

УДК 517.51

Апроксимаційні характеристики ізотропних класів $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$

Сергій Янченко

Інститут математики НАН України, yan.sergiy@gmail.com

Досліджується питання наближення ізотропних класів $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ (див, наприклад, [1, 2]) функцій багатьох змінних у просторах Лебега $L_q(\mathbb{R}^d)$. У випадку $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $(p, q) \neq \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій із даних класів цілими функціями зі спектром зосередженим на множинах лебегова міра яких не перевищує M .

Нехай \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, – d -вимірний евклідів простір з елементами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$. $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, – простір вимірних на \mathbb{R}^d функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ зі стандартною скінченною нормою.

Означимо апроксимативну характеристику, яку будемо досліджувати.

Нехай \mathcal{L} позначає довільний скінченний набір чисел $s \in \mathbb{Z}_+$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{L}) = \bigcup_{s \in \mathcal{L}} \Gamma_{2^s}$, де $\Gamma_{2^s} = D_{2^s} - D_{2^{s-1}}$ при $s \geq 1$ і $\Gamma_{2^0} = D_{2^0}$, а $D_{2^s} =$

$D_{2^s, \dots, 2^s}$ – паралелепіпед: $|\lambda_j| < 2^s$, $j = \overline{1, d}$, $s \geq 0$.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, покладемо

$$S_{\mathfrak{M}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{s \in \mathcal{L}} f_{(s)}(\mathbf{x}),$$

де

$$f_{(s)} = f_{2^s} = \int_{\Gamma_{2^s}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda}, s \geq 1,$$

і

$$f_{(0)} = f_{2^0} = \int_{\Gamma_{2^0}} \tilde{f}(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\lambda},$$

а $\tilde{f}(\boldsymbol{\lambda})$ – перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

Зауважимо, що $S_{\mathfrak{M}}(f, \mathbf{x})$ є цілою функцією, яка належить простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ і носій її перетворення Фур'є зосереджений в області \mathfrak{M} , тобто $\text{supp } S_{\mathfrak{M}}(f, \mathbf{x}) \subseteq \mathfrak{M} = \bigcup_{s \in \mathcal{L}} \Gamma_{2^s}$.

Далі для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо апроксимативну характеристику

$$e_M^{\tilde{\mathfrak{F}}}(f)_q = \inf_{\mathfrak{M}: \text{mes}\mathfrak{M} \leq M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_q,$$

де $M > 0$, $\text{mes}A$ — лебегова міра множини A .

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий клас функцій, то покладемо

$$e_M^{\tilde{\mathfrak{F}}}(F)_q = \sup_{f \in F} e_M^{\tilde{\mathfrak{F}}}(f)_q. \quad (1)$$

Теорема 1. *Нехай $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $(p, q) \neq \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, $1 \leq \theta \leq \infty$.*

Тоді, якщо $r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, то має місце порядкове співвідношення

$$e_M^{\tilde{\mathfrak{F}}}(B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d))_q \asymp M^{-\frac{r}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Зауважимо, що виконання умови $r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ забезпечує належність функцій $f \in B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ до простору $L_q(\mathbb{R}^d)$.

У випадку $d = 1$ ізотропні класи $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R})$ тотожні класам функцій з домінуючою мішаною похідною $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R})$ [3]. У випадку $2 < p = q < \infty$, $d = 1$, оцінка величини (1) є новою й для класів $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{R})$.

1. *Nikol'skii S. M.* Embedding theorems for the classes of generalized functions // Sib. Math. J. – 1968. – **9**, No. 5. – P. 821–837.
2. *Lizorkin P. I.* Generalized Hölder spaces $B_{p,\theta}^{(r)}$ and their relation with the Sobolev spaces $L_p^{(r)}$ // Sib. Math. J. – 1968. – **9**, No. 5. – P. 837–858.
3. *Amanov T. I.* Representation and imbedding theorems for function spaces $S_{p,\theta}^{(r)} B(\mathbb{R}_n)$ and $S_{p,\theta}^{(r)*} B$, $(0 \leq x_j \leq 2\pi; j = 1, \dots, n)$ // Tr. Mat. Inst. Steklova. – 1965. – **77**. – P. 5–34. (in Russian)

Approximation characteristics of the isotropic functional classes $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$

We investigate the isotropic classes $B_{p,\theta}^r(\mathbb{R}^d)$ of non-periodic functions of several variables and establish the exact-order estimates for the approximation of functions from these classes in the metric of the Lebesgue space $L_q(\mathbb{R}^d)$, by entire functions of exponential type with some restrictions for their spectrum in the case $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $(p, q) \neq \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, $d \geq 1$.