

## ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА РІВНИМИ СПІВВІСНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ЇХ ВЕРШИН

Досліджено задачу про визначення напружено-деформованого стану ізотропної пластини з двома рівними тріщинами при заданому однорідному полі зусиль на безмежності. Вважаємо, що береги тріщин вільні від навантаження, а біля їх вершин утворилися пластичні зони. За допомогою комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі розв'язок задачі шукається у класі функцій, обмежених у вершинах тріщин, і зведено до задач лінійного спряження. Отримано співвідношення для визначення величин пластичних зон і розкриття у вершинах тріщин. Проведено числовий аналіз задачі та побудовано графіки залежностей довжин пластичних зон і розкриття тріщин у їх вершинах від відстані між центрами тріщин.

**Вступ.** У багатьох галузях техніки використовуються пластинчасті елементи конструкцій, оскільки вони легкі та міцні. Тріщиноподібні дефекти впливають на їх експлуатаційні характеристики, тому широко вивчаються.

Аналіз літератури показує, що значну більшість результатів про напружений стан та граничну рівновагу пластин із тріщинами отримано в рамках теорії пружності. Але експериментальні дослідження [5, 7] свідчать, що біля вершин тріщини розвиваються пластичні деформації. Математичну модель, яка враховує наявність пластичних деформацій, так звану  $\delta_c$ -модель, уперше запропоновано в роботах [9, 13]. У праці [6] на основі такої моделі досліджено напружений стан пластини з двома тріщинами. Огляд результатів, отриманих за допомогою  $\delta_c$ -моделі для однорідних пластин із тріщинами, наведено в [11].

На основі модифікованої  $\delta_c$ -моделі тріщин розв'язана задача про граничний стан ортотропної пластини з періодичною системою колінеарних тріщин при двовісному навантаженні і досліджено вплив цього навантаження на розміри пластичних зон [3, 4]. Узагальнення відомої  $\delta_c$ -моделі з вимогою задоволення умов міцності в зоні передруйнування для ортотропних пластин наводяться в праці [8].

У цій роботі досліджується задача про двовісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами. Вважається, що береги тріщин вільні від навантаження, а в процесі деформування біля їх вершин утворилися вузькі пластичні зони. За допомогою методів теорії функцій комплексної змінної задачу зведено до задач лінійного спряження і, на відміну від праці [6], розв'язок шукається в класі функцій, обмежених у вершинах тріщини.

**Формулювання задачі.** Розглянемо однорідну ізотропну пластину з двома рівними співвісними тріщинами завдовжки  $2\ell_0$ , береги яких вільні від навантаження, а біля їх вершин наявні пластичні зони (рис. 1). Пластина знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності  $P$ ,  $q$ . Згідно з  $\delta_c$ -моделлю заміно пластичні зони поверхнями розриву пружних переміщень, а реакцію пластичної зони на

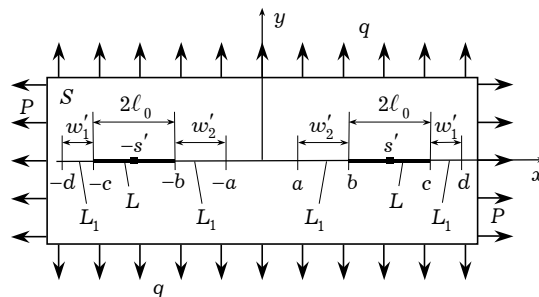


Рис. 1

пружний об'єм – нормальними напруженнями  $\sigma_0$ , які задовольняють певну умову пластичності.

Введемо декартову систему координат  $Oxy$  так, щоб тріщини були симетричні відносно початку координат і знаходилися на осі  $Ox$ . Області, де розміщені тріщини, позначимо через  $L$ , а їх пластичні зони – через  $L_1$ . Абсциси координат вершин правої тріщини позначимо через  $b$  і  $c$ , а пластичних зон біля неї – через  $a$  і  $d$  (див. рис. 1).

Згідно з постановкою задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_y^\pm = 0, \quad \tau_{xy}^\pm = 0 \quad \text{на} \quad L, \quad (1)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_0, \quad \tau_{xy}^\pm = 0 \quad \text{на} \quad L_1, \quad (2)$$

де  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень.

**Побудова розв'язку задачі.** Введемо в розгляд комплексні потенціали Колосова – Мухелішвілі  $\Phi(z)$  і  $\Psi(z)$  [10] та скористаємося залежностями

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \\ 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \alpha\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \alpha = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1,$$

$u$ ,  $v$  – проекції вектора переміщення на осі  $Ox$  і  $Oy$  відповідно;  $E$  – модуль пружності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Для функцій  $\Phi(z)$  і  $\Psi(z)$  при великих  $|z|$  мають місце асимптотичні розвинення

$$\Phi(z) = \Gamma + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Psi(z) = \Gamma' + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\text{де} \quad \Gamma = \frac{1}{4}(P + q), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(P - q).$$

Введемо [10] функцію

$$\Omega(z) = -\overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}. \quad (5)$$

Тоді залежності (3) набудуть вигляду

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (6)$$

$$2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \alpha\Phi(z) + \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \quad (7)$$

Враховуючи (4) і (5), функцію  $\Omega(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$  запишемо так:

$$\Omega(z) = -\Gamma - \bar{\Gamma}' + o\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (8)$$

Введемо функції

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) - \Omega(z), \quad \Phi_1(z) = \Phi(z) + \Omega(z) \quad (9)$$

і на підставі (6), (1), (2) отримаємо такі задачі лінійного спряження:

$$\Phi_0^+(x) + \Phi_0^-(x) = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ \sigma_0, & x \in L_1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = 0, \quad x \in L \cup L_1. \quad (11)$$

Зважаючи на (4), (8) для функцій  $\Phi_0(z)$ ,  $\Phi_1(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$  отримаємо такі подання:

$$\Phi_0(z) = q + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{2}(P - q) + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (11) з урахуванням (12) набуде вигляду

$$\Phi_1(z) = -\Gamma',$$

тоді для функції  $\Omega(z)$  згідно з (9) маємо

$$\Omega(z) = -\Gamma' - \Phi(z). \quad (13)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (10) запишемо як [10]

$$\Phi_0(z) = 2\sigma_0 \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)}, \quad X_0(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - d^2)}. \quad (14)$$

З огляду на (14), для функції  $\Phi_0(z)$  при великих  $|z|$  має місце розвинення

$$\Phi_0(z) = 2\sigma_0 \left( a_1 z + a_2 + \frac{a_3 - a_1(a^2 + d^2)/2}{z} + \dots \right), \quad (15)$$

де

$$a_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{X_0^+(t)}, \quad a_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t dt}{X_0^+(t)}, \quad a_3 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t^2 dt}{X_0^+(t)}. \quad (16)$$

На основі співвідношень (12) і (15) отримаємо

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{q}{2\sigma_0}, \quad a_3 = 0. \quad (17)$$

Беручи до уваги (16), перша і третя умови (17) задовольняються автоматично, а з другої одержимо перше співвідношення для визначення довжини пластичних зон

$$\frac{q\pi}{\sigma_0} = \arccos \frac{(d^2 + a^2 - 2b^2)(2c^2 - d^2 - a^2) - 4\sqrt{(b^2 - a^2)(d^2 - b^2)(d^2 - c^2)(c^2 - a^2)}}{(d^2 - a^2)^2}. \quad (18)$$

Позначимо

$$F(x) = \Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x). \quad (19)$$

Враховуючи (13), (7) і позначення (19), умова однозначності переміщень при обході контуру правої тріщини матиме вигляд

$$\int_a^d F(x) dx = 0, \quad (20)$$

де

$$F(x) = \begin{cases} \ln \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} + \ln \frac{x^2 - b^2}{c^2 - x^2} + 2 \ln \frac{n\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}}{m\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}}, & x \in [b, c], \\ \ln \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} + \ln \frac{b^2 - x^2}{c^2 - x^2} + 2 \ln \frac{n\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}}{m\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}}, & x \in [a, b] \cup [c, d], \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{де } n = \sqrt{\frac{d^2 - c^2}{c^2 - a^2}}, \quad m = \sqrt{\frac{d^2 - b^2}{b^2 - a^2}}.$$

Якщо (21) підставити у (20), то дістанемо друге співвідношення для визначення довжини пластичних зон:

$$\begin{aligned} d \ln \left( \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} \frac{d^2 - b^2}{d^2 - c^2} \right) + b \ln \left( \frac{b - a}{b + a} \frac{d + b}{d - b} \right) + c \ln \left( \frac{c + a}{c - a} \frac{d - c}{d + c} \right) + \\ + 2 \int_a^d \ln \frac{n\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}}{m\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}} dx = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Зауважимо, що (22) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} & \sqrt{(d^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \left( \mathbf{F}(\eta) + \frac{c^2}{d^2 - c^2} \mathbf{\Pi} \left( \frac{d^2 - a^2}{d^2 - c^2}, \eta \right) \right) = \\ & = \sqrt{(d^2 - b^2)(b^2 - a^2)} \left( \mathbf{F}(\eta) + \frac{b^2}{d^2 - b^2} \mathbf{\Pi} \left( \frac{d^2 - a^2}{d^2 - b^2}, \eta \right) \right), \end{aligned} \quad (23)$$

де  $\eta = \frac{\sqrt{d^2 - a^2}}{d}$ , а  $\mathbf{F}, \mathbf{\Pi}$  – повні еліптичні інтеграли першого та третього роду відповідно.

Рівняння (18) і (22), які використовують для знаходження довжини пластичних зон біля вершин тріщини, у частковому випадку, коли  $\sigma_0 = \sigma_T$  (де  $\sigma_T$  – границя текучості матеріалу) і  $s' \rightarrow \infty$ , співпадають з результатами монографії [12], отриманими іншим шляхом.

Розкриття тріщини  $\delta_b$  і  $\delta_c$  у вершинах  $b$  і  $c$  знайдемо за формулами

$$\begin{aligned} \delta_b &= \int_a^b \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^+ - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^- \right] dx = \frac{x+1}{4\mu} \operatorname{Im} \int_a^b F(x) dx, \\ \delta_c &= \frac{x+1}{4\mu} \operatorname{Im} \int_d^c F(x) dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Підставивши (21) у залежності (24), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\delta_b \mu}{\sigma_0} &= -\frac{x+1}{2\pi} \left( b \ln \frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2} \frac{4b^2}{(b+a)^2} + c \ln \frac{c-b}{c+b} \frac{c+a}{c-a} + \right. \\ & \left. + 2 \int_a^b \ln \frac{n\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}}{m\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}} dx \right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_c \mu}{\sigma_0} &= -\frac{x+1}{2\pi} \left[ c \ln \left( \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} \frac{c^2 - b^2}{4c^2} \frac{d+c}{d-c} \right) + d \ln \left( \frac{d^2 - c^2}{d^2 - b^2} \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2} \right) + \right. \\ & \left. + b \ln \left( \frac{c+b}{c-b} \frac{d-b}{d+b} \right) + 2 \int_c^d \ln \frac{n\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}}{m\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{d^2 - x^2}} dx \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Для знаходження компонент тензора напружень маємо формули

$$\begin{aligned} \sigma_y^\pm &= \operatorname{Re} [\Phi^+(x) + \Phi^-(x)], & \tau_{xy}^\pm &= \operatorname{Im} [\Phi^+(x) + \Phi^-(x)], \\ \sigma_x^+ &= \operatorname{Re} [3\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)] + P - q, \\ \sigma_x^- &= -\operatorname{Re} [\Phi_0^+(x) - 3\Phi_0^-(x)] + P - q. \end{aligned} \quad (27)$$

Спростивши формули (27), отримаємо такі вирази для компонент тензора напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_y^\pm &= \sigma_0, & \tau_{xy}^\pm &= 0, & \sigma_x^\pm &= \sigma_0 + P - q, & x &\in L_1, \\ \sigma_y^\pm &= 0, & \tau_{xy}^\pm &= 0, & \sigma_x^\pm &= P - q, & x &\in L. \end{aligned} \quad (28)$$

Беручи до уваги (28), для знаходження  $\sigma_0$  скористаємося різними умовами пластичності. Згідно з умовою пластичності Треска – Сен-Венана знаходимо  $\sigma_0 = \sigma_T$ , коли  $P < q$ , і  $\sigma_0 = \sigma_T - P + q$ , коли  $\sigma_0 < \sigma_T$ . Якщо скористатися умовою пластичності Мізеса, то одержимо рівняння

$$\sigma_0^2 + \sigma_0(P - q) + (P - q)^2 = \sigma_T^2.$$

Введемо безрозмірні величини  $s = \frac{s'}{\ell_0}$ ,  $w_1 = \frac{w_1'}{\ell_0}$ ,  $w_2 = \frac{w_2'}{\ell_0}$  (див. рис. 1).

Підставивши їх у співвідношення (18) і (22), отримаємо таку систему для визначення відносних довжин  $w_1, w_2$  пластичних зон:

$$\begin{aligned}
& \frac{((2+w_1)(2s+w_1)-w_2(2s-2-w_2))((2+w_2)(2s-w_2)-w_1(2s+2+w_1))}{((2+w_2+w_1)(2s+w_1-w_2))^2} - \\
& \frac{4\sqrt{w_2(2s-2-w_2)(2+w_2)(2s-w_2)w_1(2s+2+w_1)(2+w_1)(2s+w_1)}}{((2+w_2+w_1)(2s+w_1-w_2))^2} - \\
& - \cos\left(\frac{q\pi}{\sigma_0}\right) = 0, \\
& (s-1)\ln\frac{w_2(2s+w_1)}{(2s-2-w_2)(2+w_1)} + (s+1)\ln\frac{(2s-w_2)w_1}{(2+w_2)(2s+2+w_1)} + \\
& + (s+1+w_1)\ln\frac{(2+w_2)(2s-w_2)}{w_2(2s-2-w_2)}\frac{(2+w_1)(2s+w_1)}{w_1(2s+2+w_1)} + 2\int_{s-1-w_2}^{s+1+w_1} \ln k dx = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Співвідношення (25), (26) для знаходження розкриття тріщини  $\delta_c, \delta_b$  також запишемо у безрозмірних величинах  $s, w_1, w_2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_c \mu}{\sigma_0 \ell_0} &= -\frac{x+1}{2\pi} \left( (s-1)\ln\frac{s+w_1}{2s+w_1} + \right. \\
& + (s+1)\ln\frac{s(2+w_2)(2s-w_2)(2s+2+w_1)}{w_2(2s-2-w_2)(s+1)^2 w_1} + \\
& \left. + (s+1+w_1)\ln\frac{w_2(2s-2-w_2)}{(2+w_2)(2s-w_2)}\frac{w_1(2s+2+w_1)}{(2+w_1)(2s+w_1)} + 2\int_{s+1+w_1}^{s+1} \ln k dx \right), \\
\frac{\delta_b \mu}{\sigma_0 \ell_0} &= -\frac{x+1}{2\pi} \left( (s+1)\ln\frac{(2s+w_2)}{s(2+w_2)} + \right. \\
& \left. + (s-1)\ln\frac{(2+w_2)(2s-w_2)(s-1)^2}{(2s-2-w_2)^2 s} + 2\int_{s-1-w_2}^{s-1} \ln k dx \right).
\end{aligned} \tag{30}$$

У формулах (29), (30) позначено

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\sqrt{(s+1+w_1)^2 - x^2} + n_0 \sqrt{x^2 - (s-1-w_2)^2}}{\sqrt{(s+1+w_1)^2 - x^2} + m_0 \sqrt{x^2 - (s-1-w_2)^2}}, \\
n_0 &= \sqrt{\frac{w_1(2s+2+w_1)}{(2+w_2)(2s-w_2)}}, \quad m_0 = \sqrt{\frac{(2+w_1)(2s+w_1)}{w_2(2s-2-w_2)}}.
\end{aligned}$$

Отже, отримано усі співвідношення для дослідження напружено-деформованого стану ізотропної пластини з двома рівними тріщинами при заданому однорідному полі зусиль на безмежності.

**Числовий аналіз задачі та висновки.** Систему рівнянь (29) для знаходження відносних довжин пластичних зон  $w_1, w_2$  при  $q/\sigma_0 = 0.6$  і  $\nu = 0.3$  розв'язували чисельно за допомогою методу ітерацій [1, 2]. На рис. 2 наведено залежності  $w_1$  і  $w_2$  від відносної координати центра тріщини  $s = s'/\ell_0$ . Зауважимо, що при великих  $s$  приходимо до випадку, коли розглядається одновісний розтяг однорідної пластини з однією тріщиною завдовжки  $2\ell_0$  [12], при цьому має місце залежність

$$\frac{w'}{\ell_0} = w = \left( \cos\left(\frac{\pi q}{2\sigma_T}\right) \right)^{-1} - 1,$$

яку отримуємо із системи (29) при  $s \rightarrow \infty$ . Бачимо, що при віддаленні тріщин одна від одної величини їх пластичних зон зменшуються і прямують

до величини пластичної зони для однієї тріщини. Крім того, довжина внутрішньої пластичної зони є більшою, ніж зовнішньої, а при  $s < 2.16$  пластичні зони біля ближніх вершин тріщин зливаються.

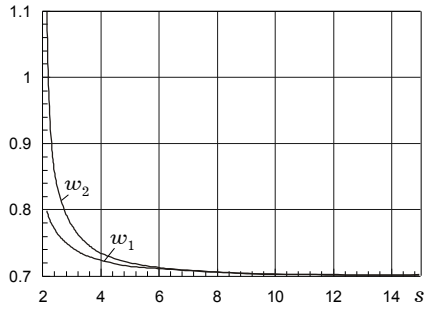


Рис. 2

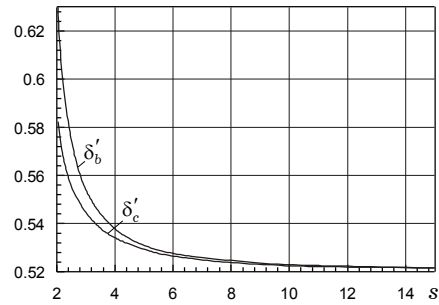


Рис. 3

За формулами (30) методом ітерацій при  $q/\sigma_0 = 0.6$  і  $\nu = 0.3$  обчислено розкриття тріщини. На рис. 3 показано залежності  $\delta'_k = \delta_k \mu / (\sigma_0 \ell_0)$ ,  $k = b, c$ , від  $s$ . Розкриття тріщини у вершині  $b$  є більшим, ніж у вершині  $c$ , і при великих  $s$  отримуємо розкриття берегів одинокої тріщини.

На рис. 4 зображено залежність відносної довжини пластичної зони  $w$  від безрозмірного розтягувального зусилля  $q/\sigma_0$  для таких значень віддалі центру тріщини від початку координат:  $s = 1.5, 2.5, 8.5$ . Суцільні криві відповідають довжині внутрішньої пластичної зони  $w_2$ , а штрихові – довжині зовнішньої пластичної зони  $w_1$ . Бачимо, що при збільшенні навантаження  $q$  довжини пластичних зон збільшуються. Крім того, при віддаленні тріщин одна від одної їх злиття (обривання кривих) відбувається при більшому навантаженні.

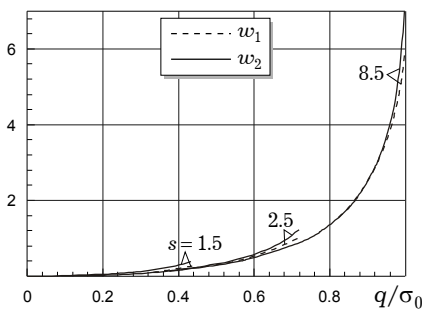


Рис. 4

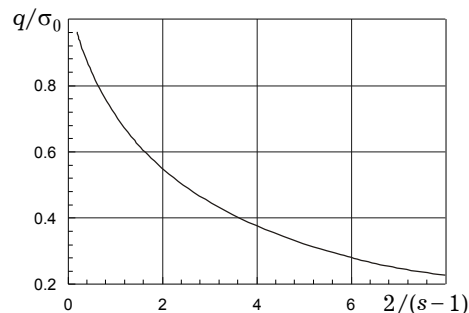


Рис. 5

На рис. 5 зображено криву залежності навантаження  $q/\sigma_0$  від відносної відстані між центрами тріщин за умови злиття внутрішніх пластичних зон. Цей результат співпадає з відповідними результатами праці [6], які отримані іншим шляхом у припущенні, що комплексні потенціали Колосова – Мухелішвілі необмежені на кінцях тріщини. Також співпадають відповідні залежності (після перетворень), що отримуються на основі співвідношень (18) і (22).

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – Москва: БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: В 2 т. – Москва: Физматгиз, 1959. – Т. 2. – 620 с.
3. Богданова О. С. О предельном состоянии ортотропной пластины с периодической системой коллинеарных трещин при двухосном нагружении // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 3. – С. 131–140.

4. Богданова О. С. О разрушении ортотропной пластины, ослабленной периодической системой коллинеарных трещин, при двухосном нагружении // Тез. доп. міжнар. наук.-тех. конф. пам'яті В. І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпропетровськ, 17–19 жовтня 2007). – Дніпропетровськ, 2007. – С. 33–35.
5. Вини Р. Г., Смит С. М. Экспериментальное исследование критерия разрушения при комбинированом растяжении и изгибе // Тр. Амер. общества инженеров-механиков. Сер. Д. – 1969. – № 4. – С. 280–288.
6. Витвицкий П. М. Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами // Концентрация напряжений. – Киев: Наук. думка, 1965. – Вып. 1. – С. 78–85.
7. Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения. (Обзор) // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.
8. Каминский А. А., Богданова О. С. Моделирование процесса разрушения ортотропных материалов при двухосном нагружении // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 10. – С. 81–87.
9. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механіка. – 1959. – 5, № 4. – С. 391–401.
10. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
11. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – 28, № 1. – С. 49–68.
12. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.
13. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – 8, No. 2. – P. 100–104.

#### **ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ РАВНЫМИ СООСНЫМИ ТРЕЩИНАМИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН ОКОЛО ИХ ВЕРШИН**

*Исследовано напружено-деформированное состояние изотропной пластины с двумя равными коллинеарными трещинами при заданном однородном поле усилий на бесконечности. Предполагается, что берега трещин свободны от нагрузжений, а около их вершин возникают пластические зоны. С использованием комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили решение задачи сведено к задачам линейного сопряжения, решение которых найдено в классе функций, ограниченных в вершинах трещин. Записаны зависимости для определения длины пластических зон и раскрытия берегов трещин в их вершинах, а также проведен их численный анализ и представлен в виде графиков.*

#### **TWO-AXIAL EXTENSION OF HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH TWO EQUAL COAXIAL CRACKS WITH REGARD FOR PLASTIC ZONES NEAR THEIR TIPS**

*The work considers the problem on definition the stress-strain state of isotropic plate with two equal cracks for given homogeneous field of efforts at infinity. We assume that the crack edges are load free and near their tips the plastic zones arise. Using the Kolosov – Muskhelishvily complex potentials the solution of the problem sought in the class of functions restricted at the crack tips is reduced to the problem of linear conjugation. The numerical analysis of the problem is made and graphic dependences for the plastic zones length and crack opening at their tips on the distance between the crack centers are constructed.*

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

<sup>2</sup> Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів