

УДК 517.54

Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів неперетинних багатозв'язних областей

Ярослав Заболотний

Інститут математики НАН України, yaroslavzabolotnii@gmail.com

Нехай \mathbb{N} і \mathbb{R} – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, \mathbb{C} – комплексна площина, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $r(B, a)$ – внутрішній радіус області B відносно точки a .

В даній роботі вивчається наступна проблема:

Проблема 1. Знайти максимум виразу $\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a_k , $k = \overline{1, n}$ – деякі фіксовані точки розширеної комплексної площини, області B_k , $k = \overline{1, n}$, такі, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, причому $B_i \cap B_j = \emptyset$ для $1 \leq i, j \leq n$ та $i \neq j$.

Для $n = 2$ дана проблема була розв'язана М.О. Лаврентьєвим в 1934р., для $n = 3$ – Г.М. Голузіним в 1951 р., для $n = 4$ – Г.В. Кузьміною в 1980 р. Для $n \geq 5$ дана проблема на даний момент не розв'язана.

Правильна наступна теорема:

Теорема 1. [1] Нехай $n \in \mathbb{N}$ – деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$ – деякий набір відповідно фіксованих точок і областей комплексної площини, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Тоді правильна наступна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

М.О. Лебедев в монографії [2, с. 32–33] розглядав наступну екстремальну задачу про добуток конформних радіусів:

Проблема 2. На площині w дано n різних фіксованих точок a_k , $k = \overline{1, n}$, $n > 3$. Що можна сказати про максимум добутку

$$\prod_{k=1}^n R^{\gamma_k}(B_k, a_k) \longrightarrow \max, \quad \gamma_k > 0, \quad n > 3,$$

де B_k , $k = \overline{1, n}$ – довільні взаємно неперетинні однозв'язні області, такі, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$?

На даний момент ця задача в загальному випадку не розв'язана, вдалося отримати її розв'язок тільки в часткових випадках. Ця задача є безпосереднім узагальненням попередніх результатів М.О. Лаврентьєва, Г.М. Голузіна, З. Нехарі, Дж. Дженкінса.

Правильна наступна теорема:

Теорема 2. [3] Нехай n - деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k , $k = \overline{1, n}$, деякий набір фіксованих точок комплексної площини, і нехай γ_k , $k = \overline{1, n}$ - деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k}{2n-2}$ для $\forall k = \overline{1, n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, правильна наступна нерівність:

$$\prod_{k=1}^n (r(B_k, a_k))^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \gamma_k} \prod_{i,j=1, i < j}^n |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2} (\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \gamma_k)}.$$

1. Бахтін О. К., Заболотний Я. В. Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Український математичний журнал. - 2021. - № 1. - С. 9– 22.
2. Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. - М.: Наука, 1975. - 336 с.
3. Бахтін О. К., Заболотний Я. В. Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей // Український математичний журнал. - 2021. - № 9. - С. 1155– 1169.

Estimates of the products of some powers of the inner radii of non-overlapping multiconnected domains

In this paper two problems of geometric function theory about the extreme partition of the complex plane are consider, and in these problems some estimates of maximum of the product of some powers of inner radii of n disjoint domains with respect to n arbitrary points of complex plane are obtained. Estimates that have been found in this paper can be applied in various problems of geometric theory of functions.