Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»
25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 517.95

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З РАДІАЛЬНОЮ СИМЕТРІЄЮ

[1] **Вікторія Славич,** [1,2] **Антон Кузь**

[1] НУ "Львівська політехніка
[2] ІППММ ім.Я.С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

В області $D := \{(t,r) : t \in (0,T), r \in (0,R)\}$ розглядаємо таку задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{G}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right), \tag{1}$$

$$u(t,R) = 0, \quad \frac{1}{T}\int_0^T u(t,r)dt = \varphi(r), \tag{2}$$

де $\varphi(r)$ — задана функція, G, ρ, ν — задані додатні сталі.

Задачі (1), (2) описує рух рідини густиною ρ в капілярній трубці радіуса R під дією постійного тиску G, де $u(t,r)$ – розподіл швидкостей рідини в залежності від часу та відстані r від осі трубки [1]. Тут μ – коефіцієнт в'язкості, ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості, $\nu = \mu/\rho$. Величина $\varphi(r)$ — усереднене значення швидкостей за проміжок часу T.

Побудовано розв'язок задачі (1), (2), який зображується формулою

$$\begin{aligned} u(t,r) = {}& \frac{G}{4\mu}(R^2 - r^2) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{2R^2 \nu G T}{\mu j_{0,n} \Delta_n} - \frac{\nu T (j_{0,n})^2 \varphi_n}{R^2 \Delta_n} \right) \exp\left(-\nu \lambda_n t\right) J_0\left(\frac{j_{0,n}}{R} r \right), \end{aligned} \tag{3}$$

де $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду з індексом 0, $j_{0,n}$ — n-ий додатній нуль функції J_0, $J_0(j_{0,n}) = 0$; A_n — стала нормування, визначена за формулою $A_n = \frac{\sqrt{2}}{RJ_1(j_{0,n})}$, $\Delta_n = 1 - \exp(-\nu\lambda_n T)$, φ_n — коефіцієнти Фур'є-Бесселя функції φ, $\varphi_n = \int_0^R \varphi(r) J_0(j_{0,n} r/R) r dr$.

$L_{2,r}(0,R)$ – простір функцій $f(r)$ таких, що $f(R) = 0$ та

$$\int_0^R r f^2(r) dr < +\infty.$$

$H^k(0,R)$ – простір функцій $f \in L_{2,r}(0,R)$ таких, що

$$\|f; H^k(0,R)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(1+j_{0,n}^2)^k |f_n|^2 < +\infty.$$

$C^m((0,T); H^k(0,R))$ – простір функцій $u(t,r)$ таких, що $\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in H^k$ для кожного $j = 0, 1, \dots, m$, із нормою

$$\|u; C^m((0,T); H^k(0,R))\| = \sum_{j=0}^{m} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j}; H^k(0,R) \right\|.$$

Теорема 1. *Нехай* $\varphi \in H^{2m+k+2}(0,R)$ *та* $k < (1-4m)/2$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1),(2) *із простору* $C^m((0,T); H^k(0,R))$ *який зображується формулою* (3), *причому виконується нерівність*

$$\|u; C^m((0,T); H^k)(0,R)\| \leqslant C_1 \|\psi; H^{2m+k+2}(0,R)\|,$$

де

$$\psi(r) = \frac{G}{4\mu}(R^2 - r^2) - \varphi(r).$$

1. *Batchelor G. K.* An Introduction to Fluid Dynamics. – Cambridge: University Press, 1970. – 778 p.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR HEAT EQUATION WITH RADIAL SYMMETRY

The existence of a solution of a mixed boundary value problem with an integral condition for the heat equation with radial symmetry is established. The solution of the problem is constructed in the form of Fourier-Bessel series by zero-order Bessel functions