

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ЗА ТЕПЛОВІДВЕДЕННЯ КИПІННЯМ РІДИНИ

На прикладі скінченного трискладового за осью координат циліндра проілюстровано формулювання математичної моделі та методики визначення і дослідження ustalених температури і напружень за наявності тепловідведення через одну з плоских обмежувальних поверхонь шляхом кипіння рідини. При цьому використано модель термочутливого тіла і прийнято, що в другому шарі циліндра містяться розподілені за параболічним законом джерела тепла, на одну із плоских обмежувальних поверхонь спрямовано потік тепла, а через іншу відбувається тепловідведення кипінням рідини. Знайдено напруження і досліджено вплив залежності термомеханічних характеристик матеріалів складових циліндра від температури та інтенсивності кипіння на характер і рівень розподілу температури та напружень.

У наш час важко назвати галузь, у якій розв'язки задач теплопровідності не відігравали би важливої ролі. Зокрема, в елементах мікроелектронних пристроїв, де протікає електричний струм, завжди відбувається неоднорідне виділення тепла, що спричиняє значний рівень температури великої градієнтності [6]. Надійність їх роботи неможливо гарантувати без дотримання належного теплового стану. При визначенні полів температури та напружень доцільно виходити з моделі термочутливого тіла, яка включає залежність теплових і механічних характеристик матеріалів складових циліндра від температури.

Для більш ефективного відведення тепла з поверхонь термочутливих тіл часто використовують явище конвективного теплообміну (коли критична температура є меншою від температури кипіння рідини, що подається на обмежувальну поверхню тіла) або явище кипіння рідини (коли температура кипіння рідини є нижчою від температури тіла). Зауважимо, що утворений шар рідини повинен мати набагато меншу товщину, ніж товщина тіла.

Детальний огляд досліджень, які стосуються визначення термомпружного стану термочутливих тіл від початку дослідження проблеми до її сучасного стану, подано в роботі [4]. Про важливість врахування термочутливості матеріалів тіл при визначенні їх температури і напружень свідчать публікації [1, 3–5, 8–11]. Процес теплообміну під час кипіння рідини досліджувався у працях [2, 7].

Формулювання задачі. Розглянемо скінченний термочутливий циліндр, який складається із трьох циліндрів різної довжини, виготовлених із різних матеріалів. На одній із плоских обмежувальних поверхонь $\tilde{z} = \tilde{z}_1$ задано сталий потік тепла q , а через іншу плоску поверхню $\tilde{z} = \tilde{z}_4$ відбувається відведення тепла шляхом кипіння рідини. Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню є сталим і дорівнює α , а температура середовища, з яким відбувається теплообмін, дорівнює t_c . Циліндр нагрівається розміщеними у внутрішній складовій джерелами тепла, розподіленими за параболічним законом

$$W^{(2)}(\tilde{z}) = -\frac{4W_0^{(2)}}{(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2)^2}(\tilde{z} - \tilde{z}_2)(\tilde{z} - \tilde{z}_3),$$

де $W_0^{(2)}$ – максимальна потужність джерел тепла при $\tilde{z} = \frac{\tilde{z}_2 + \tilde{z}_3}{2}$. В інших складових циліндра джерела тепла відсутні. На межах $\tilde{z} = \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$ дотику суцільних складових виконуються умови ідеального теплового контакту.

Циліндричні поверхні кожної зі складових є теплоізольованими, тобто потік тепла через них відсутній. За таких умов ставиться завдання визначити поля температури і напружень у циліндрі. З огляду на теплову ізоляцію циліндричних поверхонь складових розподіл температури в циліндрі буде залежати лише від осової координати.

Математична модель для визначення температури. Нехай експериментально визначені залежності коефіцієнтів теплопровідності складових циліндра від температури задано таблично у діапазоні $[t_p, t_k]$. Для проведення теоретичних досліджень опишемо їх доволі поширеними лінійними залежностями $\lambda_t^{(i)} = a_i t_i + b_i$. При цьому, скориставшись методом найменших квадратів, підберемо невідомі параметри апроксимації a_i та b_i так, щоб сума квадратів різниць їх експериментальних і теоретичних значень була найменшою.

Подамо коефіцієнти теплопровідності складових циліндра у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \lambda_t^{(i)*}(T_i)$, де величини $\lambda_{t_0}^{(i)}$ мають розмірність коефіцієнта теплопровідності, а $\lambda_t^{(i)*}(T_i)$ – безрозмірні функції від безрозмірної температури $T_i = t_i/t_k$, $i = 1, 2, 3$ (тут за відлікову вибрано температуру t_k). За лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури такі подання матимуть вигляд

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)}(1 + k_i(T_i - T_p)), \quad (1)$$

де $T_p = t_p/t_k$, $k_i = a_i t_k / \lambda_{t_0}^{(i)}$, $\lambda_{t_0}^{(i)} = a_i t_p + b_i$.

Для запису моделі у безрозмірному вигляді виберемо за характерний розмір деяке значення ℓ_0 і введемо безрозмірну координату $z = \tilde{z}/\ell_0$.

У результаті обезрозмірення математична модель міститиме

– *рівняння теплопровідності:*

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_t^{(i)*}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = W^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

– *крайові умови на плоских обмежувальних поверхнях:*

$$\lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_1} = -Ki, \quad (3)$$

$$\left[\lambda_t^{(3)*}(T_3) \frac{dT_3}{dz} + Bi(T_3 - T_c) + M_{\text{boil}}(T_3 - T_{\text{boil}})^3 \right]_{z=z_4} = 0; \quad (4)$$

– *умови контакту на поверхнях дотику складових циліндра:*

$$T_1|_{z=z_2} = T_2|_{z=z_2}, \quad T_2|_{z=z_3} = T_3|_{z=z_3}, \quad (5)$$

$$\lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_2} = K_\lambda^{(2)} \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{dT_2}{dz} \Big|_{z=z_2},$$

$$\lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{dT_2}{dz} \Big|_{z=z_3} = K_\lambda^{(3)} \lambda_t^{(3)*}(T_3) \frac{dT_3}{dz} \Big|_{z=z_3}. \quad (6)$$

Тут $W^{(2)}(z) = -4Po \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z_3 - z_2)^2}$; $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$ – символ Кронекера,

$Po = \frac{W_0^{(2)} \ell_0^2}{\lambda_{t_0}^{(2)} t_k}$ – критерій Померанцева; $Bi = \frac{\alpha \ell_0}{\lambda_{t_0}^{(3)}}$ – критерій Біо; $Ki = \frac{q \ell_0}{\lambda_{t_0}^{(1)} t_k}$

– критерій Кірпічова; $m_{\text{boil}} = \mu_\ell h_{fg} \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_v)}{\sigma}} \left(\frac{C_{p,\ell}}{C_{s,f} h_{fg} Pr_\ell^n} \right)^3$, $M_{\text{boil}} = \frac{m_{\text{boil}} \ell_0 t_k^2}{\lambda_{t_0}^{(3)}}$,

μ_l – в'язкість рідини [кг/(м·с)]; $K_\lambda^{(j)} = \frac{\lambda_{t0}^{(j)}}{\lambda_{t0}^{(j-1)}}$, $j = 2, 3$; h_{fg} – питома теплота випаровування рідини [Дж/кг]; g – прискорення вільного падіння [м/с²]; ρ_l , ρ_v – густина речовини, яка кипить, у рідкому і газоподібному станах [кг/м³] відповідно; σ – поверхневий натяг рідини [Н/м], $C_{p,l}$ – питома теплоємність рідини при сталому тиску, $C_{s,f}$, n константи, які знаходять експериментально для кожної пари поверхня – рідина; Pr_l – число Прандтля для рідини, t_{boil} – температура кипіння рідини. Зазначимо, що умова (4) кипіння рідини можлива лише тоді, коли температура на обмежувальній поверхні $\tilde{z} = \tilde{z}_4$ перевищує температуру кипіння рідини, тобто, коли $t_3 \geq (t_{\text{boil}} + 5)$ [К]. Поклавши у ній $m_{\text{boil}} = 0$, отримаємо умову конвективного теплообміну.

Математична модель (2)–(6) є нелінійною з огляду на залежності коефіцієнтів теплопровідності, власне множників $\lambda_t^{(i)*}(T_i)$, $i = 1, 2, 3$, від шуканих безрозмірних температур, а також третього доданка у лівій частині умови (4).

Побудова розв'язку математичної моделі. Введемо змінні Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_t^{(i)*}(T_i) dT_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Внаслідок заміни (7) замість задачі (2)–(6) отримаємо задачу стосовно змінних θ_i :

$$\frac{d^2 \theta_i}{dz^2} = W^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$\left. \frac{d\theta_1}{dz} \right|_{z=z_1} = -Ki, \quad (9)$$

$$\left[\frac{d\theta_3}{dz} + \text{Bi}(T_3(\theta_3) - T_c) + M_{\text{boil}}(T_3(\theta_3) - T_{\text{boil}})^3 \right] \Big|_{z=z_4} = 0, \quad (10)$$

$$T_1(\theta_1) \Big|_{z=z_2} = T_2(\theta_2) \Big|_{z=z_2}, \quad T_2(\theta_2) \Big|_{z=z_3} = T_3(\theta_3) \Big|_{z=z_3}, \quad (11)$$

$$\left. \frac{d\theta_1}{dz} \right|_{z=z_2} = K_\lambda^{(2)} \left. \frac{d\theta_2}{dz} \right|_{z=z_2}, \quad \left. \frac{d\theta_2}{dz} \right|_{z=z_3} = K_\lambda^{(3)} \left. \frac{d\theta_3}{dz} \right|_{z=z_3}. \quad (12)$$

Бачимо, що в результаті застосування перетворення Кірхгофа з нелінійної задачі теплопровідності отримано простішу задачу щодо змінних Кірхгофа, в якій нелінійними є умови (10) і (11). За лінійної залежності (1) коефіцієнтів теплопровідності складових циліндра від температури з виразів (7) для змінних Кірхгофа маємо

$$\theta_i = (T_i - T_p) + \frac{k_i}{2} (T_i - T_p)^2. \quad (13)$$

Розв'язавши рівняння (13) відносно шуканих температур T_i , знаходимо їх вирази через змінні Кірхгофа:

$$T_i(\theta_i) = \frac{\sqrt{1 + 2k_i \theta_i} - 1}{k_i} + T_p. \quad (14)$$

Зазначимо, що вибраний знак перед коренем квадратним у виразах для $T_i(\theta_i)$ забезпечує їх фізичну коректність.

Проінтегрувавши рівняння (8), знаходимо, що

$$\frac{d\theta_i}{dz} = C_{i1} + \tilde{W}^{(i)}(z)\delta_{i2}, \quad \theta_i = C_{i1}(z - z_i) + C_{i2} + \bar{W}^{(i)}(z)\delta_{i2},$$

$$i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

де

$$\tilde{W}^{(2)}(z) = -\frac{4Po}{(z_3 - z_2)^2} \left(\frac{z^3}{3} - (z_3 + z_2)\frac{z^2}{2} + z_3 z_2 z - \frac{z_2^2(3z_3 - z_2)}{6} \right),$$

$$\bar{W}^{(2)}(z) = -\frac{4Po}{(z_3 - z_2)^2} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^3(z_3 + z_2)}{6} + \frac{z^2 z_3 z_2}{2} + \frac{z(z_2^3 - 3z_2^2 z_3)}{6} - \frac{z_2^3(z_2 - 2z_3)}{12} \right).$$

Розв'язки (15) містять шість невідомих сталих інтегрування. Для їх визначення сталі, наприклад, C_{11} і C_{12} , які входять у вираз для θ_1 , вважати-момо відомими (базовими). Решту сталих виразимо через базові, використовуючи умови контакту (11) і (12) сусідніх складових циліндра. Зазначимо, що замість умов (11) при цьому використаємо рівносильні їм умови, наведені у праці [3]:

$$(\theta_{i+1} - \theta_i)|_{z=z_{i+1}} = \frac{k_{i+1} - k_i}{2} (T_i(\theta_i) - T_p)^2 \Big|_{z=z_{i+1}}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

З умов (12) отримуємо

$$C_{21} = \frac{C_{11}}{K_\lambda^{(2)}}, \quad C_{31} = \left(\frac{C_{11}}{K_\lambda^{(2)}} + \tilde{W}^{(2)}(z_3) \right) \frac{1}{K_\lambda^{(3)}},$$

а з умов (16) маємо

$$C_{22} = C_{11}(z_2 - z_1) + C_{12} + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1(C_{11}(z_2 - z_1) + C_{12})} - 1}{k_1} \right)^2,$$

$$C_{32} = \theta_2|_{z=z_3} + \frac{k_3 - k_2}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 \theta_2|_{z=z_3}} - 1}{k_2} \right)^2.$$

Тут

$$\theta_2|_{z=z_3} = C_{11} \left((z_2 - z_1) + \frac{z_3 - z_2}{K_\lambda^{(2)}} \right) + C_{12} + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_1(C_{11}(z_2 - z_1) + C_{12})} - 1}{k_1} \right)^2 + \bar{W}^{(2)}(z_3).$$

Бачимо, що сталі інтегрування C_{i1} та C_{i2} , $i = 2, 3$, виражаються через базові C_{11} і C_{12} , які визначимо з граничних умов (9) і (10). Використавши першу з них, знаходимо, що

$$C_{11} = -Ki.$$

З умови (10) отримуємо алгебричне рівняння для визначення сталої C_{12} :

$$C_{31}(z_4 - z_3) + \text{Bi} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p - T_c \right) + M_{\text{boil}} \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_3 \theta_3|_{\rho=\rho_4}} - 1}{k_3} + T_p - T_c \right)^3 = 0. \quad (17)$$

Розв'язок рівняння (17) знайдено за допомогою пакета програм аналітичних перетворень. Знайшовши аналітичний вираз для C_{12} , який не наводимо через його громіздкість, автоматично отримуємо вирази і для решти

сталих інтегрування, що обчислюються через C_{12} . Знаючи C_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, за формулами (14), (15) знаходимо розподіли температури у складових циліндра.

Визначення температури в нетермочутливому циліндрі. Обезрозмірена математична модель для визначення температури в аналогічному нетермочутливому циліндрі має вигляд

$$\frac{d^2 T_{iN}}{dz^2} = W_N^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (18)$$

$$\left. \frac{dT_{1N}}{dz} \right|_{z=z_1} = -\text{Ki}_N, \quad (19)$$

$$\left[\frac{dT_{3N}}{dz} + \text{Bi}_N (T_{3N} - T_c) + M_{N \text{boil}} (T_{3N} - T_{\text{boil}})^3 \right]_{z=z_4} = 0, \quad (20)$$

$$T_{1N}|_{z=z_2} = T_{2N}|_{z=z_2}, \quad T_{2N}|_{z=z_3} = T_{3N}|_{z=z_3}, \quad (21)$$

$$\left. \frac{dT_{1N}}{dz} \right|_{z=z_2} = K_{\lambda N}^{(2)} \left. \frac{dT_{2N}}{dz} \right|_{z=z_2}, \quad \left. \frac{dT_{2N}}{dz} \right|_{z=z_3} = K_{\lambda N}^{(3)} \left. \frac{dT_{3N}}{dz} \right|_{z=z_3}. \quad (22)$$

Тут $W_N^{(2)}(\rho) = -4 \text{Po}_N \frac{(z - z_2)(z - z_3)}{(z_3 - z_2)^2}$, $\text{Po}_N = \text{Po} \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{tN}^{(2)}}$, $\text{Bi}_N = \text{Bi} \frac{\lambda_{t0}^{(3)}}{\lambda_{tN}^{(3)}}$, $M_{N \text{boil}} = m_{\text{boil}} \frac{\ell_0 t_k^2}{\lambda_{tN}^{(3)}}$, $K_{\lambda N}^{(j)} = \frac{\lambda_{tN}^{(j)}}{\lambda_{tN}^{(j-1)}}$, $j = 2, 3$. Індексом «N» позначено величини, що

відповідають нетермочутливому матеріалу.

Зазначимо, що задача для визначення температури у нетермочутливому циліндрі з огляду на граничну умову (20) є нелінійною.

Із задачі (18)–(22) знаходимо

$$\frac{dT_{iN}}{dz} = \bar{C}_{i1} + \tilde{W}_N^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad T_{iN} = \bar{C}_{i1}(z - z_i) + \bar{C}_{i2} + \bar{W}_N^{(i)}(z) \delta_{i2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Тут

$$\tilde{W}_N^{(2)}(z) = -\frac{4 \text{Po}_N}{(z_3 - z_2)^2} \left(\frac{z^3}{3} - (z_3 + z_2) \frac{z^2}{2} + z_3 z_2 z - \frac{z_2^2 (3z_3 - z_2)}{6} \right),$$

$$\bar{W}_N^{(2)}(z) = -\frac{4 \text{Po}_N}{(z_3 - z_2)^2} \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^3 (z_3 + z_2)}{6} + \frac{z^2 z_3 z_2}{2} + \frac{z(z_2^3 - 3z_2^2 z_3)}{6} - \frac{z_2^3 (z_2 - 2z_3)}{12} \right).$$

Використавши умови (19)–(22), визначаємо сталі інтегрування

$$\bar{C}_{11} = -\text{Ki}_N, \quad \bar{C}_{21} = -\frac{\text{Ki}_N}{K_{\lambda N}^{(2)}}, \quad \bar{C}_{22} = -\text{Ki}_N (z_2 - z_1) + \bar{C}_{12},$$

$$\bar{C}_{31} = \frac{-\text{Ki}_N / K_{\lambda N}^{(2)} + \tilde{W}_N^{(2)}(z_3)}{K_{\lambda N}^{(3)}},$$

$$\bar{C}_{32} = -\frac{\text{Ki}_N (z_3 - z_2)}{K_{\lambda N}^{(2)}} - \text{Ki}_N (z_2 - z_1) + \bar{C}_{12} + \bar{W}_N^{(2)}(z_3),$$

і отримуємо рівняння для знаходження сталої \bar{C}_{12} :

$$\bar{C}_{31}(z_4 - z_3) + \text{Bi}_N (\bar{C}_{31}(z_4 - z_3) + \bar{C}_{32} - T_c) + M_{N \text{boil}} (\bar{C}_{31}(z_4 - z_3) + \bar{C}_{32} - T_c)^3 = 0.$$

Визначення температурних напружень. Записані у безрозмірному вигляді дві ненульові компоненти тензора напружень $\sigma_x = \sigma_y = \sigma(z)$ обчислюємо за формулою [4]

$$\sigma(z) = \frac{E(z, t)}{1 - \nu(z, t)} \left(\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t - \Phi(z, T)}{A^2 - BC} \right), \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \frac{\bar{\sigma}(z)}{E_0^{(1)} \alpha_{t0}^{(1)} t_k}, \\ \Phi(z, T) &= \Phi_1^*(T_1) + \left(\Phi_2^*(T_2) \frac{\alpha_{t0}^{(2)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} - \Phi_1^*(T_1) \right) S_+(z - z_2) + \\ &\quad + \left(\Phi_3^*(T_3) \frac{\alpha_{t0}^{(3)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} - \Phi_2^*(T_2) \frac{\alpha_{t0}^{(2)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \right) S_+(z - z_3), \quad S_+(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0, \end{cases} \\ \Phi_i^*(T_i) &= (T_i - T_p) + \frac{k_\alpha^{(1)}}{2} (T_i - T_p)^2, \\ A &= \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \quad B = \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \\ C &= \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z^2 E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \quad N_t = \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz, \\ M_t &= \sum_{i=1}^3 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} z dz. \end{aligned}$$

Часткові випадки.

1°. Розглянемо випадок, коли за опорні значення коефіцієнтів теплопровідності та механічних характеристик складових термочутливого циліндра вибрано відповідні складові нетермочутливого циліндра. Тоді розподіл температури матиме вигляд (23), а формула (24) для обчислення напружень набуде вигляду

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \left(\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t - \Phi(z)}{A^2 - BC} \right), \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} \{E(z), \nu(z), \Phi(z)\} &= \begin{cases} \{1, \nu_0^{(1)}, T_{1N} - T_p\}, & z_1 \leq z < z_2, \\ \left\{ \frac{E_0^{(2)}}{E_0^{(1)}}, \nu_0^{(2)}, (T_{2N} - T_p) \frac{\alpha_{t0}^{(2)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \right\}, & z_2 \leq z < z_3, \\ \left\{ \frac{E_0^{(3)}}{E_0^{(1)}}, \nu_0^{(2)}, (T_{3N} - T_p) \frac{\alpha_{t0}^{(3)}}{\alpha_{t0}^{(1)}} \right\}, & z_3 \leq z \leq z_4, \end{cases} \\ A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} (z_{i+1}^2 - z_i^2), \quad B = \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} (z_{i+1} - z_i), \quad C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} (z_{i+1}^3 - z_i^3), \\ N_t &= \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} (\bar{C}_{i1} (z_{i+1} - z_i)^2 + (\bar{C}_{i2} - T_p) (z_{i+1} - z_i)) \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}}, \\ M_t &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{E}_{i0} \left[\frac{1}{3} (z_{i+1} - z_i)^3 \bar{C}_{i1} + \frac{1}{2} (z_{i+1} - z_i)^2 (\bar{C}_{i2} - \bar{C}_{i1} z_i - T_p) \right] \frac{\alpha_{t0}^{(i)}}{\alpha_{t0}^{(1)}}, \\ \bar{E}_{i0} &= E_0^{(i)} \frac{1}{E_0^{(1)} (1 - \nu_0^{(i)})}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2°. У випадку, коли за опорні значення термомеханічних характеристик матеріалів складових циліндра вибрати середньоінтегральні значення

$$\begin{aligned}\lambda_{tN}^{(i)} = \lambda_{tc}^{(i)} &= \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} (\lambda_{t0}^{(i)} (1 + k_i (T_i - T_p))) dT_i = \\ &= \lambda_{t0}^{(i)} \left(1 + \frac{k_i}{2} (T_k - T_p) \right), \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

термопружні характеристики набудуть вигляду

$$\begin{aligned}\{v_i, \alpha_{ti}, E_i\} &= \{v_c^{(i)}, \alpha_{tc}^{(i)}, E_c^{(i)}\} = \\ &= \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \{v_i(T_i), \alpha_{ti}(T_i), E_i(T_i)\} dT_i, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Тоді у виразах (23) для температури треба вважати

$$Po_N = Po \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{tc}^{(2)}}, \quad K_{\lambda N}^{(2)} = \frac{\lambda_{tc}^{(2)}}{\lambda_{tc}^{(1)}}, \quad K_{\lambda N}^{(3)} = \frac{\lambda_{tc}^{(3)}}{\lambda_{tc}^{(2)}}.$$

Формула для обчислення напружень матиме вигляд (25), у якій опорні значення механічних характеристик слід замінити на середньоінтегральні.

Числові дослідження. Як приклад досліджено вплив залежності теплових і механічних характеристик матеріалів складових циліндра від температури на рівень і характер розподілів температур і напружень залежно від вхідних параметрів. За матеріал першої і третьої складових вибрали кераміку ZrO_2 , а другої – титановий сплав $Ti-6Al-4V$ [11].

Експериментально задані коефіцієнти теплопровідності та термомеханічні характеристики проапроксимували з використанням методу найменших квадратів лінійними залежностями типу (1) у діапазоні температур $300 \div 1100$ К. При цьому отримали, що для кераміки

$$\begin{aligned}\lambda_t^{(1,3)} &= 1.915(1 + 0.24664(T_1 - T_p)) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], \quad v^{(1,3)} = 0.333, \\ \alpha_t^{(1,3)} &= 8.783 \cdot 10^{-6} (1 - 1.4128(T_1 - T_p) + 1.7496(T_1 - T_p)^2) [\text{К}^{-1}], \\ E^{(1,3)} &= 116.381(1 - 0.521357(T_1 - T_p) - 0.084215(T_1 - T_p)^2) [\text{ГПа}],\end{aligned}$$

а для титанового сплаву

$$\begin{aligned}\lambda_t^{(2)} &= 6.2(1 + 3.016(T_2 - T_p)) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], \\ v^{(2)} &= 0.2984(1 + 0.118(T_2 - T_p)), \\ \alpha_t^{(2)} &= 8.8559 \cdot 10^{-6} (1 + 0.49014(T_2 - T_p) - 0.36754(T_2 - T_p)^2) [\text{К}^{-1}], \\ E^{(2)} &= 105.05(1 - 0.5916(T_2 - T_p)) [\text{ГПа}].\end{aligned}$$

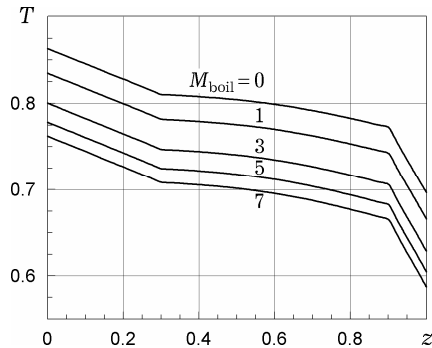
Обчислення виконано для трискладового циліндра з координатами меж складових $z_1 = 0$, $z_2 = 0.3$, $z_3 = 0.9$, $z_4 = 1$ і характерним розміром $\ell_0 = \tilde{z}_4$.

Значення безрозмірних температур прийняли такими: $T_p = 3/11$, $T_k = 1$, $T_c = 3/11$,

$T_{\text{boil}} = 3/11$, а безрозмірних критеріїв – $Po = -0.5$, $Vi = 2$, $Ki = 0.2$.

На рис. 1 наведено графіки залежності від z температури T для вибраних значень $M_{\text{boil}} = 0, 1, 3, 5, 7$.

На рис. 1 бачимо, що збільшення значення M_{boil} має істотний вплив на температуру: спостерігаємо її зниження в кожному шарі циліндра. Зокрема, при $M_{\text{boil}} = 7$ температура в точці $z = 0$



зменшилася на 11.7%, у точці $z = 0.3$ – на 12.6%, у точці $z = 0.9$ – на 13.9%, в точці $z = 1$ – на 15.7% порівняно з чисто конвективним теплообміном ($M_{\text{boil}} = 0$).

Для дослідження впливу термочутливості матеріалів на розподіли температур і напружень побудували графіки їх залежності від осової координати z (рис. 2, рис. 3) для значень $M_{\text{boil}} = 0, 3, 5$, при цьому інші вхідні параметри задачі залишили незмінними. Суцільні криві відповідають термочутливим матеріалам складових циліндра, штрихові – нетермочутливим за опорних значень термомеханічних характеристик, а штрихпунктирні – за середньоінтегральних значень.

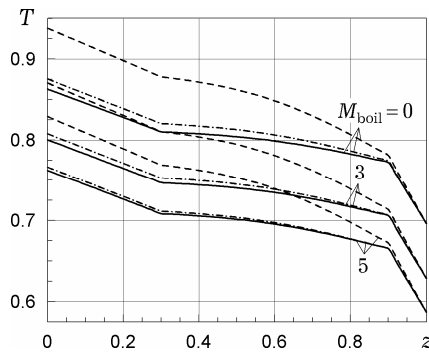


Рис. 2

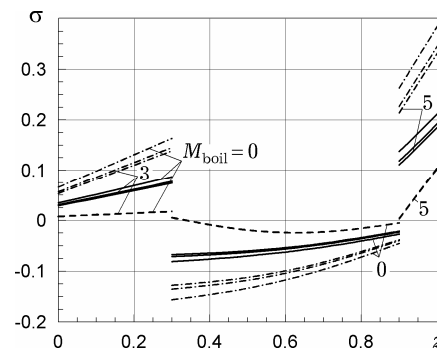


Рис. 3

Як бачимо, розподіли температур і напружень у термочутливому циліндрі найкраще наближаються такими розподілами в аналогічному нетермочутливому циліндрі за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик його складових. Однак, якщо максимальні розбіжності для температур сягають 1.5%, то для напружень вони можуть навіть перевищувати 50%, а тому нехтування термочутливістю матеріалів складових циліндра при визначенні його напруженого стану дасть хибні результати. Зазначимо також, що зміна M_{boil} фактично не впливає на кількісну зміну напружень нетермочутливого циліндра за опорних значень механічних характеристик.

Висновки. Сформульовано нелінійну математичну модель для визначення розподілу температури у скінченному трискладовому термочутливому циліндрі, в другому шарі якого наявні джерела тепла, розподілені за параболічним законом, на плоских обмежувальних поверхнях наявний тепловий потік та відбувається тепловідведення шляхом кипіння рідини. Визначено температурні напруження, спричинені знайденою температурою. В результаті числових досліджень виявлено, що кипіння рідини істотно інтенсифікує процес тепловідведення і є досить ефективним способом додаткового відведення тепла за критичних умов.

Для вибраної композиції матеріалів показано, що розподіли температури і напружень у термочутливому циліндрі краще наближаються такими розподілами в аналогічному нетермочутливому циліндрі за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик його складових, що може бути корисним при їх експрес-оцінці. З'ясовано, що нехтування залежністю механічних характеристик матеріалів складових циліндра від температури (зміна їх на опорні чи середньоінтегральні значення) призводить до досить великих кількісних розбіжностей між розподілами напружень термочутливого та аналогічного нетермочутливого циліндрів.

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 488 с.
2. Комов А. Т. Физическая модель расчета критических тепловых нагрузок при кипении в закрученном недогретом потоке при неоднородном обогреве // Теплофизика высоких температур. – 2000. – 38, № 3. – С. 523–527.

- Те саме: *Kotov A. T.* A physical model for prediction of critical heat fluxes in boiling in swirling subcooled flow under nonuniform heating // *High Temp.* – 2000. – **38**, No. 3. – P. 502–506.
3. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Про визначення усталеного термопружного стану багатопарових структур за високотемпературного нагрівання // *Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2013. – № 3. – С. 42–47.
 4. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Споллом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
 5. *Ракоча І., Попович В.* Математичне моделювання та дослідження термопружного стану кусково-однорідного по осі термочутливого циліндра // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 21. – С. 186–197.
 6. *Федасюк Д. В.* Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв. – Львів: Вид-во держ. ун-ту «Львів. політехніка», 1999. – 228 с.
 7. *Benjamin R. J., Balakrishnan A. R.* Nucleation site density in pool boiling of saturated pure liquids. – Effect of surface microroughness and surface and liquid physical properties // *Exp. Therm. Fluid Sci.* – 1997. – **15**, No. 1. – P. 32–42.
 8. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: *Heat conduction – Basic research* / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.)
 9. *Noda N.* Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: *Thermal Stresses I* / R. B. Hetnarski (ed.). – Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986. – P. 391–483.
 10. *Popovych V.* Methods for determination of the thermo-stressed state of thermosensitive solids under complex heat exchange conditions // In: R. B. Hetnarski (ed.). *Encyclopedia of Thermal Stresses.* – Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2997–3008.
 11. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *J. Therm. Stresses.* – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ТЕПЛОТВОДЕ ПУТЕМ КИПЕНИЯ ЖИДКОСТИ

На примере конечного трёхслойного по осевой координате цилиндра проиллюстрированы формулировка математической модели и методики определения и исследования установившихся температуры и напряжений при наличии теплоотвода путём кипения жидкости. При этом использована модель термочувствительного тела и принято, что во втором слое цилиндра размещены распределенные по параболическому закону источники тепла, на одну из плоских ограничивающих поверхностей направлен поток тепла, а через другую осуществляется теплоотвод путём кипения жидкости. Найдены напряжения и исследовано влияние зависимости термомеханических характеристик материалов составляющих цилиндра от температуры и интенсивности кипения на характер и уровень распределения температуры и напряжений.

STRESS-STRAIN STATE OF THE PIECEWISE HOMOGENEOUS THERMOSENSITIVE CYLINDER DURING HEAT REMOVAL BY THE WAY OF BOILING OF LIQUID

On the example of the finite three-layered by axial coordinate cylinder the formulation of the mathematical model and the method of determination and investigation of steady-state distributions of temperature and stresses at presence heat removal by the way of boiling of liquid are illustrated. Therein mathematical model of thermosensitive body is used. It is assumed that in the second layer of cylinder there are the heat sources distributed by parabolic law, the heat flux is directed to one of the flat bounding surfaces, and the heat removal by liquid boiling takes place on the another surface. The stresses are determined and the effect of thermomechanical properties of materials of the cylinder components depending on the temperature and boiling intensity on the nature and level of temperature and stress distributions are investigated.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів