Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»
27–29 травня 2024 р., Львів

УДК 517.95

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ОПЕРАТОРАМИ ЛЕЖАНДРА

Антон Кузь

ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України,
kuz.anton87@gmail.com

Диференціальний оператор $\mathcal{S}_\alpha(d/dx)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ дія якого на функцію $y(x)$ задається виразом вигляду

$$\mathcal{S}_\alpha\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{\sin^{2\alpha+1}(x)}\frac{d}{dx}\left(\sin^{2\alpha+1}(x)\frac{d}{dx}\right)$$

називається оператором Лежандра і виникає у кутовій частині багатовимірного оператора Лапласа у сферичній системі координат.

Розглядається така задача: в області $D = \{(t,x) : 0 < t \leqslant T < \pi, x \in (0,\pi)\}$ необхідно побудувати розв'язок $u(t,x)$ рівняння

$$\mathcal{S}_\nu\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u = a^2\mathcal{S}_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad \nu,\mu > -\frac{1}{2},\ \nu \neq \mu, \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

який по змінній t задовольняє умови

$$\int_0^T \sin^{r_1}(t)u(t,x)dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^T \sin^{r_2}(t)u(t,x)dt = \varphi_2(x), \tag{2}$$

де $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ та за змінною x функція $u(t,x)$ справджує умови

$$\lim_{x\to 0+}|u(t,x)| < +\infty, \quad \lim_{x\to\pi-}|u(t,x)| < +\infty. \tag{3}$$

Позначимо $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant m, m \in \mathbb{N}\}$,

$$\lambda_{m,n} = \sqrt{(n-m)(n+m+1)}, \quad n \in \mathbb{N}_m,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a^2\lambda_{m,n}^2 + (2\nu+1)^2} - 1\right)$$

Через $\Delta_{m,n}(T)$, $n \in \mathbb{N}_m$, позначимо визначник

$$\Delta_{\nu,m,n}(T) := \begin{vmatrix} \displaystyle\int_0^T \frac{P_\alpha^\nu(\cos t)}{\sin^{\nu-r_1}(t)}dt & \displaystyle\int_0^T \frac{Q_\alpha^\nu(\cos t)}{\sin^{\nu-r_1}(t)}dt \\ \displaystyle\int_0^T \frac{P_\alpha^\nu(\cos t)}{\sin^{\nu-r_2}(t)}dt & \displaystyle\int_0^T \frac{Q_\alpha^\nu(\cos t)}{\sin^{\nu-r_2}(t)}dt \end{vmatrix}, \tag{4}$$

де $P^{\nu}_{\alpha}(y), Q^{\nu}_{\alpha}(y)$ — приєднані функції Лежандра першого та другого роду відпровідно.

Показано, що за виконання умов

$$r_j > \max\{-1, 2\nu - 1\}, \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_m \quad \Delta_{\nu,m,n}(T) \neq 0. \tag{6}$$

задача (1)-(3) має не більше одного розв'язку, який зображується у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{j,q=1}^{2} \frac{\Delta^{j,q}_{\nu,m,n}(T)}{\Delta_{\nu,m,n}(T)} \varphi_{j,m,n} \frac{u_q(\cos t)}{\sin^{\nu}(t)} \right) w_{m,n}(x), \tag{7}$$

де $\Delta^{j,q}_{\nu,m,n}(T)$, $j, q = 1, 2$, — алгебричне доповнення у визначнику $\Delta_{\nu,m,n}(T)$ елемента j-го рядка та q-го стовпця, $u_1 := P^{\nu}_{\alpha}$, $u_2 := Q^{\nu}_{\alpha}$,

$$w_{m,n}(x) = \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)}{2(n+m)!}} \cdot \frac{P^m_n(\cos x)}{\sin^m(x)}, \quad n \in \mathbb{N}_m \quad m \in \mathbb{N}.$$

Встановлено, що існування розв'язку (7) задачі (1)-(3) пов'язане, взагалі кажучи, з проблемою малих знаменнків [1]. Виділено часткові випадки задачі, коли проблема малих знаменників відсутня.

1. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наукова думка, 2002. – 420 с.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUZTION WITH LEGENDRE OPERATORS

Problem with integral conditions with respect to chosen variable for second order partial differrential equation with singular Legendre operators is considered. Conditions of correctness of the considered problem are established. It is shown that existence of the solution is related to the problem of small denominators. Conditions on parameters of the consedered problem when small denominators don't arise are found.