Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»
27–29 травня 2025 р., Львів

УДК 517.95

Групова класифікація класу систем нелінійних рівнянь дифузії

Олександр Волошин

Інститут математики НАН України, Київ, voloshyn@imath.kiev.ua

Система нелінійних рівнянь дифузії для двовимірного векторного поля $U \in \mathbb{R}^2$ в загальному випадку записується у вигляді

$$U_t = \partial_x \left[F(U) U_x \right], \tag{1}$$

де $U := \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad F(U) := \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $f^{ab} = f^{ab}(u^1, u^2)$ — коефіцієнти дифузії, $u^a = u^a(t, x)$ — функції концентрації (або щільності) двох різних речовин, які взаємодіють між собою, t — часова, x — просторова незалежні змінні.

Ядром максимальних алгебр ліївської інваріантності систем з класу (1) є тривимірна алгебра

$$A^{\cap} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = 2t\partial_t + x\partial_x \rangle. \tag{2}$$

Теорема 1. *Алгеброю еквівалентності класу* (1) *є лінійна оболонка векторних полів*

$$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_{u^a},\ t\partial_t - f^{ab}\partial_{f^{ab}},\ x\partial_x + 2f^{ab}\partial_{f^{ab}},\ u^a\partial_{u^b} + f^{ac}\partial_{f^{bc}} - f^{cb}\partial_{f^{ca}}$$

у просторі $\mathbb{R}^2_{t,x} \times \mathbb{R}^2_U \times \mathbb{R}^4_F$, *яка ізоморфна* $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{aff}(1,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$.

Наслідок 1. *Максимальну групу неперервних перетворень еквівалентності класу* (1) *складають точкові перетворення*

$$\tilde{t} = \mathrm{e}^{\theta_1} t + s_0, \quad \tilde{x} = \mathrm{e}^{\theta_2} x + s_1, \quad \tilde{U} = AU + Q, \quad \tilde{F} = \mathrm{e}^{\theta_1 - 2\theta_2} A^{-1} F A \tag{3}$$

у просторі $\mathbb{R}^2_{t,x} \times \mathbb{R}^2_U \times \mathbb{R}^4_F$, *де* $A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta_3} + \theta_4\theta_5\mathrm{e}^{-\theta_6} & \theta_4 \\ \theta_5 & \mathrm{e}^{\theta_6} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, s_0, s_1, q_1, q_2, θ_0, $\theta_1, \ldots, \theta_6$ *— довільні сталі.*

Зауваження 1. Крім неперервних перетворень (3) клас систем рівнянь (1) допускає ще й дискретні перетворення еквівалентності вигляду

$$\begin{aligned}
&\tilde t=-t,\ \tilde x=x,\ \tilde u^a=u^a,\ \tilde f^{ab}=-f^{ab},\\
&\tilde t=t,\ \tilde x=-x,\ \tilde u^a=u^a,\ \tilde f^{ab}=f^{ab},\\
&\tilde t=t,\ \tilde x=x,\ \tilde u^1=-u^1,\ \tilde u^2=u^2,\ \tilde f^{11}=f^{11},\\
&\tilde f^{12}=-f^{12},\ \tilde f^{21}=-f^{21},\ \tilde f^{22}=f^{22},\\
&\tilde t=t,\ \tilde x=x,\ \tilde u^1=u^1,\ \tilde u^2=-u^2,\ \tilde f^{11}=f^{11},\\
&\tilde f^{12}=-f^{12},\ \tilde f^{21}=-f^{21},\ \tilde f^{22}=f^{22}.
\end{aligned}\tag{4}$$

Композиція перетворень (3), (4) задає перетворення

$$\tilde t=l_0t+s_0,\quad \tilde x=l_1x+s_1,\quad \tilde U=PU+Q,\quad \tilde F=\frac{l_1^2}{l_0}P^{-1}FP \tag{5}$$

у просторі $\mathbb{R}^2_{t,x}\times\mathbb{R}^2_U\times\mathbb{R}^4_F$, де $P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$, l_0, l_1, p_{ab} — довільні сталі такі, що $l_0l_1\neq 0$, P — довільна стала невироджена матриця.

У класі (1) було виділено дев'ять нееквівалентних відносно перетворень (5) підкласів, системи з яких допускають розширення ядра (2). У кожному із цих підкласів виділено канонічні представники.

Перший з виділених підкласів складається з систем вигляду

$$U_t=\partial_x\left[\mathrm{e}^{nu^1}\Phi\left(u^2\right)U_x\right], \tag{6}$$

де $n\in\{0,1\}$, $\Phi=\begin{pmatrix}\varphi^{11} & \varphi^{12}\\ \varphi^{21} & \varphi^{22}\end{pmatrix}$, $\varphi^{ab}=\varphi^{ab}\left(u^2\right)$ — довільні гладкі функції, $\varphi^{11}+\varphi^{22}\neq 0$, $\varphi^{11}\varphi^{22}-\varphi^{12}\varphi^{21}\neq 0$. Для цього підкласу виконано вичерпну групову класифікацію.

Доповідь базується на роботі [1].

1. *Волошин О.А., Серов М.І., Ванеева О.О.* Групова класифікація класу систем нелінійних рівнянь дифузії. I // Укр. мат. журн. (подано до друку).

GROUP CLASSIFICATION OF A CLASS OF SYSTEMS OF NONLINEAR DIFFUSION EQUATIONS

The class of (1+1)-dimensional nonlinear diffusion equations is investigated from the Lie symmetry point of view. The equivalence algebra and the kernel of the maximal invariance algebras for this class are found. We prove that there are nine inequivalent subclasses of this class, for which the corresponding diffusion systems admit the Lie symmetry extensions