UDC 517.927

ODE systems with boundary inhomogeneous conditions containing higher–order derivatives

Olena Atlasiuk, Volodymyr Mikhailets

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
hatlasiuk@gmail.com, vladimir.mikhailets@gmail.com

We arbitrarily choose a finite interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ and the following parameters: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{m, r, l\} \subset \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$.

As usual, $W_p^{n+r}\big([a, b]; \mathbb{C}\big) = \big\{y \in C^{n+r-1}([a, b]; \mathbb{C})\colon y^{(n+r-1)} \in AC[a, b],\ y^{(n+r)} \in L_p[a, b]\big\}$ is a complex Sobolev space. This space is Banach with respect to the norm

$$\|y\|_{n+r,p} = \sum_{k=0}^{n+r} \|y^{(k)}\|_p,$$

with $\|\cdot\|_p$ standing for the norm in the Lebesgue space $L_p\big([a, b]; \mathbb{C}\big)$.

We consider a linear boundary-value problem

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \tag{1}$$

$$By = c, \quad t \in (a, b), \tag{2}$$

We suppose that the matrix-valued functions $A_{r-j}(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$, vector-valued function $f(\cdot) \in (W_p^n)^m$, vector $c \in \mathbb{C}^l$, linear continuous operator

$$B\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^l \tag{3}$$

are arbitrarily chosen and that the vector-valued function $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$ is unknown.

If $l < rm$, then the boundary conditions are underdetermined; if $l > rm$, then they are overdetermined.

The boundary condition (2) consists of l scalar condition for system of m differential equations of r-th order, we representing vectors and vector-valued functions as columns. A solution to the boundary-value problem (1), (2) is understood as a vector-valued function $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$ that satisfies both equation (1) (everywhere if $n \geq 1$, and almost everywhere if $n = 0$) on (a, b) and equality (2). If the parameter n increases, so does the class of linear operators (3). When $n = 0$, this class contains all operators that set the general boundary conditions described above.

We rewrite the problem (1), (2) in the form of a linear operator equation $(L, B)y = (f, c)$. Here, (L, B) is a bounded linear operator on the pair of Banach spaces

$$(L, B)\colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l. \tag{4}$$

Theorem 1. *The bounded linear operator* (4) *is a Fredholm one with index* $rm - l$.

For each number $i \in \{1, \dots, r\}$, we consider the family of matrix Cauchy problems with the initial conditions:

$$Y_i^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_i^{(r-j)}(t) = O_m, \quad t \in (a, b),$$

$$Y_i^{(j-1)}(a) = \delta_{i,j} I_m, \quad j \in \{1, \dots, r\}.$$

Let $[BY_i]$ denote the number $l \times m$ matrix whose j-th column is the result of the action of B on the j-th column of the matrix-valued function Y_i.

Definition 1. A bloc rectangular number matrix

$$M(L, B) := \big([BY_1], \dots, [BY_r] \big) \in \mathbb{C}^{l \times rm} \tag{5}$$

is called the characteristic matrix of the boundary-value problem (1), (2). Note that this matrix consists of r rectangular block columns $[BY_k] \in \mathbb{C}^{m \times l}$.

Theorem 2. *The theorem of the kernel and co-kernel of the operator* (4) *are equal to the dimensions of the kernel and co-kernel of the characteristic matrix* (5), *respectively.*

1. Mikhailets V., Atlasiuk O. *The solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev spaces.* Banach Journal of Mathematical Analysis 2024, **18** (2), article number 12, 23p. DOI: 10.1007/s43037-023-00316-8

Системи звичайних диференціальних рівнянь із неоднорідними крайовими умовами, що містять похідні високих порядків

Розроблено загальну теорію розв'язності лінійних неоднорідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку в просторах Соболева. Крайові умови допускаються як перевизначені, так і недовизначені. Вони можуть містити похідні невідомої вектор-функції, цілі чи дробові порядки яких перевищують порядок диференціального рівняння. Подібні проблеми природно виникають у різних застосуваннях. Теорія вводить поняття прямокутної числової характеристичної матриці задачі. Індекс і числа Фредгольма цієї матриці збігаються відповідно з індексом і числами Фредгольма неоднорідної крайової задачі. На відміну від індексу, числа Фредгольма (тобто вимірності ядра та коядра задачі) нестійкі навіть щодо малих (у нормі) скінченновимірних збурень. Наведено приклади, в яких характеристичну матрицю можна знайти явно.