

УДК 517.5

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО-БЕСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Світлана Гембарська, Ігор Романюк, Нестор Василюк

Волинський національний університет імені Лесі Українки,
gembarskaya72@gmail.com, igromaniuk@ukr.net, vasyliuk.nestor@vnu.edu.ua

Досліджуються класи $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних [1], де $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, а ω – задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l , що задовольняє умови (S^α) та (S_l) , які називаються умовами Барі-Стечкаєва [2]. При певному виборі функції Ω класи $B_{p,\theta}^\Omega$ є аналогами відомих класів Нікольського-Бесова $B_{p,\theta}^r$ [3].

Розглянемо множину тригонометричних поліномів вигляду

$$T(Q_n) = \{t : t(x) = \sum_{k \in Q_n} c_k e^{i(k,x)}, c_k \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^d\},$$

де Q_n – східчастий гіперболічний хрест (див., наприклад, [1]).

Нехай X – деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$.

Для функції $f \in X$ позначимо через

$$E_{Q_n}(f)_X = \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_X$$

величину найкращого наближення функції f за допомогою поліномів із множини $T(Q_n)$.

Відповідно для деякого функціонального класу $F \subset X$ покладемо

$$E_{Q_n}(F)_X = \sup_{f \in F} E_{Q_n}(f)_X.$$

Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського-Бесова $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторі $B_{q,1}$, норма в якому є більш сильною, ніж L_q -норма [4].

Сформулюємо деякі з одержаних результатів.

Теорема 1. *Нехай $d \geq 2$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, де ω задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l) . Тоді виконується співвідношення*

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{p,1}} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Теорема 2. *Нехай $d \geq 2$, $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, де ω задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ і умову (S_l) . Тоді виконується співвідношення*

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{q,1}} \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Співставляючи результати теорем 1 та 2 із відповідними оцінками величин $E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_p$ та $E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_q$ [1], приходимо до висновку: в багатовимірному випадку (окрім випадку $\theta = 1$) порядкові оцінки найкращих наближень класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторах $B_{q,1}$ та L_q є різними.

1. *Yongsheng S., Heping W.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // *Tr. Mat. Inst. Steklova.* – 1997. – Т. 219. – С. 356–377.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // *Тр. Моск. мат. о-ва.* – 1956. – Т. 5. – С. 483–522.
3. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.* – 1989. – Т. 187. – С. 143–161.
4. *Гембарська С.Б., Романюк І.А., Федунік-Яремчук О.В.* Характеристики лінійної та нелінійної апроксимаційні характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського-Бесова // *Укр. мат. вісник.* – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 161–185.

BEST APPROXIMATIONS OF THE NIKOL'SKII-BESOV-TYPE CLASSES OF PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

We study the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ of periodic functions of several variables with $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, where ω is a given function (of one variable) of the type of a mixed modulus of continuity of the order l , that satisfies the conditions (S^α) and (S_l) , which are called the Bari-Stechkin conditions. For a certain choice of function Ω , the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ are analogues of the well-known Nikol'skii-Besov classes $B_{p,\theta}^r$. We obtain exact order estimates of the best approximations of the Nikol'skii-Besov-type classes of periodic functions of several variables $B_{p,\theta}^\Omega$ in the space $B_{q,1}$, which norm is stronger than the L_q -norm. In the multidimensional case (except for the case $\theta = 1$) the order estimates of the best approximations of the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ in the spaces $B_{q,1}$ and L_q are different.