**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»**
**25–27 травня 2022 р., Львів**

УДК 512.552.13

# КІЛЬЦЯ $k$-ЕВКЛІДОВОГО РАНГУ 1

**Андрій Плаксін, Андрій Саган, Олег Романів**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
andriy.plaksin@gmail.com

Всі розглядувані в цій роботі кільця є комутативними з відмінною від нуля одиницею. Через $GL_n(R)$ позначимо групу всіх оборотних матриць порядку $n$ з елементами кільця $R$. Під елементарними матрицями з елементами кільця розуміємо квадратні матриці таких типів: 1) діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; 2) матриці, відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю; 3) матриці, отримані з одиничної перестановкою рядків чи стовпчиків. Групу всіх елементарних матриць порядку $n$ з елементами з кільця $R$ позначатимемо $GE_n(R)$. Кільце називають *елементарно головним* [1], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такий елемент $d \in R$ і матриця $Q \in GE_2(R)$, що $(a, b)Q = (d, 0)$.

*Нормою над кільцем* $R$ називають таке відображення $\varphi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, що 1) $\varphi(0) = 0$ тоді і лише тоді, коли $a = 0$; 2) $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ для довільних таких елементів $a, b \in R$, що $ab \neq 0$.

Нехай $k$ — фіксоване натуральне число, $a, b \in R$, причому $b \neq 0$. Якщо існують такі елементи $q_i, r_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$, що

$$a = bq_1 + r_1,\ b = r_1q_2 + r_2,\ \ldots,\ r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, \tag{1}$$

то послідовність рівностей (1) називається *$k$-членним ланцюгом подільності* для пари елементів $a$, $b$ [2]. Пара елементів $(a, b)$, де $b \neq 0$, з кільця $R$ називається *$k$-евклідовою парою* стосовно норми $\varphi$, якщо $\varphi$ задовольняє дві умови із означення норми та існує такий $k$-членний ланцюг подільності вигляду (1), що $\varphi(r_k) < \varphi(b)$. Кільце $R$ називається *$k$-евклідовим кільцем* [2] стосовно норми $\varphi$, якщо $(a, b)$ — $k$-евклідова пара для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$. Елемент $a$ кільця $R$ назвемо — *$k$-евклідовим*, якщо для довільного ненульового елемента $b \in R$, пара $(a, b)$ — $k$-евклідова. Кільце $R$ називається кільцем $k$-евклідового рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, де $aR + bR = R$, існує такий елемент $\lambda \in R$, що $a + b\lambda$ — $k$-евклідовий елемент.

**Теорема 1.** *Нехай $R$ — кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

*(1) $R$ — кільце $k$-евклідового рангу 1;*

*(2) для будь-яких* $a, b \in R$*, таких що* $aR + bR = R$ *і* $0 \neq c \in R$*, існують* $y, d \in R$ *і матриця* $Q \in GE_2(R)$*, що* $(a + by, c)Q = (d, 0)$.

*Кільцем Безу* [3] називають кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним.

**Теорема 2.** *Будь-яке кільце Безу* $k$*-евклідового рангу 1 є елементарно головним.*

**Теорема 3.** *Довільна оборотна матриця над кільцем* $k$*-евклідового рангу 1 розкладається у скінченний добуток елементарних матриць.*

**Теорема 4.** *Нехай* $R$ *— кільце* $k$*-евклідового рангу 1 і* $I$ *ненульовий ідеал* $R$*. Тоді* $R/I$ *є кільцем* $k$*-евклідового рангу 1.*

**Теорема 5.** *Нехай* $R, R_1, R_2$ *— кільця, такі, що* $R = R_1 \times R_2$*. Тоді* $R$ *є кільцем* $k$*-евклідового рангу 1 тоді і тільки тоді, коли* $R_1$ *і* $R_2$ *є кільцями* $k$*-евклідового рангу 1.*

1. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Euclidiens // – These de docteur troisieme cycle, 1976.

2. Cooke G., A weakening of the Euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory. I. // J. Reine Angew. Math. – 1976. – Vol. 282. – P. 133-156.

3. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math. J. – 1955. – Vol. 156. – P. 159-163.

4. *Zabavsky B.V., Romaniv O.M.* Rings with elementary reduction of matrices // Ukr. mat. journal. – 2000. - Vol. 52, №12. – P. 1641-1649.

## RINGS $k$-EUCLIDEAN RANGE 1

*English annotation*