Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»
27–29 травня 2024 р., Львів

УДК 517.927

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НАЙБІЛЬШ ЗАГАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

Віталій Солдатов

Інститут математики НАН України,
soldatov@imath.kiev.ua, soldatovvo@ukr.net

Розглянемо на скінченному інтервалі (a, b) лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь першого порядку

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{1}$$

$$By = c, \tag{2}$$

де довільно задано числа $m, s, r \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, матрицю-функцію $A(\cdot) \in (C^{(s-1)})^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot) \in (C^{(s-1)})^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^r$, та лінійний неперервний оператор $B\colon (C^{(s)})^m \to \mathbb{C}^r$.

Крайова умова (2) задає r скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь першого порядку. Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. У випадку $r > m$ крайова задача (1), (2) є *перевизначеною*, а при $r < m$ — *недовизначеною*. Розв'язок крайової задачі (1), (2) ми інтерпретуємо як вектор-функцію $y(\cdot) \in (C^{(s)})^m$, що задовольняє рівняння (1) на (a, b), і рівність (2), яка задає r скалярних крайових умов.

Крайова умова (2) є найбільш загальною для цього рівняння. Вона покриває всі відомі типи класичних крайових умов, такі як умови задачі Коші, багатоточкові крайові умови, інтегральні та інтегро-диференціальні умови, і різні некласичні крайові умови, тобто умови, які містять похідні шуканої вектор-функції порядку β, де $1 \leq \beta < s$.

Подамо неоднорідну крайову задачу (1), (2) у формі операторного рівняння

$$(L, B)y = (f, c),$$

де (L, B) позначає лінійний оператор на парі банахових просторів

$$(L, B)\colon (C^{(s)})^m \to (C^{(s-1)})^m \times \mathbb{C}^r. \tag{3}$$

Теорема 1. *Лінійний оператор* (3) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом* $m - r$.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (C^{(s)})^{m\times m}$ єдиний розв'язок наступного лінійного однорідного матричного рівняння з початковою умовою Коші:

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = O_m, \quad t \in (a,b), \quad Y(a) = I_m. \tag{4}$$

Тут, O_m — нульова, а I_m — одинична матриці розмірності $m \times m$. Єдиний розв'язок задачі Коші (4) належить простору $(C^{(s)})^{m\times m}$.

Позначимо через $M(L,B) \in \mathbb{C}^{m\times r}$ числову матрицю, у якої j-й її стовпець є результатом дії оператора B на j-й стовпчик матриці-функції $Y(\cdot)$. Таку матрицю називаємо характеристичною для крайової задачі (1), (2). Нагадаємо, що m — це кількість скалярних диференціальних рівнянь системи (1), а r — кількість скалярних крайових умов.

Теорема 2. *Вимірності ядра і коядра оператора* (3) *дорівнюють відповідно вимірностям ядра і коядра характеристичної матриці.*

З теореми 2 випливає критерій оборотності оператора (L,B), тобто критерій однозначної розв'язності розглянутої задачі на класі $(C^{(s)})^m$.

Теорема 3. *Оператор* (L,B) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли* $r = m$ *і квадратна матриця* $M(L,B)$ *невироджена.*

Подібні крайові задач у просторах Соболєва розглянуто в [1].

1. *Mikhailets V., Atlasiuk O.* The solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev spaces // Banach J. Math. Anal. – 2024, 18(2), 12. DOI 10.1007/s43037-023-00316-8

ABOUT SOLVABILITY OF THE MOST GENERAL LINIAR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN SPACES OF SMOOTH FUNCTIONS

We study systems of linear ordinary differential equations with the most general inhomogeneous boundary conditions in spaces of smooth functions on a finite interval, including cases of overdetermined or underdetermined boundary conditions. We show that this problem induces a Fredholm operator on appropriate pairs of the spaces, find its kernel and cokernel, and establish the criterion of its invertibility.