УДК 517.95

Н. П. Процах

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Розглянуто змішану задачу для нелінійного виродженого ультрапараболічного рівняння другого порядку. Досліджено існування узагальнених розв'язків цієї задачі в обмеженій області, а також слабких розв'язків (у сенсі границі послідовностей) задачі без початкових умов для цього рівняння.

1. Вступ. У цій праці розглянуто змішані задачі для ультрапараболічного рівняння другого порядку, яке містить виродження. Знайдено умови, за яких існує розв'язок змішаної задачі для цього рівняння та умови слабкої розв'язності задачі без початкових умов для вказаного рівняння. Поняття сильного та слабкого розв'язку задачі без початкових умов введено подібно, як у праці [17], яка стосується гіперболічних операторів.

Зауважимо, що задачі для рівнянь ультрапараболічного типу виникають при ймовірнісному описуванні процесів дифузії з інерцією, в економіці, фінансах тощо [3, 15, 16, 18]. Питання про розв'язність задачі Коші та побудову фундаментальної системи розв'язків для ультрапараболічних рівнянь розглядались у [3–6, 15, 16, 18–20], а розв'язність змішаних задач і задач без початкових умов – у [1, 8, 9, 12–14, 21]. На відміну від праць [1, 8, 9], де досліджено існування та єдиність розв'язків крайових задач для рівнянь з монотонною головною частиною, у цій праці досліджено існування розв'язків рівняння з оператором в головній частині, який не є монотонним.

2. Задача з початковою умовою. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$; $y_0 < +\infty$, $D = \Omega \times (0, y_0)$, $G = (0, y_0) \times (0, T)$; $Q_T = D \times (-\infty, T)$, $Q_{0,T} = D \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; $Q_{0,\tau} = D \times (0, \tau)$, $\tau \in (0,T]$, $D_\tau = Q_{0,T} \cap \{t = \tau\}$; $\partial\Omega \subset C^2$, $\Sigma_{0,T} = \partial\Omega \times (0, y_0) \times (0,T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, y_0) \times (-\infty, T)$.

В області $Q_{0,T}$ розглянемо змішану задачу

$$u_t - \lambda(x,y,t) u_y - \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,y,t) |u|^{p-2} u_{x_i}\big)_{x_i} = f(x,y,t), \tag{1}$$

$$u(x, y_0, t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \qquad u\big|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y). \tag{3}$$

Стосовно коефіцієнтів $a_i(x,y,t)$, $i = 1,\ldots,n$, та $\lambda(x,y,t)$ рівняння (1) припускатимемо виконання умов:

(A) $a_i \in L^\infty(Q_T)$, $a_i(x,y,t) \ge a_0 > 0$ майже для всіх $(x,y,t) \in Q_T$, $i = 1,\ldots,n$;

(L) $\lambda \in C(\bar{Q}_T)$, $\lambda_y \in L^\infty(Q_T)$ майже для всіх $(x,y,t) \in Q_T$;

(P) $2 < p < +\infty$.

Будемо розглядати такі простори:

$$W_1(Q_{0,T}) = \big\{ v(x,y,t) : v \in L^2(Q_{0,T}),\ v, v_{x_i} \in L^p(Q_{0,T}),\ i = 1,\ldots,n,\ v\big|_{\Sigma_{0,T}} = 0 \big\},$$

$$W(Q_{0,T}) = \big\{ v(x,y,t) : v \in L^p(Q_{0,T}),\ v_y \in L^2(Q_{0,T}), |v|^{(p-2)/2} v \in L^2\big(0,T; H^1(D)\big),$$
$$v\big|_{\Sigma_{0,T}} = 0,\ v(x,y_0,t) = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0,T) \big\},$$

$$V_1(Q_{0,T}) = L^p\big(G; H_0^r(\Omega)\big), \qquad r = \left(\frac{p-2}{2}\right)\frac{n}{p} + 2.$$

Твердження. *Нехай* $S = \{v : |v|^{(p-2)/2}\, v \in H^1(D),\ v\big|_{\Sigma_{0,T}} = 0,\ v(x, y_0, t) = 0,$ $(x,t) \in \Omega \times (0,T)\}$ *і функція* $M(v) = \left(\int\limits_D \sum\limits_{i=1}^{n} |v|^{p-2} (v_{x_i})^2 \, dx\, dy \right)^{1/p}$.

Тоді:

(***i***) *функція* $M(v) \ge 0$ *на* S *і* $M(\lambda v) = |\lambda| M(v)$ *для довільного числа* $\lambda \in \mathbb{R}^1$;

(***ii***) *виконуються вкладення* $S \subset L^s(D)$, *де* $2 < s \le p$;

(***iii***) *множина* $\{v : v \in S,\ M(v) \le 1\}$ *відносно компактна в* $L^s(D)$.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що $M(v) \ge 0$ і

$$M(\lambda v) = \left(|\lambda|^p \int\limits_D \sum_{i=1}^{n} |v|^{p-2} (v_{x_i})^2 \, dx\, dy \right)^{1/p} = |\lambda|\, M(v).$$

Покладемо $\beta(v) = |v|^{(p-2)/2}\, v$. Нехай $\{v_m\}_{m=1}^{\infty} \in S$. Тоді $\beta(v_m)$ обмежена в $\{v : v \in H^1(D),\ v\big|_{\Sigma_{0,T}} = 0,\ v(x, y_0, t) = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0,T)\} \overset{\text{def}}{\equiv} W_2(D)$. Простір $W_2(D) \subset L^q(D)$ при $q \le \dfrac{2(n+1)}{n-1}$ (або q – довільне скінченне число при $n = 1$). Звідси отримуємо, що

$$\left(\int\limits_D \left(|v_m|^{(p-2)/2}\, v_m\right)^q dx\, dy \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int\limits_D |v_m|^{pq/2} \, dx\, dy \right)^{1/q} = \left(\int\limits_D |v_m|^{pq/2} \, dx\, dy \right)^{(2/pq)\cdot(p/2)} < \infty .$$

Тому $v_m \in L^{pq/2}(D)$ і, крім того, $v_m \to v$ слабко в $L^{pq/2}(D)$. Оскільки вкладення $W_2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ є компактним, $\beta(v) \in S$, то за теоремою 5.1 [11, с. 70] $\beta(v_m) \to \chi$ сильно в $L^2(D)$ і майже всюди. Оскільки $\lambda \to \beta(\lambda)$ – монотонне, то $v_m \to \beta^{-1}(\chi)$ майже всюди, а, отже, і в $L^{pq/2}(D)$. Тому $\beta^{-1}(\chi) = v$. Отже, $v_m \to v$ слабко в $L^{pq/2}(D)$ і майже всюди.

Згідно з теоремою Єгорова для всіх $\varepsilon > 0$ існує така множина $E \subset D$, що $\operatorname{mes} E < \varepsilon$ і збіжність $v_m \to v$ рівномірна в $D \setminus E$. Тоді для $2 < s < pq/2$

$$\int\limits_D |v_m - v|^s \, dx\, dy = \int\limits_E |v_m - v|^s \, dx\, dy + \int\limits_{D\setminus E} |v_m - v|^s \, dx\, dy . \tag{4}$$

Оскільки

$$\int\limits_E |v_m - v|^s \, dx\, dy \le \left(\int\limits_E |v_m - v|^{pq/2} \, dx\, dy \right)^{2s/(pq)} \cdot \varepsilon^{1-\theta},$$

де $\theta = \dfrac{2s}{pq}$, то з (4) випливає, що $\int\limits_D |v_m - v|^s \, dx\, dy < \varepsilon$. Тому $v_m \to v$ сильно в $L^s(D)$, де $s < \dfrac{pq}{2}$. Виберемо $s \le p$. Тоді твердження доведено. ◊

Зауваження. На підставі твердження 1 отримуємо, що виконуються всі умови теореми 12.1 з [11] про заміну простору.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком* задачі (1)–(3) назвемо функцію $u \in W(Q_{0,T})$, $u_t \in V_1^*(Q_{0,T})$, яка для довільної функції $v \in W_1(Q_{0,T})$ задовольняє рівність

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle dt + \int_{Q_{0,T}} \Big[-\lambda(x,y,t) u_y v +$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t)|u|^{p-2} u_{x_i} v_{x_i} - f(x,y,t) v \Big] dx\,dy\,dt = 0 \qquad (5)$$

і початкову умову (3). Тут $\langle \cdot,\cdot \rangle$ − скалярний добуток в $V_1^*(Q_{0,T})$.

Доведемо існування узагальненого розв'язку задачі (1)−(3).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A), (L), (P)**, *крім того,* $f, f_y \in L^2(Q_{0,T})$, $a_{iy} \in L^2(Q_{0,T})$, $u_0, u_{0y} \in L^2(D)$, $f(x,y_0,t) = 0$ *для* $(x,t) \in \Omega\times(0,T)$.

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)−(3).

Д о в е д е н н я. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ − ортогональна база простору $H_0^r(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, де φ^k − власні функції задачі $(\varphi^k, v)_{H_0^r(\Omega)} = \nu_k(\varphi^k, v)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, які відповідають власним значенням ν_k, і такі, що з включення $\varphi^k \in H_0^r(\Omega)$ випливає, що $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega)$. Для того щоб це вкладення виконувалося, можна вибрати $r = \left(\dfrac{p-2}{2}\right)\dfrac{n}{p} + 2$. Тоді $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} \in H_0^{((p-2)/2)(n/p)}(\Omega)$. Нехай $\psi^m = \cos\dfrac{(2s-1)\pi}{2y_0} y$, $m \ge 1$, $\Delta_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Позначимо $\{\varphi^{k,m}\}_{k,m=1}^\infty = \{\varphi^k(x)\psi^m(y)\}_{k,m=1}^\infty$. Очевидно, що, оскільки $\varphi^{k,m} \in L^p(0,y_0; H_0^r(\Omega))$, то $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(0,y_0; L^p(\Omega))$.

Розглянемо функції $u^N(x,y,t) = \sum_{k,s=1}^N c_{ks}^N(t)\varphi^{k,s}(x,y)$, $N = 1,2,\ldots$, де $c_{ks}^N(t)$ є розв'язком задачі

$$\int_{D_\tau} \Big[u_t^N \varphi^{k,s} - \lambda(x,y,t) u_y^N \varphi^{k,s} + \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t)|u^N|^{p-2} u_{x_i}^N \varphi_{x_i}^{k,s} \Big] dx\,dy =$$

$$= \int_{D_\tau} f(x,y,t)\varphi^{k,s} dx\,dy, \qquad (6)$$

$$c_{ks}^N(0) = u_{0ks}^N, \qquad k,s \in \{1,\ldots,N\}, \qquad (7)$$

$$u_0^N(x,y) = \sum_{k,s=1}^N u_{0ks}^N \varphi^{k,s}(x,y), \qquad \lim_{N\to\infty} \| u_0 - u_0^N \|_{W(D)} = 0.$$

За теоремою Каратеодорі [7, с. 54] існує абсолютно неперервний на $[0,\tau_0]$, $\tau_0 < T$, розв'язок задачі (6), (7). З оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що $\tau_0 = T$. Введемо позначення

$$\lambda^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_{0,T}} |\lambda_y(x,y,t)|, \qquad a^1 = \max_i \operatorname*{ess\,sup}_{Q_{0,T}} |a_{iy}(x,y,t)|.$$

Домножимо (6) на $c_{ks}^N(t)e^{-\alpha t}$, де стала $\alpha = \lambda^1 + 2$, підсумуємо за s і k, проінтегруємо за t по проміжку $[0,\tau]$:

$$\int_{Q_{0,\tau}} \Big[u_t^N u^N - \lambda(x,y,t) u_y^N u^N + \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t)|u^N|^{p-2}(u_{x_i}^N)^2 -$$

$$- f(x,y,t) u^N \Big] e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt = 0. \qquad (8)$$

Перетворимо та оцінимо кожний доданок отриманої рівності:

$$I_1 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} u_t^N u^N e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} (u^N)^2 e^{-\alpha\tau} dx\,dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{D_0} (u_0^N)^2 dx\,dy + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^N)^2 e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt\,,$$

$$I_2 \equiv -\int\limits_{Q_{0,\tau}} \lambda(x,y,t) u_y^N u^N e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)\left|u^N\right|^2 e^{-\alpha t} dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} \lambda_y(x,y,t)\left|u^N\right|^2 e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt\,,$$

$$I_3 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t)\left|u^N\right|^{p-2}\left|u_{x_i}^N\right|^2 e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt \geq$$

$$\geq \frac{4a_0}{p^2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n \left(\left(\left|u^N\right|^{(p-2)/2} u^N\right)_{x_i}\right)^2 e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt\,,$$

$$I_4 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} f(x,y,t) u^N e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt \leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\left|f(x,y,t)\right|^2 + \left|u^N\right|^2\right] e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt\,.$$

Звідси та з (8) одержимо нерівність

$$\int\limits_{D_\tau} (u^N)^2 e^{-\alpha\tau} dx\,dy + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(u^N)^2 e^{-\alpha t} dx\,dt +$$

$$+\frac{2a_0}{p^2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n \left(\left(\left|u^N\right|^{(p-2)/2} u^N\right)_{x_i}\right)^2 e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[|f|^2 + (\lambda^1 + 1 - \alpha)(u^N)^2\right] e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt + \int\limits_{D_0} (u_0^N)^2 dx\,dy\,. \quad (9)$$

Врахуємо вибір α. Тоді з (9) випливає оцінка

$$\int\limits_{D_\tau} (u^N)^2 e^{-\alpha\tau} dx\,dy + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(u^N)^2 e^{-\alpha t} dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^n \left(\left(\left|u^N\right|^{(p-2)/2} u^N\right)_{x_i}\right)^2 + \left|u^N\right|^2\right] e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt \leq$$

$$\leq M_1\left[\int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^2\, dx\,dy\,dt + \int\limits_{D_0} (u_0)^2 dx\,dy\right], \qquad \tau \in (0,T]\,, \quad (10)$$

у якій стала M_1 не залежить від N.

Оскільки $\left(\cos\frac{(2m-1)\pi}{2y_0}y\right)_{yy} = -\,\omega_m \cos\frac{(2m-1)\pi}{2y_0}y$, де $\omega_m = \left(\frac{(2m-1)\pi}{2y_0}y\right)^2$, то домножимо (6) на $c_{k,m}^N(t)\omega_m$, підсумуємо за s, m, проінтегруємо за t від 0 до τ та замінимо значення $\sum\limits_{k,m=1}^N c_{k,m}^N(t)\omega_m \varphi^{k,m}(x,y)$ з попереднього виразу на $-u_{yy}^N$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left[-u_t^N u_{yy}^N+\lambda(x,y,t)u_y^N u_{yy}^N+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)\left|u^N\right|^{p-2}u_{x_i}^N u_{x_i yy}^N\right]e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt=$$

$$=-\int\limits_{Q_{0,\tau}}f(x,y,t)u_{yy}^N e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\,. \qquad (11)$$

Перетворимо та оцінимо кожний з доданків цієї рівності окремо:

$$I_5\equiv-\int\limits_{Q_{0,\tau}}u_t^N u_{yy}^N e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}(u_y^N)^2e^{-\alpha\tau}dx\,dy-\frac{1}{2}\int\limits_{D_0}(u_{0y}^N)^2dx\,dy+$$

$$+\frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}(u_y^N)^2e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\,,$$

$$I_6\equiv\int\limits_{Q_{0,\tau}}\lambda(x,y,t)u_y^N u_{yy}^N e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,t)(u_y^N)^2e^{-\alpha t}dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\lambda_y(x,y,t)(u_y^N)^2e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\,,$$

$$I_7\equiv-\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)\left|u^N\right|^{p-2}u_{x_i}^N u_{x_i yy}^N e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,y,t))_y\left|u^N\right|^{p-2}u_{x_i}^N u_{x_i y}^N+\right.$$

$$\left.+(p-1)\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y,t)\left|u^N\right|^{p-2}(u_{x_i y}^N)^2\right]e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\geq$$

$$\geq\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left[\left(a_0(p-1)-\frac{a^1\delta}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left|u^N\right|^{p-2}(u_{x_i y}^N)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{a^1}{2\delta}\sum_{i=1}^{n}\left|u^N\right|^{p-2}(u_{x_i}^N)^2\right]e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\,,$$

$$I_8\equiv\int\limits_{Q_{0,\tau}}f(x,y,t)u_{yy}^N e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\geq-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left[\left|u_y^N\right|^2+\left|f_y(x,y,t)\right|^2\right]e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\,.$$

З рівності (11) на підставі оцінок інтегралів I_5-I_8 отримаємо нерівність

$$\int\limits_{D_\tau}(u_y^N)^2e^{-\alpha\tau}dx\,dy+\int\limits_{Q_{0,\tau}}(2a_0(p-1)-a^1\delta)\sum_{i=1}^{n}\left|u^N\right|^{p-2}(u_{x_i y}^N)^2e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\leq$$

$$\leq\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left(\left|f_y\right|^2+(\lambda^1+1-\alpha)(u_y^N)^2\right)e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt+$$

$$+\int\limits_{D_0}(u_{0y}^N)^2dx\,dy+\frac{a^1}{2\delta}\int\limits_{Q_{0,T}}\sum_{i=1}^{n}\left|u^N\right|^{p-2}(u_{x_i}^N)^2e^{-\alpha t}dx\,dy\,dt\,. \qquad (12)$$

Врахуємо вигляд α і застосуємо (10). Матимемо оцінку

$$\left[\int\limits_{D_\tau}(u_y^N)^2dx\,dy+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}\left|u^N\right|^{p-2}(u_{x_i y}^N)^2dx\,dy\,dt+\int\limits_{Q_{0,\tau}}(u_y^N)^2dx\,dy\,dt\right]\leq$$

$$\leq M_2\left[\int\limits_{Q_{0,T}}\left(\left|f_y\right|^2+|f|^2\right)dx\,dy\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_D\left[(u_{0y})^2+(u_0)^2\right]dx\,dy\right],\qquad\tau\in(0,T]\,, \qquad (13)$$

у якій стала M_2 не залежить від N.

Оскільки

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left(\left(|u^N|^{(p-2)/2} u^N \right)_y \right)^2 dx\, dy\, dt = \frac{p^2}{4} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^N|^{p-2} \left(\int\limits_0^{x_i} u^N_{\xi,y}\, d\xi \right)^2 dx\, dy\, dt \le$$

$$\le \frac{p^2}{4} \int\limits_{Q_{0,T}} x_i |u^N|^{p-2} \int\limits_0^{x_i} (u^N_{\xi,y})^2 d\xi\, dx\, dy\, dt \le$$

$$\le \frac{p^2}{4} (\mathrm{mes}\,\Omega)^2 \int\limits_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^{n} |u^N|^{p-2} (u^N_{x_i y})^2 dx\, dy\, dt < \infty ,$$

де $u_\xi \equiv (u(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n))_\xi$, то $\left(|u^N|^{(p-2)/2} u^N \right)_y \in L^2(Q_{0,T})$.

Нехай P_N – ортогональний проектор в $L^2(D)$ на $\{\varphi^{1,1}, \ldots, \varphi^{N,N}\}$:

$$P_N u^N_t = P_N \left(\lambda(x,y,t) u^N_y + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x,y,t) |u^N|^{p-2} u^N_{x_i} \right)_{x_i} + f(x,y,t) \right) \in$$

$$\in L^2(Q_{0,T}) + V_1^*(Q_{0,T}) \subset V_1^*(Q_{0,T}) . \tag{14}$$

Цей оператор є обмеженим у просторах $\mathcal{L}(L^2(D); L^2(D))$, $\mathcal{L}(V_1^*(D); V_1^*(D))$, $\mathcal{L}(V_1(D); V_1(D))$.

Зауважимо, що простір $V_1^*(Q_{0,T})$ банаховий, $u_t \in V_1^*(Q_{0,T})$ і $V_1^*(Q_{0,T}) = L^{p'}(G; H^{-r}(\Omega))$.

Оскільки $\left(|u^N|^{(p-2)/2} u^N \right)_{x_i} \in L^2(Q_{0,T})$, то

$$|u^N|^{(p-2)/2} u^N \in L^2(Q_{0,T}), \qquad \int\limits_{Q_{0,T}} |u^N|^p\, dx\, dy\, dt < \infty ,$$

а тому $u^N \in L^p(Q_{0,T})$. З оцінок (10), (13), (14) випливають такі збіжності деякої підпослідовності послідовності $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ (за якою збережемо те ж саме позначення):

$$u^N \to u \quad * \text{-слабко в } L^\infty((0,T); L^2(D)) ,$$
$$u^N \to u \quad \text{слабко в } L^p(Q_{0,T}) ,$$
$$|u^N|^{(p-2)/2} u^N \to \chi \quad \text{слабко в } L^2(0,T;S) ,$$
$$u^N_y \to u_y \quad * \text{-слабко в } L^\infty((0,T); L^2(D)) ,$$
$$u^N_t \to u_t \quad \text{слабко в } V_1^*(Q_{0,T}) . \tag{15}$$

Покладемо $S = \{ v : |v|^{(p-2)/2} v \in H^1(D),\ v\big|_{\Sigma_{0,T}} = 0,\ v(x, y_0, t) = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0,T) \}$,

$M(v) = \left(\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} |v|^{p-2} (v_{x_i})^2 dx\, dy \right)^{1/p}$. Тоді, згідно з твердженням, $M(v) \ge 0$ на S , $M(\lambda v) = |\lambda| M(v)$ для довільного числа $\lambda \in \mathbb{R}^1$ та, зокрема, $S \subset L^p(D) \subset L^{p'}(0, y_0; H^{-r}(\Omega))$, множина $\{ v : v \in S,\ M(v) \le 1 \}$ відносно компактна в $L^p(D)$. Крім того, $\int\limits_0^T [M(u^N)]^p dt = \int\limits_0^T \int\limits_D \sum_{i=1}^{n} |v|^{p-2} (v_{x_i})^2 dx\, dy\, dt < C$ та $u_t \in V_1^*(Q_{0,T}) \subset L^{p'}(G; H^{-r}(\Omega))$. Тоді за теоремою 12.1 з [11]

$$u^N \to u \quad \text{сильно в } L^p(Q_{0,T}) \text{ і майже всюди.} \tag{16}$$

Нехай $v \in L^p(G; H_0^r(\Omega))$. Оцінимо функціонал

$$a(u^N, v) = \left| -\frac{1}{p-1} \int_{Q_{0,T}} |u^N|^{p-2} u\, \Delta_x v\, dx\, dy \right| \le$$

$$\le \frac{1}{p-1} \left\| |u^N|^{p-2} u \right\|_{L^{p'}(Q_{0,T})} \| \Delta_x v \|_{L^p(Q_{0,T})} \le$$

$$\le C \| u^N \|_{L^{p'}(Q_{0,T})}^{p-1} \| v \|_{L^p(G; H_0^r(\Omega))}.$$

Тоді $a(u,v) = (g(u), v)$, де $\| g(u^N) \|_{L^p(G; H_0^r(\Omega))} \le C \| u^N \|_{L^p(Q_{0,T})}$. Отже, $g(u^N)$ обмежена в $L^p(G; H_0^r(\Omega))$, $u^N \to u$ сильно в $L^p(Q_{0,T})$ і майже всюди. Тоді за лемою 1.3 з [11] $g(u^N) \to g(u)$ слабко в $L^p(G; H_0^r(\Omega))$. Оскільки u^N обмежена на S і виконується збіжність (16), то за лемою 1.3 з [11]

$$|u^N|^{(p-2)/2} u^N \to |u|^{(p-2)/2} u \quad \text{слабко в } L^2(Q_{0,T}),$$

$$\left(|u^N|^{(p-2)/2} u^N \right)_{x_i} \to \left(|u|^{(p-2)/2} u \right)_{x_i} \quad \text{слабко в } L^2(Q_{0,T}). \tag{17}$$

З (16) випливає, що $u^N \to u$ слабко в $W^{1,2}(0, y_0; L^2((0;T) \times \Omega))$. Тоді $u \in C(0, y_0; L^2((0,T) \times \Omega))$, $u(x, y_0, t) \in L^2((0,T) \times \Omega)$ і

$$\lim_{N \to \infty} \int_{Q_{0,T}} \lambda(x,y,t) u_y^N v\, dx\, dy\, dt = \int_{Q_{0,T}} \lambda(x,y,t) u_y v\, dx\, dy\, dt$$

для довільних $v \in W(Q_{0,T})$. Проінтегрувавши цю рівність частинами та використавши одержані збіжності, знаходимо, що $u(x, y_0, t) = 0$. Аналогічно доводимо, що $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$.

Покажемо, що u − розв'язок задачі (1)−(3). З (6) отримаємо рівність

$$\int_{Q_{0,T}} \left[u_t^N v^{N_0} - \lambda(x,y,t) u_y^N v^{N_0} + \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t) |u^N|^{p-2} u_{x_i}^N v_{x_i}^{N_0} \right] dx\, dy\, dt =$$

$$= \int_{Q_{0,T}} f(x,y,t) v^{N_0} dx\, dy\, dt, \tag{18}$$

яка виконується для всіх $v^{N_0} = \sum_{s,k=1}^{N_0} z_{sk}^{N_0}(t) \varphi^{s,k}(x,y)$, $z_{sk}^{N_0} \in C([0,T])$.

Зауважимо, що множина функцій $\{u^{N_0}\}_{N_0=1}^{\infty}$ вигляду

$$\sum_{s,k=1}^{N_0} z_{s,k}^{N_0}(t) \varphi^{s,k}(x,y), \qquad \text{де} \qquad \{\varphi^{s,k}(x,y)\}_{s,k=1}^{\infty},$$

означена на початку доведення, є щільною в $W_1(Q_{0,T})$. Крім того,

$$\int_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t) |u^N|^{p-2} u_{x_i}^N v_{x_i}^{N_0} dx\, dy\, dt =$$

$$= \int_{Q_{0,T}} \frac{2}{p-2} \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t) \left(|u^N|^{(p-2)/2} u^N \right)_{x_i} |u^N|^{(p-2)/2} v_{x_i}^{N_0} dx\, dy\, dt \to$$

$$\to \int_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t) |u|^{p-2} u_{x_i} v_{x_i}^{N_0} dx\, dy\, dt.$$

У тотожності (18) перейдемо до границі за вибраною вище послідовністю.

Отримаємо рівність

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle dt + \int_{Q_{0,T}} \Big[\lambda_y(x,y,t) u_y v +$$
$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t)|u|^{p-2} u_{x_i} v_{x_i}^{N_0} dx\,dy\,dt\Big] dx\,dy\,dt =$$
$$= \int_{Q_{0,T}} f(x,y,t) v\,dx\,dy\,dt\,, \qquad (19)$$

яка є правильною для всіх $v \in W_1(Q_{0,T})$. Теорему доведено. ◊

3. Задача без початкових умов. Нехай тепер область є необмеженою за часовою змінною. Позначимо її $Q_T = \Omega \times (0, y_0) \times (-\infty; T]$. Розглядатимемо простори

$$W_{\mathrm{loc}}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_{t_1,T}) \text{ для довільного } t_1 < T\},$$
$$W_{1,\mathrm{loc}}(Q_T) = \{v : v \in W_1(Q_{t_1,T}) \text{ для довільного } t_1 < T\},$$
$$V_{2,\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T) = \{v : v \in L^2(t_1, T; H) \cap L^p(Q_{t_1,T}) \text{ для довільного } t_1 < T\}.$$

Нехай $H = L^2(0, y_0; H^{-1}(\Omega))$.

Означення 2. Функцію u, яка в просторі $V_{2,\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T) \cap C((-\infty; T]; H)$ є границею послідовності функцій $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ таких, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $u^k \in W(Q_{t_1,T})$ задовольняє рівняння

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle u_t^k, v\rangle dt + \int_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-\lambda(x,y,t) u_y^k v +$$
$$+ \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t) |u^k|^{p-2} u^k (-\Delta) v\Big] dx\,dy\,dt =$$
$$= \int_{Q_{t_1,t_2}} f^k(x,y,t) v\,dx\,dy\,dt \qquad (20)$$

для кожного $v \in L^2(0,T; H^*)$, $\operatorname{supp} v \subset \operatorname{supp} u^k$, і довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T)$, де послідовність $\{f^k\}_{k=1}^\infty$ збігається у просторі $L_{\mathrm{loc}}^{p'}((-\infty, T]; L^{p'}(D))$ до функції f, назвемо *слабким розв'язком задачі* без початкових умов (1), (2).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *для кожної обмеженої підобласті області* Q_T, $a_i(x,y,t) \equiv a_i(y,t)$. *Тоді існує слабкий розв'язок задачі* (1), (2).

Д о в е д е н н я. Розглянемо послідовність функцій $\{f^k\}_{k=1}^\infty$, збіжну до f у просторі $L_{\mathrm{loc}}^{p'}((-\infty, T]; L^{p'}(D))$, таких, що f^k, $f_{y_i}^k \in L_{\mathrm{loc}}^2((-\infty, T]; L^2(D))$ і $f^k(x, y_0, t) = 0$ для всіх натуральних k. Введемо функцію

$$F^k(x,y,t) = \begin{cases} f^k(x,y,t)\xi(t), & (x,y,t) \in Q_{T-k,T}, \\ 0, & (x,y,t) \in Q_{T-k}, \end{cases}$$

де $\xi \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \le \xi(t) \le 1$, $\xi(t) = \begin{cases} 1, & t \ge T-k+1, \\ 0, & t \le T-k, \end{cases}$ $k \in \mathbb{N}$. Зазначимо, що $F^k \to$ $\to f$ у просторі $L_{\mathrm{loc}}^{p'}((-\infty, T]; L^{p'}(D))$ при $k \to \infty$.

Розглянемо в області $Q_{T-k,T}$ задачу для рівняння (1) з крайовими умовами (2) і з початковою умовою $u(x, y, T-k) = 0$.

У теоремі 1 доведено існування розв'язку u^k цієї задачі. Продовжимо кожну з функцій u^k нулем в область Q_{T-k} і збережемо для неї те саме позначення. Очевидно, що функція u^k задовольняє рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle u_t^k, v \right\rangle dt + \int_{Q_{t_1,t_2}} \left[-\lambda(x,y,t) u_y^k v + \sum_{i=1}^n a_i(y,t) \left| u^k \right|^{p-2} u_{x_i}^k v_{x_i} \right] dx\,dy\,dt =$$

$$= \int_{Q_{t_1,t_2}} F^k(x,y,t) v\,dx\,dy\,dt \tag{21}$$

для всіх $v \in W_{1,\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T)$, $\operatorname{supp} v \subset \operatorname{supp} u^k$, $t_1 < t_2 \le T$. Така ж рівність виконується для функції u^m. Тоді різниця $u^{k,m} = u^k - u^m$ задовольнятиме рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle u_t^{k,m}, v \right\rangle dt + \int_{Q_{t_1,t_2}} \left[-\lambda(x,y,t) u_y^{k,m} v + \sum_{i=1}^n a_i(y,t) \Big(\left| u^k \right|^{p-2} u_{x_i}^k - \right.$$

$$\left. - \left| u^m \right|^{p-2} u_{x_i}^m \Big) v_{x_i} \right] dx\,dy\,dt =$$

$$= \int_{Q_{t_1,t_2}} (F^k(x,y,t) - F^m(x,y,t)) v\,dx\,dy\,dt \tag{22}$$

для всіх $v \in W_{1,\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T)$, $\operatorname{supp} v \in \operatorname{supp} u^{k,m}$, $t_1 < t_2 \le T$.

Виберемо функцію $\theta_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$ [2, с. 24], таку, що $\theta_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $\theta_1(t) \ge 0$ на $\mathbb{R}$, $0 \le \theta_1(t) \le 1$; $\theta_1(t) = 0$, якщо $t \in (-\infty, -1]$, $\theta_1(t) = \exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t \in (-1, -1/2]$, $\theta_1(t) \ge \exp\{-2\}$, якщо $t \in (-1/2, 0)$, $\theta_1(t) = 1$, якщо $t \in [0, +\infty)$. Зазначимо, що $\sup\limits_{\mathbb{R}} \theta_1(t) \theta_1^{-æ}(t) \le C$, де $0 < æ < 1$, C − стала, яка залежить тільки від $æ$.

Позначимо $\theta(t) = \theta_1\left(\dfrac{t - t_1}{\delta} \right)$, $\delta > 0$. Зауважимо, що скалярний добуток в H визначається співвідношенням

$$(u,v)_H = \int_0^{y_0} \left(u, (-\Delta_x)^{-1} v \right) dy\,,$$

де $(-\Delta_x)^{-1} v = \tilde{v}$ − розв'язок задачі $-\Delta_x \tilde{v} = v$, $\tilde{v} = 0$ на $\partial\Omega$ (отже, $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$), а $\left(u, (-\Delta_x)^{-1} v \right) = \int\limits_\Omega u (-\Delta_x) v\,dx$ − скалярний добуток між $H^{-1}(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$. Доведемо фундаментальність послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ у просторах $C((-\infty, T]; H)$, $V_{2,\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T)$. Виберемо в рівності (22) функцію $v = (-\Delta_x)^{-1} u^{k,m} \theta(t) e^{-\alpha t}$, $t_1 - \delta$ та ζ відповідно замість t_1 і t_2, де ζ − довільне число з проміжку $[t_1, t_2]$. Матимемо

$$\int_{(t_1-\delta,\zeta)} \left[(u_t^{k,m}, u^{k,m}\theta(t))_H - (\lambda(x,y,t) u_y^{k,m}, u^{k,m}\theta(t))_H \right] e^{-\alpha t}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{p-1} \int_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \left[\sum_{i=1}^n a_i(y,t) \Big(\left| u^k \right|^{p-2} u^k - \right.$$

$$\left. - \left| u^m \right|^{p-2} u^m \Big) u^{k,m} \theta(t) \right] e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \big((F^k(x,y,t) - F^m(x,y,t)), u^{k,m}\theta(t)\big)_H e^{-\alpha t}\, dt\,. \qquad (23)$$

Виберемо $T-k < t_1 - \delta$, $T - m < t_1 - \delta$. Тоді $F^k - F^m \equiv 0$ при $t \in [t_1 - \delta, t_2]$. Перетворимо та оцінимо кожний доданок рівності (23):

$$I_1 \equiv \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} (u_t^{k,m}, u^{k,m})_H \theta(t) e^{-\alpha t}\, dt = \| u^{k,m} \|_H^2 e^{-\alpha\zeta} -$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \| u^{k,m} \|_H^2 \theta'(t) e^{-\alpha t}\, dt + \frac{\alpha}{2} \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \| u^{k,m} \|_H^2 \theta(t) e^{-\alpha t}\, dt\,,$$

$$I_2 \equiv \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \lambda(x,y,t) u_y^{k,m} (-\Delta_x)^{-1} u^{k,m} \theta(t) e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \geq$$

$$\geq -\frac{\lambda^2}{2} \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \| u^{k,m} \|_H^2 \theta(t) e^{-\alpha t}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \int\limits_{\Omega} \lambda(x,0,t) u^{k,m} (-\Delta_x)^{-1} u^{k,m} e^{-\alpha t} \theta(t)\, dx\, dt\,,$$

де $\lambda^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |\lambda_y(x,y,t)|$.

Врахувавши, що $\| u^{k,m} \|_H \leq \| u^{k,m} \|_{L^2(D)}$, одержуємо оцінку

$$I_1 \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \| u^{k,m} \|_H^2 \theta'(t) e^{-\alpha t}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{\delta_1}{p} \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} |u^{k,m}|^p \theta(t) e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt + C_1 [\delta_1 \delta_1]^{-2/(p-2)}\,,$$

де $\delta_1 > 0$, $C_1 = C_1(n,p)$. Враховуючи умову **(A)**, матимемо

$$I_3 \equiv \frac{1}{p-1} \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \sum_{i=1}^n a_i(y,t) \Big(|u^k|^{p-2} u^k - |u^m|^{p-2} u^m \Big) u^{k,m} \theta(t) e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \geq$$

$$\geq \frac{a_0}{p-1} \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \sum_{i=1}^n |u^{k,m}|^p \theta(t) e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt\,.$$

Після цих перетворень отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2} \| u^{k,m} \|_H^2 e^{-\zeta\alpha} + \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \int\limits_{\Omega} \lambda(x,0,t) u^{k,m} (-\Delta_x)^{-1} u^{k,m} e^{-\alpha t} \theta(t)\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) \| u^{k,m} \|^2 e^{-\alpha t}\, dt + \left(\frac{-\delta_1}{p} + \frac{a_0}{p-1} \right) \times$$

$$\times \int\limits_{Q_{(t_1-\delta,\zeta)}} |u^{k,m}|^p \theta(t) e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \leq C_1 [\delta \delta_1]^{-2/(p-2)}. \qquad (24)$$

Виберемо $\delta_1 = \left(1 - \dfrac{a_0}{p-1}\right) p$. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване число. Виберемо δ таким, щоб права частина нерівності (24) була менша від ε. Тоді для довільного фіксованого t_1, $t_1 < T$ послідовність $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною у просторах $C([t_1,T];H)$ та $V_2(Q_{t_1,T})$, $L^2_{\mathrm{loc}}(-\infty,T;H^{-1}(\partial\Omega))$. Звідси одержуємо збіжності

$$u^k \to u \quad \text{в} \quad C((-\infty,T];H), \qquad u^k \to u \quad \text{в} \quad V_{2,\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T).$$

За означенням 2, u є слабким розв'язком задачі (1), (2).

Теорему доведено. ◊

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(L)**, **(P)** *в області* Q_T. *Тоді задача* (1), (2) *не може мати більше одного слабкого розв'язку.*

Д о в е д е н н я. Нехай існує два слабкі розв'язки u_1 і u_2 задачі (1), (2). За означенням слабкого розв'язку існують послідовності $\{u_\ell^k\}_{k=1}^\infty$, $\ell = 1,2$, які збігаються до u_ℓ у просторі $V_{2,\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T) \cap C((-\infty,T];H)$ при $k \to \infty$. Тоді їх різниця $u^k = u_1^k - u_2^k$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta} \left\langle u_t^k, u^k e^{-\alpha t}\theta(t)\right\rangle dt + \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \Big[\lambda(x,y,t)u^k u_y^k + \lambda_y(x,y,t)(u^k)^2 +$$
$$+ \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^n a_i(y,t)\left(\left|u_1^k\right|^{p-2} u_1^k - \left|u_2^k\right|^{p-2} u_2^k\right)(-\Delta)u^k -$$
$$-(f_1^k(x,y,t) - f_2^k(x,y,t))u^k\Big]\theta(t)e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{25}$$

Аналогічно, як з (24), отримуємо рівність

$$\frac{1}{2}\| u^k \|_H^2 e^{-\zeta\alpha} + \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)}\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)u^k(-\Delta_x)^{-1}u^k e^{-\alpha t}\theta(t)\,dx\,dt +$$
$$+ \int\limits_{(t_1-\delta,\zeta)} \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)\| u^k \|^2 e^{-\alpha t}\,dt +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{-\delta_1}{p} + \frac{a_0}{p-1} - \frac{1}{p}\right)\right] \int\limits_{Q_{(t_1-\delta,\zeta)}} |u^k|^p\, \theta(t)e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \le$$
$$\le C_1[\delta\delta_1]^{-2/(p-2)} + \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} (f_1^k - f_2^k)^p\, \theta(t)e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt. \tag{26}$$

Нехай t_0 − довільне фіксоване з проміжку $(-\infty,T)$ і $t_1 < t_0$. За нерівністю трикутника

$$\| f_2^k - f_1^k \|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} \le \| f_2^k - f \|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} + \| f_1^k - f \|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})}.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та виберемо δ з умови $C_1[\delta\delta_1]^{-2/(p_1-2)} < \varepsilon^2/8$. Оскільки кожна з послідовностей $\{f_\ell^k\}_{k=\ell}^\infty$, $\ell = 1,2$, є збіжною до функції f у просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T);L^{p'}(D))$, то існує таке натуральне $k_0(\varepsilon)$, що для всіх $k > k_0$

$$\| f_\ell^k - f \|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^{2/p'_1}, \qquad \ell = 1,2.$$

Тоді з (26) отримуємо, що $\| u_2^k - u_1^k \|_{C([t_0,T];H)} < \varepsilon$. Оскільки

$$\|u_2 - u_1\|_{C([t_0,T];H)} \le \|u_2^k - u_2\|_{C([t_0,T];H)} + \|u_2^k - u_1^k\|_{C([t_0,T];H)} +$$
$$+ \|u_1^k - u_1\|_{C([t_0,T];H)}$$

і $\|u_\ell^k - u_\ell\|_{C([t_0,T];H)} \to 0$, $\ell = 1,2$, при $k \to \infty$, то існує таке натуральне $k_1 \ge k_0$, що для всіх $k > k_1$ виконується оцінка $\| u_2 - u_1 \|_{C([t_0,T];H)} \le 3\varepsilon$. Оскільки t_0 і ε довільні, то $u_2 = u_1$ майже всюди в Q_T.

Теорему доведено. ◊

Дослідження частково підтримані ґрантом НАН України для молодих вчених (номер держреєстрації 0107U007278) та ґрантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених (Розпорядження Президента України від 26.06.08 № 207/2008-рп, наказ МОН від 17.07.08 № 660).

1. *Барабаш Г. М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 27–34.
2. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – Москва: Изд-во Моск. ун-та. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.
3. *Генчев Т. Г.* Об ультрапараболических уравнениях // Докл. АН СССР. – 1963. – **151**, № 2. – С. 265–268.
4. *Городецкий В. В., Житарюк И. В.* Стабилизация решений задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений в пространствах обобщенных функций // Нелинейные граничные задачи. – 1993. – Вып. 5. – С. 31–36.
5. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1482–1496.
6. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* Об интегральном представлении решений вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Диференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 5. – С. 647–655.
7. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
8. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – Вып. 12. – С. 128–139.
9. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією// Укр. мат. журн. 2006. – **58**, № 9. – С. 1192–1210.
10. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – Москва: Наука, 1973. – 407 с.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
12. *Орлова С. А.* О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 6. – С. 211–215.
13. *Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Сер. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 97–103.
14. *Терсенов С. А.* О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложения // Мат. сб. – 1987. – **133(175)**. – № 4 (8). – С. 539–555.
15. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
16. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. (In honour of Prof. O. A. Ladyzhenskaya.) – New York: Kluwer Acad. Publ. (Int. Math. Ser., N.Y. 2). – 2002. – P. 243–265.
17. *Lax P. D., Phillips R. S.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Comm. Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**. – P. 427–455.
18. *Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance // Nonlinear Analysis. – 2001. – **47**. – P. 491–502.
19. *Ragusa M. A.* On weak solutions of ultraparabolic equations // Nonlinear Analysis. – 2001. – **47**. – P. 503–511.
20. *Schonbek M. E., Suli E.* Decay of the total variation and Hardy norms of solutions to parabolic conservation laws // Nonlinear Analysis. – 2001. – **45**. – P. 515–528.
21. *Suvorov S. G.* Nonlinear ultraparabolic equations in general domains // Нелинейные граничные задачи. – 1997. – Вып. 7. – С. 180–188.

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Рассмотрена смешанная задача для нелинейного вырожденного ультрапараболического уравнения второго порядка. Исследованы существование и единственность обобщенных решений задачи в ограниченной области, а также слабых решений (*в смысле предела последовательности*) *задачи без начальных условий для такого уравнения.*

PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR NONLINEAR ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH DEGENERATION

The mixed problem for nonlinear degenerated ultraparabolic equation of the second order is considered. The existence and uniqueness of generalized solution in a bounded domain for the problem is investigated. Weak solvability (*in the sense of sequences*) *for the problem without initial conditions for this equation is obtained.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.04.07