

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТІЛ ІЗ НИТКОВИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ

Ярослав Пастернак, Тетяна Третяк, Олександр Макачук

Луцький національний технічний університет, iaroslav.m.pasternak@gmail.com

На даний час значний практичний інтерес виник до створення математичних методів механіки та термомеханіки структурно-неоднорідних тіл, особливо, тих, що стосуються підходів до розрахунку композитних матеріалів, в тім і волокнистих [1]. За математичного (особливо числового) моделювання окресленого кола структурно неоднорідних (композитних) матеріалів, зазвичай, виникає необхідність враховувати істотну відмінність розмірів наповнення у різних напрямках [1]. Зокрема, для ниткових неоднорідностей з'ясовано [2], що у випадку знесення умов контакту між середовищем та неоднорідністю на деяку просторову криву (яка суміщається з осьюовою лінією L включення) вдається на 2 порядки зменшити розмірність задачі і отримати одновимірні інтегральні рівняння термопружності [2]. Проте результуюча крайова задача є погано обумовленою і для отримання збіжних результатів потребує певної регуляризації [2]. Завдяки останній вдалося отримати аналітично-числові розв'язки задач термопружності для середовища із прямолінійним теплопровідним деформівним нитковим включенням скінченної довжини. Проте для практики важливо також мати загальні числові підходи, що дали би можливість розв'язувати задачу для декількох неоднорідностей, форма яких не обов'язково є прямолінійною.

Для цього у даному дослідженні створено підхід на основі концепції методу граничних елементів. Для прикладу, розглянемо рівняння теплопровідності тіла із нитковою неоднорідністю [3]

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}_0)] dL(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x}_0) \left[\int_{L \setminus L_c} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}_0) \right] = \theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0)) - \theta^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (1)$$

де $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ – фундаментальний розв'язок задачі теплопровідності для безмежного однорідного середовища; $\gamma(\mathbf{x})$ – шукана функція впливу неоднорідності; $B(\mathbf{x}_0) = \int_{L_c} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x})$; $\theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0))$ – модель ниткової

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»,
25–27 травня 2022 р., Львів**

неоднорідності; L_ε – контур малого радіусу ε , що огинає точку колокації \mathbf{x}_0 .

Введемо до розгляду кусково-гладку функцію

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \geq \varepsilon, \\ \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{\varepsilon}, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

Тоді легко показати, що

$$\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) = \int_{L \setminus L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + C(\mathbf{x}_0), \quad (3)$$

де $C(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon - \varepsilon}^{\varepsilon} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL$ – регулярний інтеграл, що залежить лише від орієнтації кривої L у точці \mathbf{x}_0 (а для ізотропних тіл узагалі є сталою величиною). З урахуванням (3) рівняння (1) набуде такого регуляризованого вигляду, придатного для безпосереднього впровадження у метод граничних елементів:

$$\begin{aligned} & \int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}_0)] dL(\mathbf{x}) + \\ & + \gamma(\mathbf{x}_0) \left[\int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) - C(\mathbf{x}_0) + B(\mathbf{x}_0) \right] = \\ & = \theta^{\text{incl}}(\mathbf{x}_0, \gamma(\mathbf{x}_0)) - \theta^\infty(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогічно модифікуються також інтегральні рівняння термопружності, що дало можливість створити обчислювальну схему методу граничних елементів для розрахунку середовищ із деформівними нитковими включеннями.

1. *Rinaldi R.G., Blacklock M., Bale H., Begley M.R., Cox B.N.* Generating virtual textile composite specimens using statistical data from micro-computed tomography: 3D tow representations // *J Mechanics Physics Solids*. – 2012. – 60. – P. 1561–1581.
2. *Сулім Г.Т., Пастернак Я.М., Третьяк Т.В.* Моделювання деформівних термопружних ниткових включень в ізотропному середовищі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2021. – 64, № 1. – С. 73–86.

**BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ANALYSIS OF SOLIDS WITH
THREAD-LIKE INHOMOGENEITIES**

This study presents novel boundary element formulation for analysis of thermoelastic solids containing thread-like inclusions. It presents regularization technique for integral equations of the resulting ill-posed boundary value problem, when thread-like inclusions are modelled with spatial curves.