УДК 517.95

У. М. Федусь

ІДЕНТИФІКАЦІЯ КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПОХІДНІЙ ЗА ЧАСОМ У КВАЗІЛІНІЙНОМУ ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного квазілінійного параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом при похідній за часом для випадку крайових умов другого роду.

1. Вступ і формулювання задачі. У цій статті досліджується обернена задача визначення невідомого коефіцієнта при похідній за часом в одновимірному квазілінійному параболічному рівнянні для випадку крайових умов Неймана. Встановлено умови існування локального за часом класичного розв'язку задачі з класу неперервно диференційовних функцій та умови глобальної єдиності розв'язку в класі Гельдера.

Обернені задачі досліджували О. І. Прилєпко [6], М. В. Музильов [4, 5], М. І. Іванчов [2, 12], А. Лоренці [14–16], Дж. Кеннон [8–10], Б. Ф. Джонс [13], Н. Л. Гольдман [1] та інші, в роботах яких невідомими є, в основному, старший або молодший коефіцієнт або права частина параболічного рівняння. Серед невеликої кількості робіт, пов'язаних із ідентифікацією невідомих коефіцієнтів у квазілінійному параболічному рівнянні, можна відмітити роботи М. В. Музильова [4, 5], який встановив єдиність розв'язку задачі у випадку нелінійного рівняння

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + d(u)u_x, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < t < T,$$

з невідомими коефіцієнтами $c(u)$, $k(u)$, $d(u)$. Дослідженню питання стійкості розв'язку [14] для рівняння

$$u_t = b(t)c(u)u_{xx}, \qquad x > 0, \qquad 0 < t < T,$$

а також встановленню умов існування, єдиності та стійкості розв'язку оберненої задачі [16] у випадку рівняння

$$u_t = [v(u(x,t))u_x]_x + f(x,t), \qquad 0 < x < \ell, \qquad 0 < t < T,$$

з невідомими b та v відповідно присвячені роботи А. Лоренці.

В області $Q_T = (0,h) \times (0,T)$ розглянемо рівняння

$$c(t)u_t = a(x,t,u,u_x)u_{xx} + b(x,t,u,u_x) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $c(t) > 0$, $t \in [0,T]$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(h,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$u(0,t) = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Припустимо, що виконуються умови:

(A1) $a(x,t,u,v) \in C^{1,0,1,1}(\bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2)$, $\quad b(x,t,u,v) \in C^{1,0,1,1}(\bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2)$,
$\varphi(x) \in C^2[0,h]$, $\quad \mu_i(t) \in C^1[0,T]$, $\quad i = 1,2,3$;

(A2) $a(x,t,u,v)a_0 \ge 0$, $\quad (x,t,u,v) \in \bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2$;

(A3) $a(x,t,u,v) + |a_x(x,t,u,v)| + |a_u(x,t,u,v)| + |a_v(x,t,u,v)| \le a_1$,

$$|b(x,t,u,v)| + |b_x(x,t,u,v)| + |b_u(x,t,u,v)| + {}$$
$$+ |b_v(x,t,u,v)| \cdot |(1+|v|)| \le \nu_0(1+|v|)^2, \qquad (x,t,u,v) \in \bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2;$$

(A4) $\varphi''(x) > 0, \quad x \in [0,h], \quad b(0,t,\mu_3(t),\mu_1(t)) > 0, \quad \mu_3'(t) > 0, \quad t \in [0,T]$;

(A5) $\varphi'(0) = \mu_1(0), \qquad \varphi'(h) = \mu_2(0)$.

Тут a_1, ν_0 – додатні сталі.

Теорема 1. *При виконанні умов* **(A1)–(A5)** *можна вказати таке число* t_0, $0 < t_0 \le T$, *що розв'язок* $(c,u) \in C[0,t_0] \times C^{2,1}(\bar{Q}_{t_0})$, $c(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$, *задачі* (1)–(4) *існує.*

Теорема 2. *Нехай* a, a_u, a_v, b_u, b_v *– неперервні та задовольняють умову Гельдера за змінною* x *в* $\bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2$ *локально,*

$$\mu_3(t) \ne 0, \quad t \in [0,T], \qquad a(x,t,u,v) \ge a_0 > 0, \quad (x,t,u,v) \in \bar{Q}_T \times \mathbb{R}^2 .$$

Тоді розв'язок $(c,u) \in H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma}(\bar{Q}_T)$ *задачі* (1)–(4) *єдиний.*

2. Доведення існування розв'язку задачі. Для доведення **теореми 1** використаємо теорему Шаудера про нерухому точку компактного оператора. Для цього зведемо задачу (1)–(4) до системи рівнянь. Щоб отримати рівняння відносно $c(t)$, покладемо в рівнянні (1) $x = 0$:

$$c(t) = \frac{a(0,t,\mu_3(t),\mu_1(t))u_{xx}(0,t) + b(0,t,\mu_3(t),\mu_1(t))}{\mu_3'(t)} . \tag{5}$$

Зафіксуємо довільну точку $y \in [0,h]$ і подамо рівняння (1) у вигляді [11]

$$\begin{aligned} c(t)u_t &= a(y,t,u(y,t),u_y(y,t))u_{xx} + \big(a(x,t,u(x,t),u_x(x,t)) - \\ &\quad - a(y,t,u(y,t),u_y(y,t))u_{xx} + b(x,t,u,u_x) . \end{aligned} \tag{6}$$

У припущенні, що функція $c(t)$ є відомою, зводимо задачу (6), (2), (3) до нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^h \varphi(\xi)G_2(x,t,\xi,0;y)\,d\xi \,- \\ - \int_0^t \frac{a(y,\tau,u(y,\tau),u_y(y,\tau))}{c(\tau)}\mu_1(\tau)G_2(x,t,0,\tau;y)\,d\tau \,+ \\ + \int_0^t \frac{a(y,\tau,u(y,\tau),u_y(y,\tau))}{c(\tau)}\mu_2(\tau)G_2(x,t,h,\tau;y)\,d\tau \,+ \\ + \int_0^t\int_0^h \frac{b(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau))}{c(\tau)}G_2(x,t,\xi,\tau;y)\,d\xi\,d\tau \,+ \\ + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau)) - a(y,\tau,u(y,\tau),u_y(y,\tau))\big) \times \\ \times u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_2(x,t,\xi,\tau;y)\,d\xi , \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$\begin{aligned} G_i(x,t,\xi,\tau;y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}\right) + \right. \\ \left. + (-1)^i\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t,y)-\theta(\tau,y))}\right)\right), \qquad i = 1,2 , \end{aligned}$$

$$\theta(t,y) = \int_0^t \frac{a(y,\tau,u(y,\tau),u_y(y,\tau))}{c(\tau)}\,d\tau .$$

Зауважимо, що функції Ґріна $G_i(x,t,\xi,\tau;y)$ першої $(i = 1)$ та другої $(i = 2)$ крайових задач для рівняння

$$c(t)z_t = a(y,t,z(y,t),z_y(y,t))z_{xx},$$

залежать як від параметра y, так і від невідомих c, u, u_x, що містяться в функції $\theta(t,y)$. Для спрощення позначень залежність від останніх не писатимемо.

Обчислимо з рівняння (7) другу похідну u_{xx}, враховуючи рівності

$$G_{2xx}(x,t,\xi,\tau;y) = G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;y), \quad G_{2x}(x,t,\xi,\tau;y) = -G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau;y),$$

$$G_{2xx}(x,t,\xi,\tau;y) = -\frac{c(\tau)}{a(y,\tau,u(y,\tau),u_y(y,\tau))}G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau;y),$$

умови (**A1**) та інтегруючи частинами. Поклавши в отриманому виразі $y = x$, запишемо рівняння

$$u_{xx}(x,t) = \int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau;x)\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x,t,h,\tau;x)\,d\tau - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big[b_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau)) +$$
$$+ b_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau))u_\xi(\xi,\tau) + b_v(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau)) \times$$
$$\times u_{\xi\xi}(\xi,\tau)\big]G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big[a(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau)) -$$
$$- a(x,\tau,u(x,\tau),u_x(x,\tau))\big]u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi. \tag{8}$$

Оскільки

$$u(x,t) = \mu_3(t) + \int_0^x u_x(x,t)\,dx, \qquad u_x(x,t) = \mu_1(t) + \int_0^x u_{xx}(x,t)\,dx, \tag{9}$$

то, таким чином, задачу (1)–(4) зведено до системи рівнянь (5), (8) відносно невідомих c, u_{xx}.

Для того щоб застосувати теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, необхідно встановити оцінки зверху та знизу розв'язків системи (5), (8).

Якщо розглянути задачу

$$c(t)z_t = a(y,t,z(y,t),z_y(y,t))z_{xx}, \qquad (x,t) \in Q_T,$$

$$z(x,0) = 1, \quad x \in [0,h], \qquad z_x(0,t) = 0, \qquad z_x(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T],$$

то для будь-якого $y \in [0,h]$ при відомій $c(t)$ розв'язком цієї задачі буде

$$u(x,t) = \int_0^h G_2(x,t,\xi,0;y)\,d\xi = 1. \tag{10}$$

Звідси маємо

$$\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi \ge \min_{x\in[0,h]} \varphi''(x). \tag{11}$$

Серед доданків, що входять в u_{xx} у формулі (8), всі, крім першого, прямують до нуля при $t \to 0$. Тому існує такий проміжок $[0,T_0]$, $0 < T_0 \le T$, на якому буде виконуватись нерівність

$$\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi \ge \int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau;x)\,d\tau -$$
$$- \int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x,t,h,\tau;x)\,d\tau + \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big[b_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau)) +$$

$$+ b_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau))u_\xi(\xi,\tau) +$$
$$+ b_v(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau))u_{\xi\xi}(\xi,\tau)\big]G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi -$$
$$-\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big[a(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau)) -$$
$$- a(x,\tau,u(x,\tau),u_x(x,\tau))\big]u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi\,, \qquad (12)$$

звідки

$$u_{xx}(x,t) \ge 0, \qquad (x,t)\in \bar{Q}_{T_0}.$$

Отже, згідно з припущеннями **(A2)**, **(A4)** з рівняння (5) маємо

$$c(t) \ge A_0 > 0, \qquad t\in[0,T_0]\,, \qquad (13)$$

де константа A_0 залежить тільки від відомих величин. Звідси маємо оцінку

$$\theta(t,x) \le C_1, \qquad (x,t)\in \bar{Q}_{T_0}. \qquad (14)$$

Знайдемо оцінку другої похідної $w = u_{xx}$. З рівності (10) та оцінки [12]

$$G_2(x,t,\xi,\tau;x) \le C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}} \qquad (15)$$

маємо

$$\left|\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi - \int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau;x)\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x,t,h,\tau;x)d\tau\right| \le C_4 + C_5\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Нехай

$$v(x,t) = u_x(x,t), \quad V(t) = \max_{x\in[0,h]}|v(x,t)|, \quad W(t) = \max_{x\in[0,h]}|w(x,t)|.$$

З рівності (9) маємо

$$|v(x,t)| \le C_6 + C_7 W(t). \qquad (16)$$

На підставі нерівності

$$z^p\exp(-qz^2) \le C_{p,q} < \infty \quad \forall z\in[0,\infty), \quad p\ge 0, \quad q>0\,,$$

отримаємо

$$|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)| \le \frac{C_8}{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8(\theta(t,x)-\theta(\tau,x))}\right)\right).$$

Звідси з огляду на умови **(A3)** та оцінки (14), (16) отримаємо

$$\left|\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\big[b_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau)) + \right.$$
$$\left. + b_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + b_v(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))w(\xi,\tau)\big]d\xi\right| \le$$
$$\le C_9 + C_{10}\int_0^t \frac{W(\tau)+W^2(\tau)+W^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau.$$

Оскільки за теоремою Лагранжа

$$f(x)-f(y) = (x-y)\int_0^1 f'(z)\,\big|_{z=y+\alpha(x-y)}d\alpha\,,$$

то

$$\left|a(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))-a(x,\tau,u(x,\tau),v(x,\tau))\right|\le$$
$$\le(C_{11}+C_{12}V(t)+C_{13}W(\tau))|\xi-x|\le(C_{14}+C_{15}W(\tau))|\xi-x|,$$

де сталі C_{11}, C_{12}, C_{13} визначаються через відомі величини. Тоді, враховуючи оцінку [7]

$$\int_0^h|\xi-x|\left|G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\right|d\xi\le\frac{C_{16}}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}},$$

отримаємо

$$\left|\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\left[a(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_\xi(\xi,\tau))-a(x,\tau,u(x,\tau),u_x(x,\tau))\right]u_{\xi\xi}(\xi,\tau)\times\right.$$
$$\left.\times G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi\right|\le C_{17}\int_0^t\frac{W(\tau)+W^2(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau.$$

Підсумовуючи всі оцінки, з рівняння (8) приходимо до нерівності

$$W(t)\le C_{18}+C_{19}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}+$$
$$+C_{20}\int_0^t\frac{W(\tau)+W^2(\tau)+W^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau,\qquad t\in[0,T_0],$$

або, враховуючи нерівність (див. (5))

$$c(t)\le C_{21}+C_{22}W(t)\tag{17}$$

та оцінку (14), маємо

$$W(t)\le C_{23}+C_{24}\int_0^t\frac{W(\tau)(1+W(\tau)+W^2(\tau))}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\,d\tau,$$

де $\theta_0(t)=\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}$. Звідси, позначивши $W_1(t)=W(t)+\frac{1}{2}$, прийдемо до

$$W_1(t)\le C_{25}+C_{26}\int_0^t\frac{W_1^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\,d\tau,\qquad t\in[0,T_0].\tag{18}$$

Використовуючи нерівність

$$(a+b)^3\le4(a^3+b^3)\qquad\forall a,b\ge0,$$

і підносячи до кубу обидві частини нерівності (18), матимемо

$$W_1^3(t)\le C_{27}+C_{28}\left(\int_0^t\frac{W_1^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau\right)^3.\tag{19}$$

Застосувавши нерівність Гельдера, отримаємо

$$\left(\int_0^t\frac{W_1^3(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\,d\tau\right)^3\le\int_0^t\frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\,d\tau\left(\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\right)^2\le$$
$$\le C_{29}\int_0^t\frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\,d\tau.$$

Тоді з (19) прийдемо до

$$W_1^3(t)\le C_{27}+C_{30}\int_0^t\frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau.\tag{20}$$

Покладемо в (20) $t=\sigma$, домножимо на $\frac{1}{c(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ та проінтегруємо від 0 до t:

$$\int_0^t \frac{W_1^3(\sigma)}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}}\,d\sigma \le C_{27}\int_0^t \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}} +$$
$$+ C_{30}\int_0^t \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}}\int_0^\sigma \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau)}}\,d\tau\,.$$

Використовуючи рівність

$$\int_\tau^t \frac{d\sigma}{c(\sigma)\sqrt{(\theta_0(t)-\theta_0(\sigma))(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))}} = \pi$$

та оцінку $\theta_0(t)$ зверху, отримаємо

$$\int_0^t \frac{W_1^3(\sigma)}{c(\sigma)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}}\,d\sigma \le C_{31} + C_{32}\int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)}\,d\tau\,.$$

Отже, повертаючись до (18), запишемо

$$W_1(t) \le C_{33} + C_{34}\int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)}\,d\tau, \qquad t\in[0,T_0]\,.$$

Позначимо $W_2(t) = C_{33} + C_{34}\int_0^t \frac{W_1^9(\tau)}{c(\tau)}\,d\tau$. Тоді

$$W_2'(t) \le \frac{C_{34}W_2^9(t)}{c(t)}, \qquad t\in[0,T_0]\,.$$

Звідси приходимо до нерівності

$$\frac{1}{C_{33}^8} - \frac{1}{W_2^8(t)} \le C_{35}t$$

і для деякого T_1, $0 < T_1 < T_0 \le T$, де $1 - C_{33}^8 C_{35} T_1 > 0$, отримаємо оцінку

$$W(t) \le W_2(t) \le C_{36}, \qquad t\in[0,T_1]\,.$$

Тоді з (9), (16), (17) випливають оцінки

$$|u(x,t)| \le C_{37}, \quad |v(x,t)| \le C_{38}, \quad (x,t)\in \bar{Q}_{T_1}\,,$$
$$c(t) \le A_1 < \infty, \quad t\in[0,T_1]\,. \tag{21}$$

Зауважимо, що нерівність (див. (11), (12))

$$\int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau;x)\,d\tau - \int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x,t,h,\tau;x)\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big[b_\xi(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau)) + b_u(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))v(\xi,\tau) +$$
$$+ b_v(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))w(\xi,\tau)\big]G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi -$$
$$- \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big[a(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau)) - a(x,\tau,u(x,\tau),v(x,\tau))\big]\times$$
$$\times w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi \le \min_{x\in[0,h]}\varphi''(x)\,, \tag{22}$$

виконується на $[0,T_0]$ і, маючи оцінки c та w, число T_0 визначається лише через вихідні дані.

При відомих оцінках c, u, v, w з (8) маємо, що

$$w(x,t) \le C_{39} + C_{40}\sqrt{t} + C_{41}t, \qquad t\in[0,T_1]\,.$$

Запишемо систему (5), (8) в операторному вигляді

$$\omega = P\omega\,, \tag{23}$$

де $\omega = (c, w)$. У припущенні, що

$$C_{39} + C_{40}\sqrt{t} + C_{41} \le C_{36}, \qquad t \in [0, T_2], \qquad 0 < T_2 \le T,$$

внаслідок апріорних оцінок (13), (38) оператор P, який визначається правими частинами системи (5), (8), переводить в себе множину

$$N \equiv \{(c, w) \in C[0, t_0] \times C(\bar{Q}_{t_0}) : 0 < A_0 \le c(t) \le A_1,\ 0 \le w(x, t) \le C_{36}\}.$$

Тут $t_0 = \min\{T_1, T_2\}$.

Встановимо компактність інтегральних операторів, що входять в P. Зауважимо, що при відомих оцінках c, u, v, w, достатньо встановити компактність у випадку операторів

$$(P_1 c)(x, t) = \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; x)\, d\xi,$$

$$(P_2 c)(x, t) = \int_0^t \tilde{\mu}(\tau) G_2(x, t, 0, \tau; x)\, d\tau,$$

$$(P_3 c)(x, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \tilde{f}(\xi, \tau) G_{2\xi}(x, t, \xi, \tau; x)\, d\xi,$$

$$(P_4 c)(x, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h (\tilde{a}(\xi, \tau) - \tilde{a}(x, \tau)) w(\xi, \tau) G_{2\xi\xi}(x, t, \xi, \tau; x)\, d\xi$$

з довільними неперервними функціями $\tilde{\varphi}, \tilde{\mu}, \tilde{f}$, неперервно диференційовною функцією $\tilde{a}$ і $\theta(t, x) = \int_0^t \frac{a(x, \tau, u(x, \tau), v(x, \tau))}{c(\tau)}\, d\tau \equiv \int_0^t \frac{\tilde{a}(x, \tau)}{c(\tau)}\, d\tau$. Для доведення цього факту, згідно з теоремою Арцела − Асколі, достатньо встановити одностайну неперервність множин $P_i N$, $i = 1, \ldots, 4$. Нехай

$$\Delta_k \equiv |(P_k c)(x_2, t_2) - (P_k c)(x_1, t_1)|, \qquad k = 1, \ldots, 4,$$

з довільними $(x_i, t_i) \in \bar{Q}_T$, $(x_1, t_1) \ne (x_2, t_2)$.

Встановимо одностайну неперервність множини $P_1 N$. Для заданого $\varepsilon > 0$ розглянемо Δ_1. Очевидно, що

$$\Delta_1 \le |(P_1 c)(x_2, t_2) - (P_1 c)(x_1, t_2)| + \\ + |(P_1 c)(x_1, t_2) - (P_1 c)(x_1, t_1)| \equiv \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}.$$

З властивостей теплових потенціалів випливає існування такого t_{01}, $0 < t_{01} \le T$, що для довільної пари $(c, w) \in N$ виконується оцінка

$$\left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) G_2(x, t, \xi, 0; x)\, d\xi - \tilde{\varphi}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \qquad t \in [0, t_{01}], \qquad x \in [0, h].$$

Тоді, якщо $t_2 \le t_{01}$, отримаємо

$$\Delta_{1,1} \le \left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) G_2(x_2, t_2, \xi, 0; x_2)\, d\xi - \tilde{\varphi}(x_2) \right| + \\ + \left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi) G_2(x_1, t_2, \xi, 0; x_1)\, d\xi - \tilde{\varphi}(x_1) \right| + |\tilde{\varphi}(x_2) - \tilde{\varphi}(x_1)| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Тут використано означення рівномірної неперервності функції $\tilde{\varphi}(x)$ на проміжку $[0, h]$, тобто існує таке $\delta_1 > 0$, що при $|x_2 - x_1| < \delta_1$ маємо

$$|\tilde{\varphi}(x_2) - \tilde{\varphi}(x_1)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Тоді, якщо $t_1 \le t_{01}$, то за рахунок вибору t_{01} матимемо

$$\Delta_{1,2} \le |(P_1c)(x_1,t_2)| + |(P_1c)(x_1,t_1)| < \frac{2\varepsilon}{5}.$$

Отже, при $t_i \le t_{01}$, $i = 1,2$,

$$\Delta_1 < \varepsilon.$$

Нехай $t_{01} < t_1$, $t_{01} < t_2$ і для визначеності $t_1 < t_2$, $x_1 < x_2$. Розглянемо

$$\Delta_{1,1} = \left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi \int_{x_1}^{x_2} G_{2y}(y,t_2,\xi,0;y)\, dy \right| \le$$

$$\le \max_{x\in[0,h]} |\tilde{\varphi}(x)| \int_{x_1}^{x_2} dy \int_0^h |G_{2y}(y,t_2,\xi,0;y)|\, d\xi.$$

При $t_2 > t_{01}$ функція $G_{2y}(y,t_2,\xi,0;y)$ обмежена. Тоді

$$\Delta_{1,1} \le C_{42}(x_2 - x_1).$$

Звідси маємо існування такого $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2C_{42}}$, що при $x_2 - x_1 < \delta_2$, виконується $\Delta_{1,1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Аналогічно, існує $\delta_3 > 0$, що при $t_2 - t_1 < \delta_3$

$$\Delta_{1,2} = \left| \int_0^h \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi \int_{t_1}^{t_2} G_{2z}(x_1,z,\xi,0;x_1)\, dz \right| \le C_{43}(t_2 - t_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вибираючи $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\} > 0$ і підсумовуючи отримані результати при $x_2 - x_1 < \delta$, $t_2 - t_1 < \delta$, приходимо до $\Delta_1 < \varepsilon$.

Покажемо, що множина P_2N є одностайно неперервна. Для заданого $\varepsilon > 0$ розглянемо Δ_2. Враховуючи (15) та означення множини N, отримаємо

$$|(P_2c)(x,t)| \le C_{44}\sqrt{t} + C_{45}t.$$

Тому для вказаного ε існує таке t_{02}, що при $t_i \le t_{02}$, $i = 1,2$, для довільних $x \in [0,h]$ виконується

$$|(P_2c)(x,t_i)| < \frac{\varepsilon}{6}, \qquad i = 1,2,$$

звідки

$$\Delta_2 \le |(P_2c)(x_2,t_2)| + |(P_2c)(x_1,t_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x_1,x_2 \in [0,h].$$

Нехай для визначеності, $x_1 < x_2$, $t_1 < t_2 \le T$ і $t_{02} < t_1, t_2$. Аналогічно до випадку, наведеного в [12], встановлюємо, що $\Delta_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, що

$$\Delta_2 \le |(P_2c)(x_2,t_2) - (P_2c)(x_1,t_2)| +$$
$$+ |(P_2c)(x_1,t_2) - (P_2c)(x_1,t_1)| \equiv \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}.$$

Оцінимо $\Delta_{2,1}$:

$$\Delta_{2,1} \le$$

$$\le C_{46}\int_0^{t_2} \frac{\tilde{a}(x_2,\tau)}{c(\tau)} \left| \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2,x_2)-\theta(\tau,x_2)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_2+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_2)-\theta(\tau,x_2))}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2,x_1)-\theta(\tau,x_1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x_1+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(\tau,x_1))}\right) \right| d\tau.$$

Виконаємо заміну змінних $\theta(t_2,x_2)-\theta(\tau,x_2)=\sigma$. Функція $\theta(\tau,x_2)$ монотонно зростає для довільного фіксованого x_2, тому існує обернена до неї $\theta^{-1}(\sigma,x_2)$. Тоді $\tau=\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2)$ і $\theta(\tau,x_1)=\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)$, звідки

$$\Delta_{2,1}\le C_{47}\int_0^{\theta(t_2,x_2)}\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_2+2nh)^2}{4\sigma}\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)}}\times$$
$$\left.\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_1+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1))}\right)\right|d\sigma\le$$
$$\le C_{47}\int_0^{\frac{t_2a_1}{A_0}}\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_2+2nh)^2}{4\sigma}\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)}}\times$$
$$\left.\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_1+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1))}\right)\right|d\sigma,$$

де $a_1=\max\limits_{\bar{Q}_T}\tilde{a}(x,t)$. Скориставшись оцінкою цього інтеграла на малому проміжку при $t_2a_1/A_0\le t_{02}$, безпосередньо отримаємо $\Delta_{2,1}<\varepsilon/3$. Якщо ж $t_2a_1/A_0>t_{02}$, тоді

$$\Delta_{2,1}\le\frac{\varepsilon}{6}+C_{47}\int_{t_{02}}^{\frac{t_2a_1}{A_0}}\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_2+2nh)^2}{4\sigma}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_1+2nh)^2}{4\sigma}\right)\right|d\sigma+$$
$$+C_{47}\int_{t_{02}}^{\frac{t_2a_1}{A_0}}\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_1+2nh)^2}{4\sigma}\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)}}\times$$
$$\left.\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_1+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1))}\right)\right|d\sigma$$

або

$$\Delta_{2,1}\le\frac{\varepsilon}{6}+C_{47}\int_{t_{02}}^{\frac{t_2a_1}{A_0}}\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4\sigma}\right)\right)dx\right|d\sigma+$$
$$+C_{47}\int_{t_{02}}^{\frac{t_2a_1}{A_0}}d\sigma\left|\int_{\sigma}^{\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma),x_1)}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_2+2nh)^2}{4z}\right)\right)dz\right|.$$

При $z > t_{02}$, $\sigma > t_{02}$ маємо

$$\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x_2+2nh)^2}{4z}\right)\right)\right| +$$

$$+\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4\sigma}\right)\right)\right| \le C_{48}\,.$$

Оскільки $\lim\limits_{x_1\to x_2}\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)=\theta(t_2,x_2)-\sigma$, то для заданого ε існує таке $\delta_4>0$, що при $|x_1-x_2|<\delta_4$ і при неперервно диференційовній функції $\tilde{a}$ (див. **(A1)**) матимемо

$$\left|\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)-\sigma\right| < \frac{\varepsilon}{6C_{47}C_{48}}\,. \tag{23}$$

Отже, $\Delta_{2,1} < \frac{\varepsilon}{2}$, звідки, враховуючи оцінку для $\Delta_{2,2}$, випливає оцінка $\Delta_2 < \varepsilon$.

Встановимо одностайну неперервність множини P_3N. Для заданого $\varepsilon > 0$, $t_i \ge t_{03}$, $i = 1,2$, $t_1 < t_2$, $x_1 < x_2$ (для визначеності) розглянемо

$$\Delta_3 \le |(P_3c)(x_2,t_2)-(P_3c)(x_1,t_2)| +$$
$$+|(P_3c)(x_1,t_2)-(P_3c)(x_1,t_1)| \equiv \Delta_{3,1}+\Delta_{3,2}\,.$$

Спочатку оцінимо

$$\Delta_{3,1} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left|\int_0^{t_2}\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\tilde{f}(\xi,\tau)\left(\frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2,x_2)-\theta(\tau,x_2))^3}}\times\right.\right.$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left((x_2-\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_2)-\theta(\tau,x_2))}\right)-\right.$$
$$\left.-(x_2+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_2)-\theta(\tau,x_2))}\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2,x_1)-\theta(\tau,x_1))^3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left((x_1-\xi+2nh)\times\right.$$
$$\times\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(\tau,x_1))}\right)+$$
$$\left.\left.\left.+(x_1+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(\tau,x_1))}\right)\right)\right)d\xi\right|.$$

Зробимо заміну змінних $\theta(t_2,x_2)-\theta(\tau,x_2)=\sigma$, звідки $\tau=\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2)$ і, оцінивши отриманий інтеграл, прийдемо до

$$\Delta_{3,1} \le C_{49}\int_0^h d\xi\int_0^{\frac{a_1t_2}{A_0}}\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma^3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left((x_2-\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-(x_2+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\right)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\left(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)\right)^3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left((x_1-\xi+2nh)\times\right.$$
$$\times\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{4\left(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)\right)}\right)+$$

$$+(x_1+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2+\xi+2nh)^2}{4\big(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)\big)}\right)\Bigg)\Bigg|\,d\sigma.$$

Якщо $\frac{a_1 t_2}{A_0} > t_{03}$, то, використовуючи оцінку для малого $t \le t_{03}$, отримаємо

$$\Delta_{3,1} \le \frac{\varepsilon}{4} + C_{49}\int_0^h d\xi \int_{t_{03}}^{\frac{a_1t_2}{A_0}} \Bigg| \frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg((x_2-\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right) -$$

$$-(x_2+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\Bigg) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg((x_1-\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right) -$$

$$-(x_1+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\Bigg)\Bigg|\,d\sigma +$$

$$+C_{49}\int_0^h d\xi \int_{t_{03}}^{\frac{a_1t_2}{A_0}} \Bigg| \frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg((x_1-\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right) -$$

$$-(x_1+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\Bigg) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1))^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg((x_1-\xi+2nh)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1))}\right) - (x_1+\xi+$$

$$+2nh)\exp\left(-\frac{(x_2+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1))}\right)\Bigg)\Bigg|\,d\sigma =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4} + C_{49}\int_0^h d\xi \int_{t_{03}}^{\frac{a_1t_2}{A_0}} \Bigg| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial y}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg((y-\xi+2nh)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(y-\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right) - (y+\xi+2nh)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(y+\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)\Bigg)\Bigg)dy\,\Bigg|\,d\sigma + C_{49}\int_0^h d\xi\,\times$$

$$\times\int_{t_{03}}^{\frac{a_1t_2}{A_0}} \Bigg| \int_{\sigma}^{\theta(t_2,x_1)-\theta(\theta^{-1}(\theta(t_2,x_2)-\sigma,x_2),x_1)} \frac{\partial}{\partial z}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{z^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Bigg((x_1-\xi+2nh)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{4z}\right) - (x_1+\xi+2nh)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{4z}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg|\,d\sigma\,.$$

Звідси при $|x_2 - x_1| < \delta_5$, $\delta_5 > 0$, аналогічно до (23), випливає оцінка $\Delta_{3,1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Розглянемо

$$\Delta_{3,2} \le \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \tilde{f}(\xi,\tau) G_{2\xi}(x_1,t_2,\xi,\tau;x_1)\,d\xi \right| +$$

$$+ \left| \int_0^{t_1} \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h \tilde{f}(\xi,\tau)\big(G_{2\xi}(x_1,t_2,\xi,\tau;x_1) - G_{2\xi}(x_1,t_1,\xi,\tau;x_1)\big)\,d\xi \right| \equiv$$

$$\equiv \Delta_{3,2,1} + \Delta_{3,2,2}.$$

Використовуючи оцінку $G_{2\xi}$, матимемо

$$\Delta_{3,2,1} \le \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} \le C_{50}\sqrt{t_2 - t_1}\,.$$

Тоді існує таке $\delta_6 > 0$, що $\Delta_{3,2,1} < \frac{\varepsilon}{4}$ при $t_2 - t_1 < \delta_6$.

Зробивши заміну змінних $\theta(t_1,x_1) - \theta(\tau,x_1) = \sigma$ в $\Delta_{3,2,2}$, отримаємо

$$\Delta_{3,2,2} \le C_{51}\int_0^h d\xi \int_0^{\theta(t_1,x_1)} \left| \frac{1}{\sqrt{(\theta(t_2,x_1)-\theta(t_1,x_1)+\sigma)^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big((x_1 - \xi + 2nh) \times \right.$$

$$\times \exp\left(- \frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(t_1,x_1)+\sigma)} \right) - (x_1 + \xi + 2nh) \times$$

$$\times \exp\left(- \frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t_2,x_1)-\theta(t_1,x_1)+\sigma)} \right)\Big) - \frac{1}{\sqrt{\sigma^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big((x_1 - \xi +$$

$$+ 2nh)\exp\left(- \frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4\sigma} \right) - (x_1 + \xi + 2nh) \times$$

$$\left. \times \exp\left(- \frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4\sigma} \right)\Big) \right| d\sigma$$

або при $\frac{a_1 t_1}{A_0} > t_{03}$, враховуючи оцінку на малому проміжку $[0, t_{03}]$, прийдемо до

$$\Delta_{3,2,2} \le \frac{\varepsilon}{8} + C_{51}\int_0^h d\xi \int_{t_{03}}^{\frac{a_1 t_1}{A_0}} \left| \int_{\sigma}^{\theta(t_2,x_1)-\theta(t_1,x_1)+\sigma} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{z^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big((x_1 - \xi + 2nh) \times \right.\right.$$

$$\times \exp\left(- \frac{(x_1 - \xi + 2nh)^2}{4z} \right) - (x_1 + \xi + 2nh) \times$$

$$\left.\left. \times \exp\left(- \frac{(x_1 + \xi + 2nh)^2}{4z} \right)\Big)\right) dz \right| d\sigma.$$

Тоді існує $\delta_7 > 0$, що $\Delta_{3,2,2} < \frac{\varepsilon}{4}$ при $t_2 - t_1 < \delta_7$, а тому і $\Delta_{3,2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Вибираючи мінімальне з усіх δ_i, $i = 5,6,7$, і враховуючи встановлені оцінки, отримаємо $\Delta_3 < \varepsilon$, що й доводить одностайну неперервність множини $P_3 N$.

Оскільки $\tilde{a}(x,t)$ − неперервно диференційовна функція за x, то дослідження компактності оператора P_4 зводиться до встановлення компактності P_3.

У встановлених оцінках C_i, $i = 1,\dots,51$, та A_0, A_1 − відомі величини.

Отже, оператор P – цілком неперервний. Застосувавши теорему Шаудера, отримаємо існування розв'язку системи (5), (8), а, отже, й розв'язку вихідної задачі. ◊

3. **Доведення єдиності розв'язку задачі**. Доведення **теореми 2** проведемо від супротивного. Припустимо, що існують два розв'язки (c_1, u_1) і (c_2, u_2) з класу $H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_T)$ задачі (1)–(4). Нехай $c = c_1 - c_2$, $u = u_1 - u_2$. Запишемо задачу для (c, u):

$$
\begin{aligned}
c_1(t)u_{1t} - c_2(t)u_{2t} = {} & a(x,t,u_1(x,t),u_{1x}(x,t))u_{1xx}(x,t) - \\
& - a(x,t,u_1(x,t),u_{1x}(x,t))u_{2xx}(x,t) + \\
& + a(x,t,u_1(x,t),u_{1x}(x,t))u_{2xx}(x,t) - \\
& - a(x,t,u_2(x,t),u_{2x}(x,t))u_{2xx}(x,t) + \\
& + b(x,t,u_1(x,t),u_{1x}(x,t)) - b(x,t,u_2(x,t),u_{2x}(x,t)), \qquad (24)
\end{aligned}
$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,h], \qquad (25)$$

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \qquad (26)$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T]. \qquad (27)$$

Подамо рівняння (24) як

$$
\begin{aligned}
c_1(t)u_t = {} & a(x,t,u_1,u_{1x})u_{xx} + \big(a(x,t,u_1,u_{1x}) - a(x,t,u_2,u_{2x})\big)u_{2xx} + \\
& + b_0(x,t,u_1,u)u_x + b_1(x,t,u,u_{2x})u - c(t)u_{2t}.
\end{aligned}
$$

Оскільки u_1, u_2 – відомі функції від (x,t), то це рівняння можемо записати так:

$$c_1(t)u_t = a_1(x,t)u_{xx} + a_2(x,t)u_x + a_3(x,t)u - c(t)u_{2t}, \qquad (28)$$

де коефіцієнти a_i, $i = 1,2,3$, визначаються через a, a_u, a_v, b_u, b_v. За допомогою функції Ґріна $\tilde{G}_2(x,t,\xi,\tau)$ для однорідного рівняння (28) запишемо розв'язок задачі (28), (26), (27):

$$u(x,t) = -\int_0^t \frac{c(\tau)}{c_1(\tau)}\,d\tau \int_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)\tilde{G}_2(x,t,\xi,\tau)\,d\xi.$$

Поклавши в рівнянні (28) $x = 0$, отримаємо рівняння стосовно функції $c(t)$:

$$c(t)\mu_3'(t) - a_1(0,t)u_{xx}(0,t) = 0$$

або

$$c(t)\mu_3'(t) + a_1(0,t)\int_0^t \frac{c(\tau)}{c_1(\tau)}\,d\tau \int_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)\tilde{G}_{2xx}(0,t,\xi,\tau)\,d\xi = 0. \qquad (29)$$

Згідно з припущеннями теореми, рівняння (29) – однорідне рівняння Вольтерра другого роду з ядром, яке має інтегровну [3] особливість

$$|K(t,\tau)| \frac{C_1}{(t-\tau)^{1-\gamma/2}}.$$

Тут C_1 – деяка додатна стала. Оскільки рівняння (29) має єдиний розв'язок $c(t) \equiv 0$ на $[0,T]$, то, повертаючись до задачі (28), (25), (26), отримаємо $u(x,t) \equiv$ $\equiv 0$. Тобто $c_1(t) = c_2(t)$ і $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, що й доводить єдиність розв'язку задачі. ◊

1. *Гольдман Н. Л.* Об одном классе обратных задач для квазилинейного параболического уравнения с локальным условием переопределения // Вычисл. методы и программирование. – 2005. – **6**. – С. 128–145.
2. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 3. – С. 539–550.

3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Музылев Н. В.* О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1985. – **25**, № 9. – С. 1346–1352.
5. *Музылев Н. В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1980. – **20**, № 2. – С. 388–400.
6. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 5. – С. 147–162.
7. *Федусь У. М.* Обернена задача для параболічного рівняння загального вигляду з невідомим коефіцієнтом теплоємності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 4. – С. 40–48.
8. *Cannon J. R., Lin Y.* An inverse problem of finding a parameter in a semilinear heat equation // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – No. 145. – P. 470–484.
9. *Cannon J. R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in a Hölder class for some semilinear parabolic equations // Inverse Problems. – 1988. – No. 4. – P. 596–605.
10. *Cannon J. R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations // Inverse Problems. – 1988. – No. 4. – P. 35–45.
11. *Ivanchov M. I.* Free boundary problem for nonlinear diffusion equation // Мат. студії. – 2003. – **19**. № 2. – С. 156–164.
12. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)
13. *Jones B. F.* Various methods for finding unknown coefficient in parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – **16**. – P. 33–34.
14. *Lorenzi A.* Determination of a time-dependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation // Ricerche Mat. – 1983. – **32**, No. 2. – P. 263–284.
15. *Lorenzi A.* Identification of the thermal conductivity in the nonlinear heat equation // Inverse Problems. – 1987. – No. 3. – P. 437–451.
16. *Lorenzi A., Lunardi A.* An identification problem in the theory of heat conduction // Differential and integral equations. – 1990. – **3**, No. 5. – P. 237–252.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи для одномерного квазилинейного параболического уравнения общего вида с неизвестным коэффициентом при производной по времени и краевых условий второго рода.

IDENTIFICATION OF COEFFICIENT OF DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME VARIABLE IN QUASI-LINEAR PARABOLIC EQUATION

We establish conditions for existence and uniqueness of solution of the inverse problem for one-dimensional quasi-linear parabolic equation with unknown coefficient of the derivative with respect to time variable and boundary condition of the second kind.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
04.01.08