

**ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ЧОТИРИЛАНКОВОГО ЗАМКНУТОГО МАНІПУЛЯТОРА З АКТИВНИМИ Й ПАСИВНИМИ ПРИВОДАМИ**

*Досліджується задача оптимізації законів руху та конструкційних параметрів чотириланкового маніпулятора замкнутої кінематичної структури. Маніпулятор під дією активних і пасивних (пружини, демпфери) приводів виконує циклічні транспортні операції у горизонтальній площині. За критерій мінімізації взято квадратичний (за керуючими моментами сил) функціонал. Розроблено алгоритм побудови субоптимального розв'язку сформульованої задачі, який ґрунтується на параметризації узагальнених координат маніпулятора сім'єю заданих функцій і використанні методикі обернених задач динаміки та числових процедур математичного програмування.*

Останніми роками серед маніпуляційних роботів, задіяних у різних галузях сучасного виробництва, досить широко використовують маніпуляційні системи замкнутої кінематичної структури. Замкнутість кінематичної структури маніпулятора часто дає можливість розмістити керуючі приводи на нерухомій основі робота, зменшивши цим самим вагу його рухомих ланок [17]. Тому дослідження керованих рухів замкнутих маніпуляційних систем, розробка оптимальних режимів керування цими системами є актуальною задачею робототехніки.

Задачі оптимізації режимів руху замкнутих маніпуляційних систем у різних постановках досліджувались, зокрема, у працях [14, 15, 18]. У [14] розв'язано задачу оптимального керування чотириланковим маніпулятором замкнутої кінематичної структури. Субоптимальні режими руху будуються за допомогою принципу максимуму Понтрягіна та чисельних методів розв'язання двоточкових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. У статті [15] розглядається чотириланковий маніпуляційний робот, три ланки якого є замкнутими і здійснюють обертальний рух у горизонтальній площині, а третя ланка поступально переміщується у вертикальному напрямку. У шарнірах робота, крім активних керувань, діють також пасивні приводи (пружини, демпфери). Методами параметричної оптимізації розв'язано задачу розрахунку субоптимальних активних керувань і параметрів пасивних приводів, при яких робот виконає циклічну транспортну операцію з мінімізацією заданого функціонала. У [18] досліджується кінематична структура плоского замкнутого чотириланкового маніпулятора, зокрема, аналізуються його сингулярні конфігураційні положення. Задачі математичного моделювання субоптимального руху керованих нелінійних механічних систем з активними та пасивними приводами у різноманітних постановках досліджувалась, зокрема, у працях [5, 6, 8].

У цій статті розглядаємо чотириланковий замкнутий маніпулятор, який за допомогою активних і пасивних приводів виконує циклічну транспортну операцію: переносить вантаж з початкового положення у заданий стан і повертається назад у початкове положення без вантажу. Побудовано механіко-математичну модель маніпулятора, у рамках якої розв'язано задачу розрахунку таких програмних керувань активних приводів та конструкційних параметрів пасивних приводів, які забезпечують виконання циклічної операції з мінімальним значенням заданого квадратичного функціонала. Розроблено алгоритм наближеного розв'язання цієї задачі, який ґрунтується на параметризації узагальнених координат маніпулятора сім'єю заданих функцій, процедурі розв'язання обернених задач динаміки та чисельних методах нелінійного математичного програмування. Ефективність алгоритму проілюстровано результатами числового моделювання циклічних рухів досліджуваного чотириланкового маніпулятора.

**1. Механіко-математична модель маніпулятора.** Розглянемо механічну модель чотириланкового маніпулятора, схематично зображеного на рис. 1. Маніпулятор складається із чотирьох твердих тіл  $O_1A_1$ ,  $A_1B$ ,  $BA_2$ ,  $A_2O_2$ , послідовно з'єднаних між собою циліндричними шарнірами  $A_1$ ,  $B$ ,  $A_2$ . Біля шарніра  $B$  розміщено захват (з вантажем). За допомогою циліндричних шарнірів  $O_1$ ,  $O_2$  маніпуляційна система з'єднана з нерухомою основою. Осі шарнірів  $O_1$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $A_2$ ,  $O_2$  паралельні між собою. Маніпулятор здійснює плоскопаралельний рух у горизонтальній площині  $O_1XY$  під дією моментів сил  $u_i$ ,  $p_i$ , прикладених у шарнірах  $O_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Моменти сил  $u_1$ ,  $u_2$  генеруються активними приводами (наприклад, електродвигунами), моменти  $p_1$ ,  $p_2$  – пасивними приводами, які подаємо у вигляді пружин і демпферів. З метою спрощення математичної моделі маніпулятора вважаємо, що лінійні розміри захвата (разом із вантажем) є малими порівняно з довжинами ланок маніпулятора, тому захват моделюємо точковою масою  $m$ , зосередженою у шарнірі  $B$ . Шарніри системи вважаємо ідеальними, інерційністю рухомих частин пасивних приводів нехтуємо.

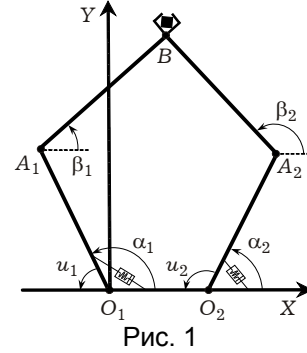


Рис. 1

Для зручності запису рівнянь руху замкнутої маніпуляційної системи розділимо її у шарнірі  $B$  на дві підсистеми  $O_1A_1B$  і  $O_2A_2B$ , навантаживши кожен з них (у точці  $B$ ) масою  $0.5m$  та приклавши відповідні сили реакції  $\mathbf{R}$  і  $-\mathbf{R}$  [12]. Тоді рівняння руху маніпулятора можна записати у вигляді системи чотирьох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} K_{ai}\ddot{\alpha}_i + K_i[\ddot{\beta}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + \dot{\beta}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i)] &= \\ &= u_i + p_i + (-1)^i a_i (R_x \sin \alpha_i - R_y \cos \alpha_i), \\ K_{bi}\ddot{\beta}_i + K_i[\ddot{\alpha}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) - \dot{\alpha}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i)] &= \\ &= (-1)^i b_i (R_x \sin \beta_i - R_y \cos \beta_i), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

доповненої умовами нерозривності в шарнірі  $B$ :

$$\begin{aligned} a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 &= L + a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \cos \beta_2, \\ a_1 \sin \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1 &= a_2 \sin \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2, \end{aligned} \quad (2)$$

де позначено:  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  – кути повороту ланок  $O_iA_i$ ,  $A_iB$  відносно осі  $O_iX$ ;  $R_x$ ,  $R_y$  – проекції вектора реакції  $\mathbf{R}$  на осі системи координат  $O_1XY$ ;  $K_{ai} = J_{ai} + a_i^2(m_{bi} + 0.5m)$ ,  $K_{bi} = J_{bi} + 0.5mb_i^2$ ,  $K_i = a_i(d_i m_{bi} + 0.5mb_i)$ ;  $J_{ai}$ ,  $J_{bi}$  – моменти інерції ланок  $O_iA_i$ ,  $A_iB$  відносно осей шарнірів  $O_i$ ,  $A_i$  відповідно;  $m_{bi}$  – маса ланки  $A_iB$ ;  $a_i = |O_iA_i|$ ,  $b_i = |A_iB|$  – довжини ланок маніпулятора;  $d_i$  – відстані від осі шарніра  $A_i$  до центра маси ланки  $A_iB$ ;  $L = |O_1O_2|$  – довжина бази закріплення маніпулятора до основи;  $p_i = c_i(\theta_i - \alpha_i) - k_i\dot{\alpha}_i$  – момент пасивних сил у шарнірах  $O_i$ ;  $c_i$ ,  $\theta_i$ ,  $k_i$  – коефіцієнт жорсткості пружини, кути її ненапруженого стану та коефіцієнт в'язкості демпфера,  $i = 1, 2$ . Тут і далі крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом  $t$ . Співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду [12, 13], які описують рух замкнутого чотириланкового маніпулятора під дією активних керувань  $u_1$ ,  $u_2$  і моментів пасивних сил  $p_1$ ,  $p_2$ .

**2. Параметрична оптимізація циклічного руху маніпулятора.** Нехай маніпулятор здійснює циклічну транспортну операцію: протягом часу  $T_1$  переносить вантаж із заданого початкового положення у заданий стан і за час  $T_2$  повертається без вантажу в початковий стан. При цьому вважаємо, що рух маніпулятора на зворотній фазі операції  $t \in [T_1, T]$  не залежить від його руху на прямій фазі  $t \in [0, T_1]$ , де  $T = T_1 + T_2$  – сумарний час операції [8, 15].

Обмежимо дослідженням керованого руху маніпулятора у верхній півплощині системи координат  $O_1XY$  з урахуванням таких кінематичних умов:

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \pi, \quad \beta_1 \leq \alpha_1, \quad \alpha_2 \leq \beta_2, \quad \beta_2 - \beta_1 \neq \pi, \\ t \in [0, T]. \quad (3)$$

Нерівність  $\beta_2 - \beta_1 \neq \pi$  означає, що під час руху маніпулятора точка  $B$  не повинна перетинати пряму  $A_1A_2$ .

Задамо положення і швидкості захвата (точки  $B$ ) маніпулятора у початковий момент часу  $t = 0$ , у момент часу  $t = T_1$  і в кінцевий момент  $t = T$ :

$$x(0) = x(T) = x_0, \quad x(T_1) = x_1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T_1) = \dot{x}(T) = 0, \\ y(0) = y(T) = y_0, \quad y(T_1) = y_1, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(T_1) = \dot{y}(T) = 0, \quad (4)$$

де  $x, y$  – координати точки  $B$  в інерційній системі відліку  $O_1XY$ ;  $x_0, y_0, x_1, y_1$  – задані сталі параметри, які задовольняють умови досяжності захвата

$$x_\tau^2 + y_\tau^2 \leq (a_1 + b_1)^2, \quad (x_\tau - L)^2 + y_\tau^2 \leq (a_2 + b_2)^2, \quad \tau = 0, 1,$$

та узгоджені з умовами (3), згідно з якими захват у моменти часу  $t = 0, t = T_1$  повинен бути розташованим по одну сторону від прямої  $A_1A_2$ .

Позначимо через  $\xi_i$  вектор  $\xi_i = (c_i, k_i, \theta_i)$  параметрів  $i$ -го пасивного приводу. Очевидно, що ці параметри повинні задовольняти обмеження

$$0 \leq c_i \leq c_i^{\max}, \quad 0 \leq k_i \leq k_i^{\max}, \quad \theta_i^{\min} \leq \theta_i \leq \theta_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

де  $c_i^{\max}, k_i^{\max}, \theta_i^{\min}, \theta_i^{\max}$  – задані сталі величини.

Нехай на активні керування маніпулятора накладено обмеження

$$u_i^{\min} \leq u_i(t) \leq u_i^{\max}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Сформулюємо задачу оптимізації. Знайти такі керування  $u_1(t), u_2(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , і такі параметри пасивних приводів  $\xi_1, \xi_2$ , які при обмеженнях (5), (6) забезпечать виконання маніпулятором циклічної операції (3), (4) з мінімальним значенням функціонала

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (7)$$

Квадратичний функціонал (7) часто використовують у задачах оптимального керування маніпуляційними системами [1, 4, 7, 10]. Коли керування маніпулятором відбувається за допомогою електродвигунів постійного струму, функціонал (7) (за певних припущень) характеризує сумарну кількість тепла, що виділяється в обмотках двигунів.

Для розв'язання сформульованої задачі оптимального керування (з параметрами) використаємо параметричний підхід [5–8, 15]. Підхід ґрунтується на ідеї методу Рітца [11], згідно з якою задачу про відшукання міні-

муму функціонала замінюємо простішою задачею про знаходження мінімуму деякої функції. Частину узагальнених координат механічної системи подасмо у вигляді лінійної комбінації заданих функцій з невідомими коефіцієнтами, решту координат визначаємо із умов нерозривності (2). Далі, використовуючи методику розв'язання обернених задач динаміки, із системи чотирьох диференціальних рівнянь (1) обчислюємо керування  $u_1, u_2$ . В результаті вихідна задача оптимального керування зводиться до задачі параметричної оптимізації, в якій за параметри оптимізації вибираємо коефіцієнти параметризації і конструкційні параметри пасивних приводів  $\xi_1, \xi_2$ . Виконання обмежень (3), (6) забезпечуємо методом зовнішніх штрафних функцій [3]. Зауважимо, що такий підхід дозволяє побудувати наближений (субоптимальний) розв'язок задачі оптимального керування. Однак для більшості маніпуляційних систем, математичні моделі яких є суттєво нелінійними і використання класичних методів оптимального керування викликає значні труднощі, застосування саме такої методики дає можливість в реальному часі побудувати субоптимальні процеси керування та оцінити динамічні характеристики систем.

Опишемо докладніше запропонований алгоритм. Аналіз кінематичної структури чотириланкового маніпулятора свідчить, що його керований рух можна однозначно задати двома незалежно варійованими функціями, за які виберемо кути  $\alpha_1(t), \beta_1(t), t \in [0, T]$ . Для параметризації  $\alpha_1(t), \beta_1(t)$  на кожній із фаз циклічної операції використаємо суму полінома третього порядку та скінченного тригонометричного ряду [6, 8, 15, 16]:

$$\alpha_1(t) \equiv \begin{cases} f_1^{(0)}(t), & t \in [0, T_1], \\ f_1^{(1)}(t), & t \in (T_1, T], \end{cases} \quad \beta_1(t) \equiv \begin{cases} f_2^{(0)}(t), & t \in [0, T_1], \\ f_2^{(1)}(t), & t \in (T_1, T], \end{cases}$$

$$f_i^{(\tau)} = \sum_{j=0}^3 c_{ij}^{(\tau)} \Delta_\tau^j + \sum_{k=1}^n (a_{ik}^{(\tau)} \cos k\omega_\tau \Delta_\tau + b_{ik}^{(\tau)} \sin k\omega_\tau \Delta_\tau), \quad (8)$$

де  $c_{ij}^{(\tau)}, a_{ik}^{(\tau)}, b_{ik}^{(\tau)}$  – невідомі коефіцієнти,  $j = 0, 1, 2, 3, k = 1, \dots, n, i = 1, 2, \tau = 0, 1$ ;  $\Delta_0 = t, \omega_0 = 2\pi/T_1, \Delta_1 = t - T_1, \omega_1 = 2\pi/T_2$ . Коефіцієнти полінома визначаємо за допомогою співвідношень (4), згідно з якими запишемо граничні умови на кути  $\alpha_1, \beta_1$ :

$$\alpha_1(0) = \alpha_1(T) = \alpha_1^{(0)}, \quad \alpha_1(T_1) = \alpha_1^{(1)}, \quad \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_1(T_1) = \dot{\alpha}_1(T) = 0,$$

$$\beta_1(0) = \beta_1(T) = \beta_1^{(0)}, \quad \beta_1(T_1) = \beta_1^{(1)}, \quad \dot{\beta}_1(0) = \dot{\beta}_1(T_1) = \dot{\beta}_1(T) = 0. \quad (9)$$

Тут кожна із пар  $\{\alpha_1^{(\tau)}, \beta_1^{(\tau)}\}, \tau = 0, 1$ , є розв'язком відповідної системи тригонометричних рівнянь

$$a_1 \cos \alpha_1^{(\tau)} + b_1 \cos \beta_1^{(\tau)} = x_\tau,$$

$$a_1 \sin \alpha_1^{(\tau)} + b_1 \sin \beta_1^{(\tau)} = y_\tau. \quad (10)$$

Враховуючи припущення про рух маніпулятора у верхній півплощині системи координат  $O_1XY$  та обмеження на кути (3), розв'язок системи рівнянь (10) запишемо у такому вигляді:

$$\alpha_1^{(\tau)} = \arccos \frac{x_\tau}{r_\tau} + \arccos \frac{a_1^2 + r_\tau^2 - b_1^2}{2a_1 r_\tau},$$

$$\beta_1^{(\tau)} = \arccos \frac{x_\tau}{r_\tau} - \arccos \frac{b_1^2 + r_\tau^2 - a_1^2}{2b_1 r_\tau}, \quad r_\tau = \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}, \quad \tau = 0, 1. \quad (11)$$

Далі, підставляючи ряди (8) у граничні умови (9), остаточно одержуємо вирази для коефіцієнтів поліномів

$$\begin{aligned} c_{i0}^{(\tau)} &= \alpha_i^{(\tau)} - \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(\tau)}, & c_{i1}^{(\tau)} &= -\omega_\tau \sum_{k=1}^n k b_{ik}^{(\tau)}, \\ c_{i2}^{(\tau)} &= \frac{3}{T_\tau^2} (\alpha_i^{(\tau+1)} - \alpha_i^{(\tau)} - T_{\tau+1} c_{i1}^{(\tau)}), & c_{i3}^{(\tau)} &= -\frac{2}{3T_{\tau+1}} c_{i2}^{(\tau)}, \quad \tau = 0, 1, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\alpha_i^{(2)} = \alpha_i^{(0)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Кутові швидкості  $\dot{\alpha}_1(t)$ ,  $\dot{\beta}_1(t)$  та прискорення  $\ddot{\alpha}_1(t)$ ,  $\ddot{\beta}_1(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , обчислюємо диференціюванням виразів (8).

Решту кутових координат  $\alpha_2(t)$ ,  $\beta_2(t)$  визначимо із умов нерозривності (2), які подамо у вигляді

$$a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \cos \beta_2 = x - L, \quad a_2 \sin \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2 = y, \quad (13)$$

де  $x = a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1$ ,  $y = a_1 \sin \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1$ . Аналогічно до (10), (11) розв'язок системи тригонометричних рівнянь (13) запишемо так:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \arccos \frac{x-L}{z} - \arccos \frac{a_2^2 + z^2 - b_2^2}{2a_2 z}, \\ \beta_2 &= \arccos \frac{x-L}{z} + \arccos \frac{b_2^2 + z^2 - a_2^2}{2b_2 z}, \quad z = \sqrt{(x-L)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Швидкості  $\dot{\alpha}_2(t)$ ,  $\dot{\beta}_2(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , одержуємо після диференціювання (за часом  $t$ ) співвідношень (13):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2 &= \frac{\dot{x} \cos \beta_2 + \dot{y} \sin \beta_2}{a_2 \sin(\beta_2 - \alpha_2)}, & \dot{\beta}_2 &= -\frac{\dot{x} \cos \alpha_2 + \dot{y} \sin \alpha_2}{b_2 \sin(\beta_2 - \alpha_2)}, \quad \alpha_2 \neq \beta_2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \dot{\beta}_2 = -\frac{\dot{x}}{(a_2 + b_2) \sin \alpha_2}, & \alpha_2 &= \beta_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогічно обчислюємо кутові прискорення  $\ddot{\alpha}_2(t)$ ,  $\ddot{\beta}_2(t)$ ,  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_2 &= \frac{\ddot{x} \cos \beta_2 + \ddot{y} \sin \beta_2 + a_2 \dot{\alpha}_2^2 \cos(\beta_2 - \alpha_2) + b_2 \dot{\beta}_2^2}{a_2 \sin(\beta_2 - \alpha_2)}, \\ \ddot{\beta}_2 &= -\frac{\ddot{x} \cos \alpha_2 + \ddot{y} \sin \alpha_2 + b_2 \dot{\beta}_2^2 \cos(\beta_2 - \alpha_2) + a_2 \dot{\alpha}_2^2}{b_2 \sin(\beta_2 - \alpha_2)}, \quad \alpha_2 \neq \beta_2, \\ \ddot{\alpha}_2 &= \ddot{\beta}_2 = -\frac{\ddot{x}}{(a_2 + b_2) \sin \alpha_2} - \dot{\alpha}_2^2 \operatorname{ctg} \alpha_2, \quad \alpha_2 = \beta_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Накладені на рух маніпулятора обмеження (3), (6) подамо в інтегральній формі [7, 8]:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1} &= \int_0^T \left[ ([-\alpha_1]_+)^2 + ([\alpha_1 - \pi]_+)^2 \right] dt, & Q_{\beta_1} &= \int_0^T ([\beta_1 - \alpha_1]_+)^2 dt, \\ Q_{\alpha_2} &= \int_0^T \left[ ([-\alpha_2]_+)^2 + ([\alpha_2 - \pi]_+)^2 \right] dt, & Q_{\beta_2} &= \int_0^T ([\alpha_2 - \beta_2]_+)^2 dt, \\ Q_{\beta_1 \beta_2} &= \int_0^T ([\beta_2 - \beta_1 - \pi + \varepsilon]_+)^2 dt, \\ Q_{u_i} &= \int_0^T \left[ ([u_i^{\min} - u_i(t)]_+)^2 + ([u_i - u_i^{\max}]_+)^2 \right] dt, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут позначено  $[v]_+ = \begin{cases} v, & v > 0, \\ 0, & v \leq 0, \end{cases}$   $\varepsilon > 0$  – заданий малий параметр, що

характеризує величину наближення точки  $B$  до прямої  $A_1A_2$ . У співвідношеннях (17) для означеності приймаємо, що точка  $B$  під час руху маніпуляційної системи знаходиться вище від прямої  $A_1A_2$ .

Активні керування  $u_1, u_2$  визначаємо із рівнянь руху (1). Після підстановки виразів для кутів  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  та їх похідних у співвідношення (1) невідомі  $u_1, u_2$  (а також реакції  $R_x, R_y$ ) отримуємо як розв'язки системи чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 \sin \alpha_1 & a_1 \cos \alpha_1 \\ 0 & 0 & -b_1 \sin \beta_1 & b_1 \cos \beta_1 \\ 0 & 1 & a_2 \sin \alpha_2 & -a_2 \cos \alpha_2 \\ 0 & 0 & b_2 \sin \beta_2 & -b_2 \cos \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ R_x \\ R_y \end{pmatrix}, \quad (18)$$

де компоненти вектора  $\mathbf{G}$  визначаються лівими частинами рівнянь (1), в які попередньо перенесені із правих частин вирази для пасивних моментів  $p_1, p_2$ . Відомо [9], що, якщо визначник матриці  $\mathbf{A}$  відмінний від нуля, то система (18) має єдиний розв'язок. Після нескладних обчислень отримуємо вираз для визначника  $\det \mathbf{A} = -b_1 b_2 \sin(\beta_1 - \beta_2)$ , звідки з огляду на обмеження (3) випливає, що  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

Отримані керування  $u_1, u_2$  є функціями невідомих коефіцієнтів тригонометричних рядів (8) і параметрів пасивних приводів, внаслідок чого функціонал (7) та інтеграл в (17) зводяться до функцій тих самих параметрів. Остаточною вихідна задача оптимального керування чотириланковим маніпулятором зводиться до задачі нелінійного математичного програмування [3]

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{C}) \rightarrow \min_{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{C}) = \mathbf{0}, \quad (19)$$

де  $\mathbf{C}$  – вектор параметрів оптимізації, компонентами якого є:  $a_{ik}^{(\tau)}, b_{ik}^{(\tau)}, c_i, k_i, \theta_i, k = 1, \dots, n, \tau, i = 1, 2$ . Цільова функція  $\mathbf{Q}_0(\mathbf{C})$  формується на основі функціонала (7), компонентами вектор-функції  $\mathbf{Q}$  є інтегральні співвідношення (17).

Описаний вище алгоритм реалізовано в інтегрованому програмному середовищі MATLAB [2].

**4. Числове моделювання субоптимального руху маніпулятора.** Опишемо результати розв'язання задачі параметричної оптимізації маніпулятора, ланки якого мають: кільцеве поперечне січення зі сталими зовнішнім 0.1 м і внутрішнім 0.094 м діаметрами, сталу густину матеріалу 7850 кг/м<sup>3</sup>,  $a_1 = a_2 = 0.8$  м,  $b_1 = b_2 = 0.6$  м,  $r_1 = r_2 = 0.3$  м. Довжина бази закріплення маніпулятора  $L = 0.3$  м, маса вантажу  $m = 10$  кг. Параметри циклічної операції  $x_0 = 0, y_0 = 1.2$  м,  $x_1 = 0.8$  м,  $y_1 = 1.1$  м,  $T_1 = 6$  с,  $T_2 = 2$  с. Обмеження на параметри пасивних приводів (5) та активні керування (6) задавали згідно з даними табл. 1.

Таблиця 1

$z$	$c_1, \text{Н} \cdot \text{м}$	$k_1, \text{Нмс}$	$\theta_1, \text{рад.}$	$c_2, \text{Н} \cdot \text{м}$	$k_2, \text{Нмс}$	$\theta_2, \text{рад.}$	$u_1, \text{Н} \cdot \text{м}$	$u_2, \text{Н} \cdot \text{м}$
$z^{\max}$	5	5	$\pi$	5	5	$\pi$	3	3
$z^{\min}$	0	0	0	0	0	0	-3	-3

Кількість членів тригонометричного ряду в поданні (8) задавали  $n = 8$ . Числові експерименти свідчать, що збільшення кількості членів тригонометричного ряду не призвело до суттєвого зменшення функціонала (7) та зміни кінематичних і динамічних характеристик субоптимальних процесів маніпулятора. Внаслідок цього загальна кількість параметрів оптимізації в отриманій задачі параметричної оптимізації (19) становила 70. Для розв'язування задачі (19) використовували стандартні процедури мінімізації, наведені в середовищі MATLAB [2]. Точність за параметрами оптимізації і значенням цільової функції становили відповідно  $10^{-6}$  і  $10^{-3}$ , час розв'язання задачі (19) на комп'ютері AMD Athlon 3500 – близько 10 хв.

Отриманий субоптимальний закон руху маніпулятора характеризується значеннями коефіцієнтів параметризації, поданими у табл. 2, а також параметрами пасивних приводів  $\xi_1 = (3.11, 0, 1.64)$ ,  $\xi_2 = (4.07, 0, 1.0)$ . Під час оптимізації значення цільової функції (7) було зменшене приблизно в 10 разів та остаточно стало рівним  $E = 2.02$ .

Таблиця 2

Коефіцієнти параметризації		$\tau = 0 \ (t \in [0, T_1])$		$\tau = 1 \ (t \in [T_1, T])$	
		$i = 1 \ (\alpha_1)$	$i = 2 \ (\beta_1)$	$i = 1 \ (\alpha_1)$	$i = 2 \ (\beta_1)$
$a_{ik}^{(\tau)}$	$a_{i1}^{(\tau)}$	-0.0313422	0.0672877	-0.0334166	0.0727132
	$a_{i2}^{(\tau)}$	-0.0022309	0.0032047	-0.0014792	0.0020576
	$a_{i3}^{(\tau)}$	-0.0002644	0.0004270	-0.0000571	0.0001638
	$a_{i4}^{(\tau)}$	-0.0000915	0.0001478	-0.0000247	0.0000467
	$a_{i5}^{(\tau)}$	-0.0000501	0.0000799	-0.0000144	0.0000210
	$a_{i6}^{(\tau)}$	-0.0000105	0.0000171	-0.0000030	0.0000066
	$a_{i7}^{(\tau)}$	-0.0000108	0.0000183	-0.0000003	0.0000013
	$a_{i8}^{(\tau)}$	-0.0000105	0.0000173	0.0000007	-0.0000009
$b_{ik}^{(\tau)}$	$b_{i1}^{(\tau)}$	-0.0009428	0.0424885	-0.0126108	-0.0302448
	$b_{i2}^{(\tau)}$	0.0001087	0.0000923	-0.0009001	0.0008909
	$b_{i3}^{(\tau)}$	0.0001510	-0.0002080	-0.0002199	0.0003016
	$b_{i4}^{(\tau)}$	-0.0000008	-0.0000062	-0.0000414	0.0000450
	$b_{i5}^{(\tau)}$	0.0000161	-0.0000291	-0.0000159	0.0000198
	$b_{i6}^{(\tau)}$	0.0000083	-0.0000165	-0.0000102	0.0000111
	$b_{i7}^{(\tau)}$	-0.0000025	0.0000004	-0.0000064	0.0000060
	$b_{i8}^{(\tau)}$	0.0000087	-0.0000146	-0.0000033	0.0000032

Графічні залежності (від часу  $t$ ) кінематичних та динамічних характеристик побудованого субоптимального режиму руху маніпулятора зображено на рис. 2–9. Тут час  $t$  виражено в секундах (с), лінійні переміщення захвата (точки  $B$ )  $x$ ,  $y$  – в метрах (м), швидкості  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  – в м/с, кути  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  – в радіанах, моменти  $u_i$ ,  $p_i$  – в Н·м,  $i = 1, 2$ . Зазначимо, що проміжок часу  $t \in [0, 6]$  відповідає фазі транспортування вантажу,  $t \in [6, 9]$  – повернення маніпулятора (без вантажу) у початковий стан. У момент часу  $t = T_1$  кутові прискорення ланок маніпулятора та відповідно активні керування  $u_1$ ,  $u_2$  мають розриви першого роду.

На рис. 2–5 наведено графіки закону руху та швидкості захвата маніпулятора:  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  – проекція на вісь  $O_1X$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  – проекція на вісь  $O_1Y$ . На графіках бачимо, що побудований субоптимальний режим руху захвата маніпулятора задовольняє умови циклічної операції (4). При цьому рух захвата на кожній із фаз циклічної операції є безреверсним. На рис. 6 зображено графіки кутів координат ланок маніпулятора. Бачимо, що кутові характеристики задовольняють умови руху (3). Графіки відповідних активних моментів  $u_1$ ,  $u_2$  зображено на рис. 7, 8. Тут, а також на рис. 2–5 для порівняння наведено відповідні характеристики (пунктирними лініями), отримані при розв’язанні вищенаведеної задачі для чотириланкового маніпулятора без пасивних приводів. При цьому мінімальне значення цільової функції (7) становить  $E = 19.3$ . Аналіз свідчить, що введення в досліджувану маніпуляційну систему лінійних в’язкопружних пасивних приводів дозволяє суттєво зменшити (приблизно у 3 рази) порогові (максимальні за абсолютною величиною) значення керуючих зусиль активних приводів.

На рис. 9 зображено графіки моментів сил  $p_1$ ,  $p_2$ , що генеруються пасивними приводами.

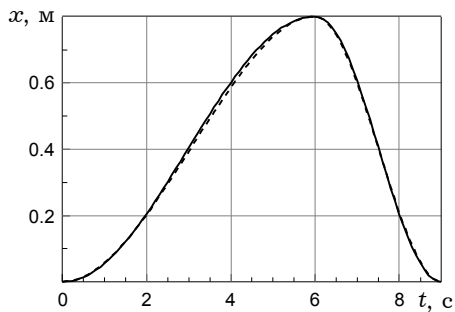


Рис. 2

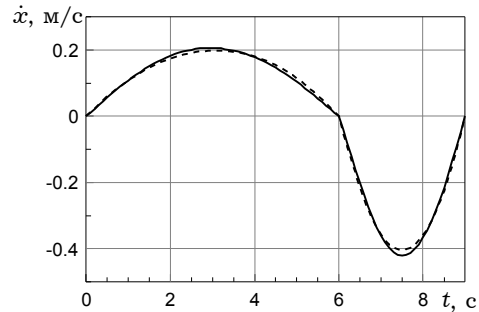


Рис. 3

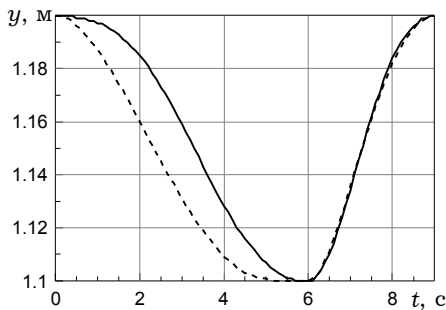


Рис. 4

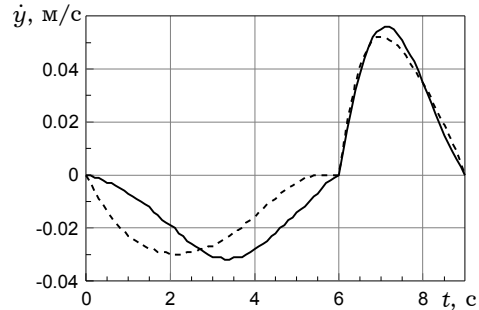


Рис. 5

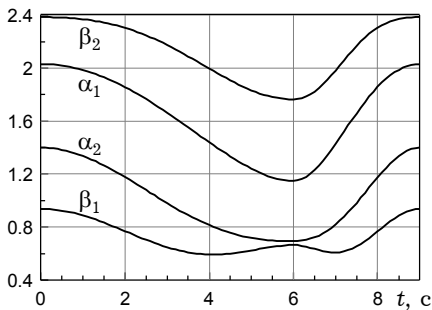


Рис. 6

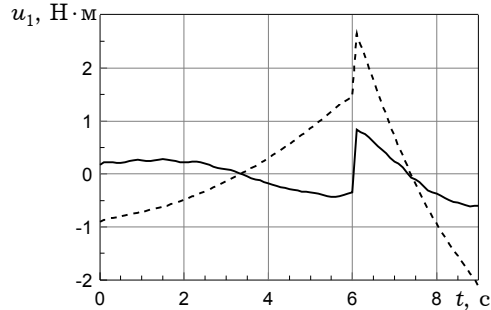


Рис. 7



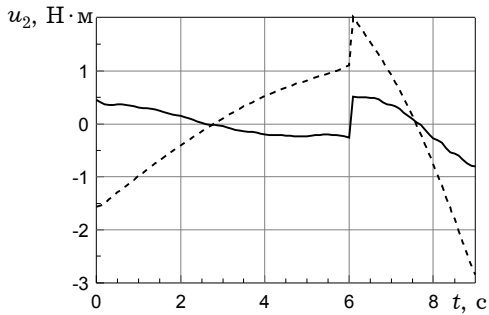


Рис. 8

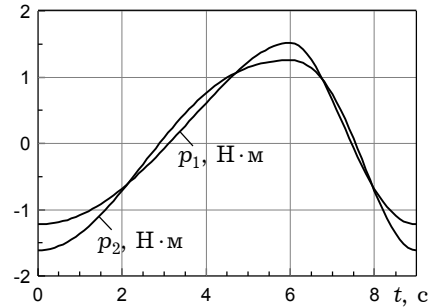


Рис. 9

**4. Висновки.** Для чотириланкового маніпулятора замкнутої кінематичної структури, який під дією активних і пасивних приводів виконує циклічні транспортні операції у горизонтальній площині, розроблено чисельно-аналітичний алгоритм і програму для розв'язання задачі сукупної оптимізації законів руху маніпулятора та конструкційних параметрів пасивних приводів з метою мінімізації квадратичного (за активними керуваннями) функціонала. Алгоритм ґрунтується на параметризації узагальнених координат механічної системи сім'єю заданих функцій (поліноми, тригонометричні ряди) та концепції обернених задач динаміки. Частину коефіцієнтів параметризації визначаємо із граничних умов транспортної операції маніпулятора, решту коефіцієнтів (разом із конструкційними параметрами пасивних приводів) знаходимо після розв'язання відповідної задачі параметричної оптимізації. Результати числових експериментів свідчать про ефективність розроблених алгоритму та програми, які дають можливість за допомогою сучасних комп'ютерів за відносно короткий час (~10 хв.) побудувати субоптимальний керований процес для досліджуваного маніпулятора.

Аналіз числових результатів свідчить, що введення лінійно в'язкопружного приводу в конструкцію чотириланкового замкнутого маніпулятора дозволяє суттєво (в окремих випадках у 3 рази) зменшити порогові значення активних приводів.

Перспективою подальших розробок може бути дослідження задачі сукупної оптимізації конструкційних параметрів (лінійні розміри ланок, довжина бази кріплення маніпулятора до основи, параметри пасивних приводів) та режимів циклічного руху чотириланкового маніпулятора.

1. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Синтез оптимального управління транспортними движениями манипуляционных роботов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 4. – С. 21–29.
2. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы. – Москва: Мир, 1982. – 583 с.
4. Бербюк В. Е., Бострём А. Е. Проблемы оптимизации управляемых многосвязных систем с пружинно-демпферными приводами // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 7. – С. 115–123.
5. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота // Вісн. Київ. ун-ту. Кібернетика. – 2002. – № 3. – С. 7–9.
6. Бербюк В. Е., Кудин М. І. Математичне моделювання субоптимального руху напівпасивно керованих механічних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 3. – С. 117–124.
7. Демидюк М. В., Литвин Б. А., Голуб Б. М. Параметрична оптимізація ходи двоногого робота // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 162–171.
8. Демидюк М. В., Ширко М. І. Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними й пасивними приводами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 2. – С. 183–190.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1970. – 720 с.

10. Красовский Н. Н. Теория управления движением. – Москва: Наука, 1968. – 476 с.
11. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы: В 2 т. – Москва: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.
12. Лурье А. И. Аналитическая механика. – Москва: Физматгиз, 1961. – 824 с.
13. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – Москва: Наука, 1989. – 386 с.
14. Chesse S., Bessonnet G. Optimal dynamics of constrained multibody systems. Application to bipedal walking synthesis // Proc. 2001-IEEE Int. conf. on Robotics & Automation. – 2001. – P. 2499–2505.
15. Lidberg M., Berbyuk V. Optimization of controlled motion of closed-loop chain manipulator robots with different degree and type of actuation // SACTA. – 2002. – 4, No. 2. – P. 56–73.
16. Nagurka M., Yen V. Fourier-based optimal control of nonlinear dynamic systems // Trans. ASME. J. Dynam. Systems, Meas. and Contr. – 1990. – 112, No. 3. – P. 19–26.
17. Nakamura Y., Ghodoussi M. Dynamic computation of closed-link robot mechanism with nonredundant and redundant actuators // IEEE. Trans. on Robotics & Automation. – 1989. – 5. – P. 294–302.
18. Zhang Y., Gruver W., Gao F. Dynamic simplification of three degree of freedom manipulators with closed chains // Robotics and Autonomous Systems. – 1999. – 28. – P. 261–269.

#### **ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО ЗАМКНУТОГО МАНИПУЛЯТОРА С АКТИВНЫМИ И ПАССИВНЫМИ ПРИВОДАМИ**

*Исследуется задача оптимизации законов движения и конструктивных параметров четырехзвенового манипулятора замкнутой кинематической структуры. Манипулятор под действием активных и пассивных (пружины, демпферы) приводов выполняет циклические транспортные операции в горизонтальной плоскости. В качестве критерия минимизации используется квадратический (по управляющим моментам сил) функционал. Разработан алгоритм построения субоптимального решения сформулированной задачи, который базируется на параметризации обобщенных координат манипулятора семейством заданных функций, использовании методики обратных задач динамики и численных процедур математического программирования.*

#### **PARAMETRIC OPTIMIZATION OF FOUR-LINK CLOSE-CHAIN MANIPULATOR WITH ACTIVE AND PASSIVE ACTUATORS**

*The problem on combined optimization of motion and design parameters of the four-link close-chain manipulator is investigated. Manipulator is performing the cyclic pick-and-place operations in horizontal plane under the action of active and passive actuators. Passive controls have been modeled as spring-damper-like actuators. The objective function is taken to be the quadratic functional (on the control torques in the joints). The algorithm of approximate solution of this problem using a parameterization of the generalized coordinates is developed. The algorithm is based on the methodology of inverse problems of dynamics and on the numerical procedures of programming methods.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
27.08.08