Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»,
25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 512.64

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ІНВАРІАНТНИХ МНОЖНИКІВ МАТРИЦІ ТА ЇЇ ПІДМАТРИЦІ

Андрій Романів

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, romaniv_a@ukr.net

Нехай R – комутативна область елементарних дільників з $1 \neq 0$. Нагадаємо, що R є областю елементарних дільників [1], якщо кожна $m \times n$ матриця A над R має властивість канонічної діагональної редукції. А саме

$$A \sim \mathrm{E} = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0), \ \varepsilon_{i-1} | \varepsilon_i, \ i = 1, \ldots, k,$$

де матриця E називається формою Сміта або канонічною діагональною формою, ε_i – інваріантні множники матриці A. Позначення $a|b$ означає, що елемент a ділить елемент b.

Для дослідження матриць та їх підматриць використовують властивості інваріантних множників. У роботі [2] вказані умови, за яких матриця може бути доповнена рядком до іншої матриці над комутативною областю елементарних дільників. Над цією ж областю у [3] наведено необхідні та достатні умови, щоб $m \times s$ матриця була підматрицею деякої оборотної $n \times n$ матриці. У цьому повідомленні вказується явний вигляд інваріантних множників матриці, яка отримується доповненням до іншої матриці заданим рядком над областю елементарних дільників.

Розглянемо $(m+1) \times n$ матрицю $B \in R$. Нехай $m \geq n$ та матриця B містить матрицю A як перших m рядків. Припустимо, що $rangA = k < n$ та $rangB = k+1$. Так як $B = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ то, матрицю B запишемо у вигляді:

$$B=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & \\ & \varepsilon_2 & & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \varepsilon_k & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Теорема. *Нехай* R *– комутативна область елементарних дільників* з $1 \neq 0$*.,* $m \times n$ *мат*риця $A \in R$, $A \sim \mathrm{E} = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0)$, $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$. *І нехай* $\delta_1, \ldots, \delta_{k+1} \in R$ *ненульові елементи такі, що* $\delta_i \mid \delta_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$. *Якщо виконується умова* $\delta_1 \mid \varepsilon_1 \mid \delta_2 \mid \varepsilon_2 \mid \cdots \mid \varepsilon_k \mid \delta_{k+1}$, *то матриця вигляду (1), для якої* $b_j = \dfrac{\delta_1 \ldots \delta_j}{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{j-1}}$, $j = 1, \ldots, k+1$, *та* $b_j = 0$, $j > k+1$, *має інваріантні множники* δ_j, $j = 1, \ldots, k+1$.

1. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66.** – P. 464 – 491.
2. *Romaniv A.M., Dzhaliuk N. S.* Some relationships between the invariant factors of matrix and its submatrix over elementary divisor domains. // Applied Problems mech. and math. – 2019. – **17**. – P. 38–41.
3. *Shchedryk V.P.* Arithmetic of matrices over rings // Akademperiodyka, Kyiv. – 2021. – 278 p.

ON PROPERTY OF IVARIANT FACTORS OF THE MATRIX AND ITS SUBMATRIX

It is established the explicit form of invariant factors of the matrix that is obtains by addition to other matrix a single row over elementary divisor domains