Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»
27–29 травня 2025 р., Львів

УДК 517.956.4

ПОТОЧКОВІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ З Р-ЛАПЛАСІАНОМ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОТЕНЦІАЛУ ВОЛЬФА

Євген Зозуля

Донбаська державна машинобудівна академія
albelgen27@gmail.com

Узагальнюється представлення Пуассона на випадок квазілінійного параболічного рівняння дивергентного типу

$$v\,(x)\,u_t - \operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f\ ,\ p > 2 \tag{1}$$

в області $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, з ваговими функціями $v(x)$, $w(x)$, що належать класу Маккенхаупта та правою частиною $f \in L^1(\Omega_T)$. Вважаємо, що $\Omega-$ обмежена область у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2,\ 0 < T < +\infty$.

Припускаємо також, що w належить до класу Маккенхаупта A_p , $1 < p < \infty$, тобто

$$sup\frac{w(B)}{|B|}\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\ dx\right)^{p-1} =< +\infty\ ,\quad w(B) = \int\limits_B wdx\ ,$$

де супремум береться за всіма кулями $B \subset \mathbb{R}^n$. Тут ми говоримо, що $v(x) \in A_\infty$, якщо існує $p_0 > 1$ таке, що $v(x) \in A_{p_0}$.

Наступне наше припущення - це співвідношення між v та w. Фіксуємо $y \in \Omega$ та R так, що $B_{8R}(y) \subset \Omega$ і покладемо

$$\psi_y(r) := r^p\,\frac{v(B_r(y))}{w(B_r(y))},\quad 0 < r \leq R. \tag{2}$$

Припускаємо, що $\psi_y(r)$ зростає для $r \in (0, R]$.

У випадку, якщо f не залежить від часу, для кожної кулі з центром у x_0, виконується $P^f_{v,w}(x_0, t_0, \rho) = W^f_{w,p}(x_0, \rho)$ (детальніше [4]), де $W^f_{w,p}(x_0, \rho)$ - ваговий потенціал Вольфа (детальніше [3], [4]).

Зазначимо, що u - це узагальнений розв'язок рівняння (1), який розумітимемо (детальніше [4]) у термінах інтегральної тотожності.

Наш основний результат формулюється наступним чином.

Теорема 1. *Нехай u слабкий розв'язок рівняння (1) і $p > 2$. Тоді для кожного $\lambda \in \left(0, min\left\{\frac{1}{p-1}, \frac{1}{N}\right\}\right)$ існує $\gamma > 0$, що залежить тільки від даних p, N і λ, таке, що для кожної точки Лебега $(y,s) \in \Omega_T$ для u_+ та $\rho, \theta > 0$ такі, що $Q_{\rho,\theta} := \{x : |x-y| \leq \rho\} \times [s-\theta, s+\theta] \subset \Omega_T$, виконується*

$$u_+(y,s) \leq \gamma \Bigg[\left(\frac{\psi_y(R)}{\theta}\right)^{\frac{1}{p-2}} + \left[\frac{1}{\psi_y(\rho) v(B_\rho)} \iint\limits_{Q_{\rho,\theta}} v u_+^{(1+\lambda)(p-1)} dxdt\right]^{\frac{1}{1+\lambda(p-1)}} +$$

$$+ \left[\frac{1}{\psi_y(\rho) w(B_\rho)} \iint\limits_{Q_{\rho,\theta}} w u_+^{(1+\lambda)(p-1)} dxdt\right]^{\frac{1}{1+\lambda(p-1)}} + P^f_{v,w}(y,s,\rho)\Bigg]. \qquad (3)$$

Доведення теореми 1 (наведено у [4]) ґрунтується на методі внутрішнього масштабування (intrinsic scaling) Ді Бенедетто [1], після адаптації техніки Кілпелайнен - Мали [2] до параболічних рівнянь сумісно з ідеями [3].

1. Di Benedetto E., Gianazza U., Vespri V., Harnack inequality for degenerate and singular parabolic equations. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2012.

2. Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O., Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, in: Oxford Matematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.

3. Liskevich V., Skrypnik I. I., Harnack's inequality and continuity of solutions to quasi-linear degenerate parabolic equations with coefficients fron Kato-type classes, J. Differential Equations, 2009, (10) 247, P. 2740-2777.

4. Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted parabolic p-Laplacian equation via Wolff potential, Праці ІПММ НАН України, 2023, Т. 36, № 2, С. 72-90.

POINTWISE ESTIMATES OF SOLUTIONS TO P-LAPLACIAN EQUATION USING VIA WOLFF POTENTIAL

An upper pointwise estimate of the solutions of a parabolic equation of the p-Laplace type with weight coefficients from Mackenhoupt classes and with a singular lower-order term is established.