0 = 110, \nu_0 = 0.25, s_0 = 4, p_1 = 10, p_2 = 0$		
	$\sigma_{rr}(\rho)$	$\sigma_{rr}^{ex}(\rho)$	$\left  \frac{\sigma_{rr}(\rho) - \sigma_{rr}^{ex}(\rho)}{\sigma_{rr}^{ex}(\rho)} \right , \%$
0.3	-10	-10	0
0.37	-6.696022	-6.727018	0.46077
0.44	-4.779699	-4.814445	0.7216994
0.51	-3.558076	-3.578973	0.5838705
0.58	-2.692136	-2.714447	0.821955
0.65	-2.047075	-2.066106	0.9211044
0.72	-1.5328	-1.548274	0.9994086
0.79	-1.098174	-1.109979	1.063501
0.86	-0.7109899	-0.7190241	1.117364
0.93	-0.3498798	-0.3539986	1.163503
1	0	0	0

У табл. 2 наведено результати обчислень радіальних напружень у випадку тонкого шару на основі формули (20), а також отриманих за формулою (23).

Таблиця 2

$\rho$	$N = 1, E_0 = 110, \nu_0 = 0.25, s_0 = 4, p_1 = 10, p_2 = 0$		
	$\sigma_{rr}(\rho)$	$\sigma_{rr}^{ex}(\rho)$	$\left  \frac{\sigma_{rr}(\rho) - \sigma_{rr}^{ex}(\rho)}{\sigma_{rr}^{ex}(\rho)} \right , \%$
0.9	-10	-10	0
0.925	-7.47212	-7.4667	0.07258875
0.95	-4.953366	-4.962597	0.1860068
0.975	-2.455408	-2.476916	0.8683385
1	0	0	0

**Приклад 2.** Розглянемо порожнисту кулю, виготовлену з двокомпонентного металокерамічного ФГМ з радіусом внутрішньої поверхні  $\rho_1 = 0.5$  та зовнішньої поверхні  $\rho_2 = 1$ .

Температурну залежність фізичних характеристик двокомпонентного матеріалу опишемо з використанням моделі [10]:

$$P(\rho, T) = P_1(T)S_1(\rho) + P_2(T)S_2(\rho), \quad (24)$$

де  $P(\rho, T)$  – характеристика матеріалу, де  $S_1(\rho)$ ,  $S_2(\rho)$  – об'ємні концентрації складових матеріалу, причому  $S_2(\rho) = 1 - S_1(\rho)$ . Вважаємо, що характеристика  $P^{(i)}(T)$  матеріалу  $i$ ,  $i = 1, 2$ , має степеневу залежність від температури:

$$P^{(i)}(T) = P_0^{(i)} \left( \frac{P_1^{(i)}}{T} + 1 + P_1^{(i)}T + P_2^{(i)}T^2 + P_3^{(i)}T^3 \right), \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

або [7]

$$E(\rho, T) = \frac{E^{(2)}(T)[E^{(2)}(T) + (E^{(1)}(T) - E^{(2)}(T))S_1^{2/3}(\rho)]}{E^{(2)}(T) + (E^{(1)}(T) - E^{(2)}(T))[S_1^{2/3}(\rho) - S_1(\rho)]},$$

$$\alpha(\rho, T) = \frac{\alpha^{(1)}(T)K_1(T)S_1(\rho) + \alpha^{(2)}(T)K_2(T)[1 - S_1(\rho)]}{K_1(T)S_1(\rho) + K_2(T)[1 - S_1(\rho)]},$$

$$v(\rho, T) = v^{(1)}(T)S_1(\rho) + v^{(2)}(T)[1 - S_1(\rho)], \quad K_j(T) = \frac{E^{(j)}(T)}{2(1 - v^{(j)}(T))}, \quad j=1, 2. \quad (26)$$

Фізико-механічні характеристики матеріалів подано у табл. 3.

Таблиця 3

Матеріал	Характеристика	Коефіцієнти многочлена (25)				
		$P_{-1}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
1. Оксид алюмінію	$E$ , Па	0	$3.4955 \cdot 10^{11}$	$-3.853 \cdot 10^{-4}$	$4.027 \cdot 10^{-7}$	$-1.673 \cdot 10^{-10}$
	$\nu$	0	0.26	0	0	0
	$\alpha$ , $K^{-1}$	0	$6.8269 \cdot 10^{-6}$	$1.838 \cdot 10^{-4}$	0	0
2. Нержавіюча сталь	$E$ , Па	0	$2.0104 \cdot 10^{11}$	$3.079 \cdot 10^{-4}$	$-6.534 \cdot 10^{-7}$	0
	$\nu$	0	0.3262	$-2.002 \cdot 10^{-4}$	$3.797 \cdot 10^{-7}$	0
	$\alpha$ , $K^{-1}$	0	$1.233 \cdot 10^{-5}$	$8.086 \cdot 10^{-4}$	0	0

Вважаємо, що у кулі закон зміни концентрації складової 1 (оксиду алюмінію) уздовж радіуса має вигляд  $S_1(\rho) = \left(\frac{\rho - \rho_1}{1 - \rho_1}\right)^{s_0}$ ,  $s_0 = 2$ , відоме температурне поле  $T(\rho) = \frac{T_2 - T_1\rho_1}{1 - \rho_1} - \frac{(T_2 - T_1)\rho_1}{(1 - \rho_1)\rho}$  (розв'язок стаціонарного однорідного рівняння теплопровідності з температурами на внутрішній і зовнішній поверхнях  $T_1 = 600$  К,  $T_2 = 300$  К відповідно для тіла зі сталим коефіцієнтом теплопровідності або неоднорідного рівняння теплопровідності із залежним від температури і радіальною змінною коефіцієнтом теплопровідності),  $T_0 = 300$  К, а на зовнішній і внутрішній поверхнях кулі діють навантаження  $p_1 = 10^8$  Па,  $p_2 = 0$  відповідно.

На рис. 1, рис. 2 подано графіки радіального, колового та сумарного напружень, а на рис. 3 – переміщень для випадків нехтування та врахування температурної залежності фізико-механічних характеристик матеріалу. На рис. 1 зображено розподіл напружень у випадку залежних (криві 1) та незалежних від температури (криві 2) характеристик матеріалу для їх радіальної залежності (24). На рис. 2 наведено розподіли напружень у порожній кулі для моделі температурної залежності характеристик матеріалу (24) (криві 1) та (26) (криві 2).

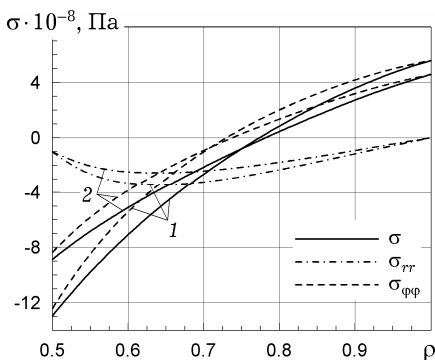


Рис. 1

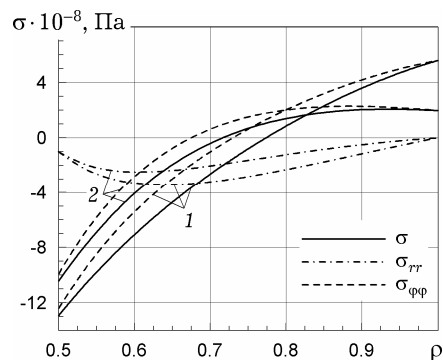


Рис. 2

На рис. 3 наведено розподіли переміщень, визначених у випадку незалежних (штрихова лінія) та залежних (суцільна лінія) від температури характеристик відповідно до моделі температурної залежності (24) (криві 1) або (26) (криві 2).

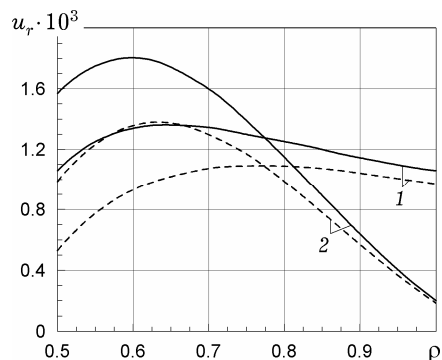


Рис. 3

**Висновки.** Шляхом безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги і суцільності задача незв'язаної термопружності у напруженнях для термочутливої радіально-неоднорідної порожнистої кулі зведена до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіального напруження.

Запропоноване інтегральне рівняння можна застосувати для дослідження термонапруженого стану ФГМ, як це впливає з викладок, і при рівномірно розподілених залежних від часу навантаженнях і наявності нестационарного температурного поля, отриманого як розв'язок задачі нестационарної теплопровідності з відповідними умовами на поверхнях кулі.

Запропоновано числовий алгоритм розв'язування отриманого інтегрального рівняння на основі квадратурних формул і зведення до системи алгебричних рівнянь.

Точність запропонованого алгоритму перевірено для випадку відсутності масових сил, температурного поля, сталому коефіцієнті Пуассона, степеневій залежності модуля пружності  $E = E_0 \rho^s$ . Тоді існує точний аналітичний розв'язок задачі. Відносна похибка числових результатів для напружень, обчислених на основі запропонованого алгоритму, відносно отриманих з точних аналітичних виразів є меншою від 0.2% для значення показника степеня  $s = 4$ . Це свідчить про високу точність запропонованого підходу. Умови на поверхнях задовольняються точно.

Отримано наближений аналітичний розв'язок виведеного інтегрального рівняння у випадку тонкого сферичного шару для радіальних напружень.

Результати обчислень вказують на необхідність врахування температурної залежності характеристик ФГМ при визначенні напружень, деформацій і переміщень, оскільки її вклад є істотним (приблизно 40% для напружень і приблизно 100% — для переміщень).

Як відомо [10, 11], побудова моделі температурної залежності характеристик ФГМ є проблемою. З цієї точки зору врахування температурної залежності характеристик ФГМ може бути підставою для вибору адекватнішої моделі характеристик від концентрації матеріалів. Як видно з графіків, вклад температурної залежності характеристик ФГМ у різних моделях опису термочутливості є значним і становить у наведених прикладах декілька сотень відсотків для переміщень.

Отримані результати дозволяють при визначенні термонапруженого стану в кулі враховувати точно в межах похибки обчислень температурну залежність характеристик ФГМ при наявності відповідних експериментальних даних про них при різних концентраціях складових.



Результати праці застосовні також і до композитних матеріалів у випадках можливості використання їх усереднених фізико-механічних характеристик (вважається, що навантаження не порушують структуру композитних матеріалів).

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Вігак В. М. Розв'язок задач пружності та термопружності у напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Т. 9. – С. 34–131.
3. Каміняк Б. М. Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 2. – С. 79–86.
4. Каміняк Б. М., Яцків І. І. Визначення напружень і переміщень у неоднорідній порожнистій кулі зведенням відповідної задачі термопружності до інтегральних рівнянь // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 142–150.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
6. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal stresses – Advanced theory and applications. – Ser. Solid Mechanics and Applications. – Vol. 158 / Ser. Ed. G. M. L. Gladwell. – New York: Springer, 2008. – 559 p.
7. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. – 1994. – 17, No. 3. – P. 471–487.
8. Sadd M. H. Elasticity: Theory, applications, and numerics. – Burlington: Elsevier, 2009. – xii+461 p.
9. Saidi A. R., Atashipour S. R., Jomehzadeh E. Exact elasticity solutions for thick-walled functionally graded spherical pressure vessels with linearly and exponentially varying properties // Int. J. Eng. Trans. A. – 2009. – 22, No. 4. – P. 405–416.
10. Shen H.-S. Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 280 p.
11. Shiota I., Miyamoto Y. Functionally graded materials. – Tokio: Elsevier, 1997. – 803 p.

#### **ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ПОЛОМ ШАРЕ**

*Определено термонапряженное состояние термочувствительного радиально-неоднородного полого шара при заданных постоянных нагрузках на поверхностях и известном температурном поле в нем. Соответствующая задача термоупругости в напряжениях сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно радиального напряжения. Исследовано влияние температурных зависимостей характеристик радиально-неоднородного материала на напряжения и перемещения.*

#### **INTEGRAL EQUATION FOR DETERMINING THE RADIAL STRESSES IN A RADIALY INHOMOGENEOUS THERMAL SENSITIVE HOLLOW SPHERE**

*The thermal stressed state of thermal sensitive radially inhomogeneous hollow sphere under given constant loads on its surfaces and known temperature field in it is determined. The corresponding thermoelasticity problem in terms of stresses is reduced to solving the Fredholm integral equation of second kind with respect to the radial stress. The influence of temperature dependencies of characteristics of the radially inhomogeneous material on stresses and displacements is investigated.*

<sup>1</sup> Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів