Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»
25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 517.5

ДЕЯКІ ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ БЕЛЬТРАМІ

Марія Стефанчук

Інститут математики НАН України, stefanmv43@gmail.com

Нехай G – область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ – вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z\,, \tag{1}$$

де $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$, $f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$.

Нехай $\sigma : G \to \mathbb{C}$ – вимірна функція і $m \geqslant 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) наступне рівняння:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\,|f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{2}$$

де f_r і f_θ – частинні похідні відображення f по r і θ, відповідно. Рівняння (2) можна записати у комплексній формі:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1}\, f_z. \tag{3}$$

Всюди далі будемо вважати, що $m > 0$.

Нехай $q > 0$, $\alpha > 0$ і H – множина всіх регулярних гомеоморфізмів $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ класу Соболєва $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B})$, які задовольняють рівняння (3) м.с., $f(0) = 0$ і

$$\operatorname{Im} \overline{\sigma}(z) \geqslant q|z|^{-\alpha-1} \exp(|z|^{-\alpha}) \tag{4}$$

для м.в. $z \in \mathbb{B}$.

Теорема 1. *Для всіх $r \in [0, 1)$ справедлива рівність*

$$\max_{f\in H} |f(B_r)| = \pi \left(1 + \beta \left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{2}{m}}\,, \tag{5}$$

де $\beta = \frac{qm}{\alpha}$, при цьому максимум функціоналу досягається на відображенні

$$f_*(z) = \begin{cases} \left(1 + \beta\left(e^{\frac{1}{|z|^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{1}{m}} \frac{z}{|z|}\,, & \text{якщо } z \neq 0,\\ 0, & \text{якщо } z = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Нижче знайдено максимум функціоналу $l_r(f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$ на класі H.

Наслідок 1. *Для всіх* $r \in [0,1)$ *справедлива рівність*

$$\max_{f\in H} l_r(f) = \left(1 + \beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{1}{m}}, \tag{7}$$

де $\beta = \frac{qm}{\alpha}$*, при цьому максимум функціоналу досягається на відображенні* (6).

Наступне твердження є екстремальним аналогом експоненціального типу відомої леми Ікоми–Шварца, див. [2].

Наслідок 2. *Для будь-якого відображення* $f \in H$ *виконується нерівність*

$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\, e^{\frac{1}{m|z|^\alpha}} \leqslant \left(\frac{\alpha}{qm}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

При цьому, знак рівності досягається на відображенні (6).

1. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 136 с.
2. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – V. 25. – P. 175–203.
3. *Salimov R. R., Stefanchuk M. V.* Logarithmic Asymptotics of the Nonlinear Cauchy–Riemann–Beltrami Equation // Ukr. Math. J. – 2021. – Vol. 73. – P. 463–478.
4. *Салімов Р. Р., Стефанчук М. В.* Про одну екстремальну задачу для нелінійних систем типу Коші–Рімана–Бельтрамі // Праці ІПММ НАН України. – 2020. – Т. 34. – С. 109–115.
5. *Salimov R. R., Stefanchuk M. V.* On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation // J. Math. Sci. – 2020. – Vol. 248. – P. 203–216.
6. *Golberg A., Salimov R.* Nonlinear Beltrami equation // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 65, no. 1. – P. 6–21.

SOME EXTREMAL PROBLEMS FOR SOLUTIONS OF THE NONLINEAR BELTRAMI EQUATION

In the present paper, it is found an exact upper estimate of exponential type of the area of the image of the disk, which is analogous to the known result by M.O. Lavrentyev. As a result, the extremal problem for the functional of minimal value on the circle is solved. In addition, an extreme analogue of the famous Icoma–Schwartz lemma was obtained. Also, we find here a mapping on which the received estimates are achieved.