Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»
25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 512.548.7

ПРО В'ЯЗКУ ПАРАСТРОФНИХ ОРБІТ МНОГОВИДІВ КВАЗІГРУП

Федір Сохацький, Алла Луценко

Донецький національний університет імені Василя Стуса,
fmsokha@ukr.net, lucenko.alla32@gmail.com

Алгебра $\mathcal{Q}{:=}(Q;\cdot;\overset{\ell}{\cdot};\overset{r}{\cdot})$ з тотожностями

$$(x\cdot y)\overset{\ell}{\cdot} y=x,\quad (x\overset{\ell}{\cdot} y)\cdot y=x,\quad x\overset{r}{\cdot}(x\cdot y)=y,\quad x\cdot(x\overset{r}{\cdot} y)=y \qquad (1)$$

називається *квазігрупою*, операція $(\cdot)$ — *головною*, операції $(\overset{\ell}{\cdot})$, $(\overset{r}{\cdot})$ називаються *лівим* та *правим діленнями* операції $(\cdot)$ [1]. Нехай $\ell := (13)$, $s := (12)$, $r := (23)$, $S_3 := \{\iota, \ell, s, r, \ell s, \ell r\}$. σ-парастроф $(\overset{\sigma}{\cdot})$, де $\sigma \in S_3$, операції $(\cdot)$ визначається рівностями

$$x_{1\sigma}\overset{\sigma}{\cdot} x_{2\sigma}=x_{3\sigma} \;\Leftrightarrow\; x_1\cdot x_2=x_3.$$

σ-парастроф ${}^{\sigma}\mathcal{Q}$ квазігрупи $\mathcal{Q}$ називається алгебра, утворена з квазігрупи $\mathcal{Q}$ заміною головної операції на її σ-парастроф. Вона визначається тотожностями

$$\begin{aligned} &(x\overset{\sigma^{-1}}{\cdot} y)\overset{\ell\sigma^{-1}}{\cdot} y=x,\quad (x\overset{\ell\sigma^{-1}}{\cdot} y)\overset{\sigma^{-1}}{\cdot} y=x,\\ &x\overset{r\sigma^{-1}}{\cdot}(x\overset{\sigma^{-1}}{\cdot} y)=y,\quad x\overset{\sigma^{-1}}{\cdot}(x\overset{r\sigma^{-1}}{\cdot} y)=y. \end{aligned} \qquad (2)$$

Клас алгебр ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, який складається з усіх σ-парастрофів квазігруп із класу квазігруп $\mathfrak{A}$, називається *σ-парастрофом* класу $\mathfrak{A}$ [2]. Парастроф многовиду квазігруп також є многовидом квазігруп. Квазігрупові операції $\circ$, квазігрупи $\mathcal{Q}$ та класи квазігруп $\mathfrak{A}$ задовольняють співвідношення:

$${}^{\sigma}(\overset{\tau}{\circ})=\overset{\sigma\tau}{\circ},\qquad {}^{\sigma}({}^{\tau}\mathcal{Q})={}^{\sigma\tau}\mathcal{Q},\qquad {}^{\sigma}({}^{\tau}\mathfrak{A})={}^{\sigma\tau}\mathfrak{A}.$$

Дію симетричної групи S_3 на множині K називають *парастрофною дією*, а стабілізатор $\mathrm{Ps}(k)$ і орбіту $\mathrm{Po}(k)$, які визначаються рівностями

$$\mathrm{Ps}(k) := \{\sigma \mid {}^{\sigma}k = k\},\qquad \mathrm{Po}(k) := \{k_1 \mid (\exists\sigma\in S_3)\; k_1={}^{\sigma}k\},$$

відповідно називають *групою парастрофної симетрії* та *парастрофною орбітою (пучком)* елемента k.

В'язкою многовидів ми називаємо напівгратку многовидів, яка замкнена відносно парастрофних образів квазігруп. Для довільних многовидів $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ виконується співвідношення

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \quad \Longrightarrow \quad {}^{\sigma}\mathfrak{A} \subseteq {}^{\sigma}\mathfrak{B} \tag{3}$$

Тому включення многовидів визначає відношення на пучках многовидів, яке також позначатимемо тим самим символом $\subseteq$:

$$\langle\mathfrak{A}\rangle \subseteq \langle\mathfrak{B}\rangle \;\; :\Leftrightarrow \;\; \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \tag{4}$$

Отже, парастрофна орбіта (пучок) $\langle\mathfrak{A}\rangle$ включається в парастрофну орбіту (пучок) $\langle\mathfrak{B}\rangle$ тоді і тільки тоді, коли кожний многовид пучка $\langle\mathfrak{A}\rangle$ є підмноговидом деякого многовида із пучка $\langle\mathfrak{B}\rangle$.

Виявилось, що пучки многовидів квазігруп утворють напів гратку, що випливає з такої теореми.

Теорема 1. *Відношення включення парастрофних орбіт (пучків) є відношенням порядку.*

Це означає, що описання в'язок многовидів квазігруп можна замінити описанням напів граток парастрофних орбіт многовидів квазігруп. А це значно спрощує класифікацію квазігруп та побудову напівгратки.

1. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967. – 223 с.
2. *Sokhatsky F.M.* Parastrophic symmetry in quasigroup theory. Visnyk DonNU, A: natural Sciences. 2016. Vol.1-2. P. 70–83.

BUNCH OF PARASTROPHIC ORBITS OF VARIETIES OF QUASIGROUPS

The dependence between parastrophes and inclusion of varieties according to the concept of parastrophic symmetry is shown. The inclusion relation of parastrophic orbits is a relation of order has been proved.