

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЦИЛІНДРА ПІД ДІЄЮ ВЛАСНОЇ ВАГИ З ВИКОРИСТАННЯМ ВАРІАЦІЙНОГО ПІДХОДУ

Леся Постолак, Василь Дяків

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, lesya.postolaki@gmail.com

Розглядається осесиметрична задача теорії пружності для скінченного суцільного циліндра під дією власної ваги, бічна поверхня якого закріплена, а торцеві поверхні – вільні від навантажень. Розв'язок задачі подано у вигляді суперпозиції розв'язків двох задач: задачі теорії пружності для неоднорідної системи рівнянь з однорідними умовами на торцях циліндра (основний стан) та задачі теорії пружності для однорідної системи рівнянь з неоднорідними умовами на торцях циліндра (збурений стан).

Компоненти тензора напружень σ_{rr}^0 , σ_{zz}^0 , $\sigma_{\theta\theta}^0$, σ_{rz}^0 та вектора переміщень u_r^0 , u_z^0 основного стану матимуть вигляд:

$$\sigma_{rr}^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = -\rho g(b-z), \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = 0, \quad \sigma_{rz}^0 = 0,$$
$$u_r^0(z) = \frac{\nu \rho g r}{E}(b-z), \quad u_z^0(z) = \frac{\rho g}{2E}((b-z)^2 - 4b^2).$$

Тут E – модуль Юнга матеріалу циліндра, ν – коефіцієнт Пуассона, ρg – вага на одиницю об'єму тіла, $2b$ – висота циліндра.

Задача визначення збуреного стану полягає у знаходженні розв'язку однорідного бігармонічного рівняння [1]:

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\chi} = 0$$

за крайових умов на бічній поверхні циліндра $r = 1$:

$$\tilde{u}_r|_{r=1} = -u_r^0(z), \quad \tilde{u}_z|_{r=1} = -u_z^0(z)$$

і неоднорідних умов на торцевих поверхнях циліндра $z = \pm b$:

$$\tilde{\sigma}_{zz}|_{z=-b} = -\sigma_{zz}^0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}|_{z=-b} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{zz}|_{z=b} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}|_{z=b} = 0.$$

Задача визначення збуреного стану розкладена на дві задачі, а для кожної з них розглянуто симетричний та антисиметричний випадок відповідно. Розв'язок кожної із чотирьох задач подано у вигляді розвинення за повними системами комплексних осесиметричних однорідних розв'язків

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»,
25–27 травня 2022 р., Львів**

рівнянь Ляме. Введено квадратичні функціонали для розв'язування першої та другої збурених задач, які за квадратичною нормою визначають відхилення розв'язку задач від заданих відповідних неоднорідних умов. Умови мінімуму функціоналів приводять до безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно коефіцієнтів розвинення розв'язків, які розв'язували методом редукції [2]. Проведено числове дослідження компонент напружень за осьовою координатою для різних значень довжин циліндра.

1. Тимошенко С. П., Гуд'єр Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
2. Chekurin V. F., Postolaki L. I. A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for cylinder // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2015. – 2, No. 2. – P. 128–139. <https://doi.org/10.23939/mmc2015.02.128>.

**SOLVING AXIALLY SYMMETRIC ELASTICITY PROBLEM FOR A
CYLINDER UNDER ITS OWN WEIGHT WITH THE USE OF THE
VARIATIONAL APPROACH**

The problem of determining of stress-strain state of a solid finite cylinder taking into account its own weight is solved using the variational method of homogeneous solutions.