Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022», 25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 517

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З МІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

Репетило Софія Михайлівна

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, e-mail RepetyloSofiya@gmail.com

В області $D=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^{p+1}: t\in(0,T)\subset\mathbb{R}^1,\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^p\right\}$, де Ω – обмежена однозв'язна область з гладкою межею Γ, розглянуто задачу

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}} L^s u(t,x)=0, \quad (t,x)\in D, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-2}u}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0}=\varphi_r(x), \quad \left.\frac{\partial^{2r-1}u}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T}=\varphi_{n+r}(x), \quad r=1,\dots,n, \quad x\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$\left. L^q u\right|_{\Sigma}=0, \quad q=0,\dots,n-1, \quad \Sigma=\Gamma\times[0,T], \tag{3}$$

де $a_s\in\mathbb{R}^1$, $a_0\neq 0$; $L:=\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-g(x)$ – диференціальний вираз [1], еліптичний в області Ω, $g(x)\geq 0$, $L^0u=u$, $L^q u=L\left(L^{q-1}u\right)$, $q=1,\dots,n$.

Встановлено [2] умови існування та єдиності розв'язку $u(t,x)\in C^{2n}\left(\overline{D}\right)$ задачі (1) – (3). Розв'язок $u(t,x)$ побудовано у вигляді ряду за системою власних функцій $\Upsilon=\left\{X_k(x),\ k\in\mathbb{N}\right\}$ задачі $LX(x)=-\lambda X(x)$, $\left. X(x)\right|_{\Gamma}=0$, множину власних значень якої позначимо через $\Lambda=\left\{\lambda_k, k\in\mathbb{N}\right\}$.

При розв'язування багатьох прикладних задач вихідні дані не є точними, а відомі лише наближено. Одним із найбільш відомих методів розв'язування задач з наближеними вихідними даними є метод регуляризації [3].

Надалі вважатимемо, що крайові умови (2) задані наближено з похибкою $\delta>0$, тобто відомі $\varphi_j^{\delta}(x)\in L_2(\Omega)$, $q=1,\dots,2n$, такі що

$$\left\|\varphi_j-\varphi_j^{\delta}(x)\right\|_{L_2(\Omega)}\leq\delta,\ q=1,\dots,2n. \tag{4}$$

Нехай виконуються умови коректності задачі (1) – (3) у точній постановці (випадок строго гіперболічного за Петровським рівняння). Тоді при певних значеннях $N = N(\delta)$ в якості регуляризуючого алгоритму [3] для знаходження наближеного розв'язку задачі (1) – (4) можна взяти скінченну суму

$$u_N^\delta(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q,j=1}^{n} \frac{\varphi_{jk}^\delta \beta_q \left(e^{\beta_q(T-t)} + e^{-\beta_q(T-t)}\right) + \varphi_{n+j,k}^\delta \left(e^{\beta_q t} + e^{-\beta_q t}\right)}{\left(S_{n-j}^{(q)}\right)^{-1} (-1)^{n+j} \beta_q \left(e^{\beta_q T} + e^{-\beta_q T}\right) \prod\limits_{s=1, s\neq q}^{n} (\beta_q^2 - \beta_s^2)} X_k(x) \quad (5)$$

де $\varphi_{jk}^\delta(x)$ – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j^\delta(x)$, $q = 1,\dots,2n$; $S_\ell^{(q)}$, $1 \le \ell \le n-1$, – сума всіх можливих добутків елементів $\beta_1^2,\dots,\beta_{q-1}^2$ $\beta_{q+1}^2,\dots,\beta_n^2$, взятих по ℓ штук у кожному добутку, $S_0^{(q)} \equiv 1$; $\beta_j = i\sqrt{\gamma_j \lambda_k}$, $\lambda_k \in \Lambda$, $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ – корені рівняння $\sum\limits_{s=0}^{n} a_s \gamma^{n-s} = 0$.

Теорема. *Для задачі (1) – (4) існує така цілочислова функція* $N = N(\delta)$, $N(\delta) \to \infty$ *при* $\delta \to 0$, *що* $\forall t \in [0,T]$ $\Theta = \max\limits_{t\in[0,T]} \left\| u - u_N^\delta \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Ефективність регуляризації задачі (1) – (4) за допомогою скінченної суми (5) залежить від вибору параметра $N = N(\delta)$. Встановлено, що оптимальним значенням параметра $N(\delta)$ (для фіксованої похибки δ наближення крайових умов) буде те, яке визначає формула $N(\delta) = \left[\left(C\sqrt{\delta} n\right)^{-1/(1+\varepsilon)}\right] + 1$, де C – додатна стала, яка не залежить від k, $0 < \varepsilon < 1$.

У роботі розглянуто частинний випадок задачі (1) – (4), коли $p = 1$, а коефіцієнти рівняння є сталими.

1. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, №6. – С. 883–896.
2. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 19–24.
3. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 1.– С. 49–52.

REGULARIZATION OF THE BOUNDARY–VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR A HIGH-ORDER HYPERBOLIC EQUATION

The boundary value problem with data on the whole boundary of the domain for a linear homogeneous high-order hyperbolic equation with coefficients variable in spatial coordinates is considered. This problem is investigated for the case when the right-hand sides of the boundary conditions are given with an error. Regularizing algorithm for finding the approximate solution of the considered problem is constructed.