Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»
25–27 травня 2022 р., Львів

УКД 517.95+511.2

ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ФАКТОРИЗОВАНИМ ОПЕРАТОРОМ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Іван Тимків

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, e-mail tymkiv_ if@ukr.net

Нехай $L = -\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, — диференціальний вираз, коефіцієнти $p_{ij}(x), q(x)$, $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, якого є додатними і досить гладкими в обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^p$ з гладкою межею ∂G; $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, — додатні власні значення задачі $LX + \lambda X = 0$, $X|_{\partial G} = 0$, яким відповідає повна ортонормована система власних функцій $\{X_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$; $E_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, — простір функцій $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$ зі скінченною нормою $\|\varphi; E^b_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \lambda_k^{2\alpha} \exp(2\beta\lambda_k)}$.

В області $D = (0, T) \times G$ розглянемо задачу

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_q(t)L\right)u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{r=0}^{N_j} c_r^j(L)\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\Big|_{t=t_j} = \varphi_j(x),\ 0 \leq N_j \leq n-1, j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2}$$

$$L^m u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0,\ m \in \{0, 1, \ldots, (\theta - 1)\}, \quad \Sigma = [0,T] \times \partial G, \tag{3}$$

де $a_q(t) \in C^{n-q}([0,T])$, $a_q(t) > 0$, $a_q(t) \neq a_j(t)$, $q \neq j$, $t \in [0,T]$, $q, j \in \{1, \ldots, n\}$; $c_r^j(L) = \sum\limits_{i=0}^{M} c_{r,i}^j L^i$, $c_{r,i}^j \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$, $c_{0,M}^j \neq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T$, $\theta = \max\{n, M\}$.

Для того щоб встановити коректну розв'язність задачі (1) – (3) позначимо: $I_0(t) := 0$, $I_j(t) = -\int\limits_0^t a_j(\tau)d\tau$, $\Theta_{j,k}(t) = \exp((I_j(t) - I_{j-1}(t))\lambda_k)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$; $u_{k,1}(t) = \Theta_{1,k}(t)$, $u_{k,2}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)d\xi_1$, $u_{k,3}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \left(\Theta_{2,k}(\xi_1)\int\limits_0^{\xi_1} \Theta_{3,k}(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1$, …, $u_{k,n}(t) = \Theta_{1,k}(t) \times \int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)$

$\ldots\left(\int\limits_0^{\xi_{n-2}}\Theta_{n,k}(\xi_{n-1})d\xi_{n-1}\right)\ldots d\xi_1;\quad d = N_1+\ldots+N_n-\max\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}}N_j+nM,\quad A_1=\max\limits_{1\le j\le n-1}\left\{\max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t(a_j(\tau)-a_{j+1}(\tau))d\tau\right\}$, $A_2=\max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t a_n(\tau)d\tau,\ A_3=\max\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{t\in[0,T]}\{a_j(t)\}$.

Характеристичний визначник задачі (1) – (3) зображується формулою

$$\Delta(k,\vec{t})=\det\left\|\sum_{r=0}^{N_j}c_r^j(\lambda_k)u_{k,q}^{(r)}(t_j)\right\|_{j,q=1}^{n},\quad \vec{t}=(t_1,\ldots,t_n).$$

Теорема 1. *Нехай* $\forall k\in\mathbb{N}\quad\Delta(k,\vec{t})\neq 0$ *та існують сталі* $\omega,\nu\in\mathbb{R}$

$$|\Delta(k,\vec{t})|>\lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k).\tag{4}$$

Якщо $f\in([0,T];E_{\alpha_1,\beta_1})$, $\varphi_j\in E_{\alpha_1,\beta_2}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_1=\alpha+\omega+d+n$, $\beta_1=\beta+\nu+n(n-1)A_1/2$, $\beta_2=\beta_1+(n-1)A_1+A_2$, *то існує единий розв'язок задачі* (1) – (3) *з простору* $C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

За допомогою метричного підходу [1] з'ясовано питання про можливість виконання нерівності (4).

Теорема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^n$*) векторів* $(c_{0,M}^1,\ldots,c_{0,M}^n)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t}\in[0,T]^n$ *нерівність* (4) *виконується при* $\omega>n^2p/4-nM$, $\nu=n(n+1)A_3T/2$.

Отримані результати доповнюють дослідження, проведені в [1, 2].

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

2. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, №2. – С. 120–130.

PROBLEM WITH MULTIPOINT CONDITIONS FOR PARABOLIC EQUATION WITH VARIABL COEFFICIENTS

?n bounded cylindrical domains with local multipoint conditions on time variable for parabolic equation with factorized operator with coefficients depended on time and spatial variable are established. The conditions of existence and uniqueness of solution of the prolem are established.