

АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ У КОНФЛІКТНІЙ ГРІ ЗА ТРИ ПОЗИЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ВТРАТ

Оксана Сатур

Інститут математики НАН України, orlassat@gmail.com

Дослідження аналізує динамічні процеси у конфліктній грі між двома опонентами А та В, що борються за контроль над ресурсним простором, розбитим на три регіони $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$. Боротьба між опонентами А та В відбувається у моменти дискретного часу і приводить до змін чисельних мас:

$$\{M_i^t; N_i^t\} \xrightarrow{*} \{M_i^{t+1}; N_i^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

де $M_i^0 \equiv M_i, N_i^0 \equiv N_i$, а відображення $*$ позначає закон конфліктної взаємодії, який задається наступним чином.

На початку кожен із опонентів має початкову чисельну масу M і N , яку розподіляють по регіонах: $M = M_1 + M_2 + M_3$ та $N = N_1 + N_2 + N_3$. Цей розподіл задається стохастичними векторами $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ та $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, де $p_i = \frac{M_i}{M}$, та $r_i = \frac{N_i}{N}$, що відображають ймовірності присутності опонентів у відповідних регіонах.

Конфліктна взаємодія відбувається у дискретні моменти часу ($t = 1, 2, 3, \dots$) за фіксованим законом, який визначає зміну мас. Нові ймовірності розподілу обчислюються за такими ітераційними формулами:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - r_i^t)}{1 - \theta^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{r_i^t(1 - p_i^t)}{1 - \theta^t}, \quad \theta^t = (\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 p_i^t r_i^t, \quad (2)$$

а відповідні регіональні та повні маси задаються наступними формулами

$$M_i^{t+1} = M^{t+1} \cdot p_i^{t+1}, \quad N_i^{t+1} = N^{t+1} \cdot r_i^{t+1}, \quad (3)$$

$$M^{t+1} = M^t - \sum_{i=1}^3 M_{i,-}^{t+1}, \quad N^{t+1} = N^t - \sum_{i=1}^3 N_{i,-}^{t+1}, \quad (4)$$

де

$$M_{i,-}^{t+1} := \kappa_i^{t+1} M_i^t, \quad N_{i,-}^{t+1} := \kappa_i^{t+1} N_i^t, \quad \kappa_i^{t+1} := p_i^t r_i^t. \quad (5)$$

Дослідження конфліктної взаємодії, що задається рівняннями (2) описуються в роботах [1, 2]. Задача про конфлікт у викладеній вище ситуації

полягає у пошуку оптимальних стратегій розподілу початкових чисельних мас M , N по регіонах з метою зменшення втрат у послідовності конфліктних зіткнень.

Було проведено аналіз тенденцій змін, як регіональних M_i^t , N_i^t , так і повних, M^t , N^t , чисельних мас, залежно від різних способів розподілу величин M , N по регіонах Ω_i . Теорема 1 є одним з основним результатів роботи, також одержано ряд достатніх умов розв'язання проблеми оптимальної стратегії.

Теорема 1. *(Про конфлікт з регіональними втратами) Кожна траєкторія динамічної системи (1) заданої формулами (3)–(5) збігається до нерухомої точки $\{M_i^\infty; N_i^\infty\}$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_i^t = M_i^\infty \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N_i^t = N_i^\infty \geq 0.$$

При цьому, усі початкові значення регіональних мас M_i та N_i суттєво змінюються і лише деякі з них залишаються строго додатними.

Сучасні багатопозиційні конфліктні середовища – від військових операцій до конкурентних економічних та екологічних систем – характеризуються не лише перерозподілом ресурсів, але й закономірними втратами під час взаємодії сторін. Запроваджена у роботі модель із урахуванням регіональних втрат дозволяє формалізувати та аналізувати ці процеси, доводячи збіжність траєкторій до стійких фіксованих точок. Отримані результати актуальні для теорії динамічних систем, теорії ігор та оптимального управління у середовищах із невизначеністю.

Робота виконана спільно з В.Д. Кошманенко за часткової фінансової підтримки проєкту "Математичне моделювання складних систем та процесів безпекового характеру" (0125U000299).

1. Кошманенко В. Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наукова Думка, 2016. – 287.
2. Кошманенко В. Д. Формула конфліктної динаміки // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2020. – 17, № 2. – С. 113–149.

ANALYSIS OF THE OPTIMAL STRATEGY IN A THREE-POSITION CONFLICT GAME WITH LOSS CONSIDERATION

This study investigates dynamic processes in a conflict game between two opponents competing for control over a resource space partitioned into three regions. A mathematical model of conflict dynamical systems is developed, incorporating regional mass losses during interactions. A theorem on the convergence of trajectories to fixed points is proved, and optimal strategies for distributing initial numerical masses to minimize losses in a sequence of conflict collisions are analyzed.