УДК 517.958:512.816

Групи еквівалентності лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

Олександра В. Локазюк

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
sasha.lokazuik@gmail.com

Опис трансформаційних властивостей і класифікація лiївських симетрій звичайних диференціальних рівнянь — класичні задачі групового аналізу (див. огляди в роботах [1, 2]), хоча тут є багато відкритих проблем, особливо щодо систем звичайних диференціальних рівнянь, зокрема, і лінійних. Важливим класом таких систем є клас $\bar{\mathcal{L}}$ нормальних лінійних систем із n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку вигляду [1]

$$\boldsymbol{x}_{tt} = A(t)\boldsymbol{x}_t + B(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

з n невідомими функціями $x^1, \ldots, x^n$, $\boldsymbol{x}(t) = \big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)^\mathsf{T}$, де $n \geqslant 2$. Набір $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ довільних елементів класу $\bar{\mathcal{L}}$ утворюють довільні гладкі $n \times n$ матричнозначні функції A та B змінної t і довільна гладка векторнозначна функція $\boldsymbol{f}$ змінної t.

Очевидно, що звичайна група еквівалентності $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{L}}}$ даного класу $\bar{\mathcal{L}}$ містить підгрупу, утворену перетвореннями

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = H(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t), \tag{2а}$$

$$\begin{gathered} \tilde{A} = (HA + 2H_t)H^{-1}, \qquad \tilde{B} = (HB - \tilde{A}H_t + H_{tt})H^{-1}, \\ \tilde{\boldsymbol{f}} = H\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}_{tt} - \tilde{A}\boldsymbol{h}_t - \tilde{B}\boldsymbol{h}, \end{gathered} \tag{2б}$$

де H — довільна невироджена $n \times n$ матричнозначна функція змінної t, $\boldsymbol{h}$ — довільна векторнозначна функція змінної t. Будь-яку систему $\bar{L}_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}$ можна відобразити за допомогою перетворення вигляду (2), де H задовольняє матричне рівняння $H_t + \frac{1}{2}HA = 0$, а $\boldsymbol{h}$ — частинний розв'язок системи $\bar{L}_\theta$, в систему $\bar{L}_{\tilde{\theta}}$ з того ж класу, де $\tilde{A} = 0$, $\tilde{B} = H\big(B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2\big)H^{-1}$ та $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Таким чином, зводимо дослідження класу $\bar{\mathcal{L}}$ до дослідження його підкласу $\mathcal{L}'$ виокремленого за допомогою обмежень $A = 0$ та $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Далі тривіально репараметризуємо клас $\mathcal{L}'$, виключаючи A та $\boldsymbol{f}$ із набору довільних елементів для цього класу і повторно перепозначаючи B через V, тобто системи з класу $\mathcal{L}'$ набувають вигляду

$$\boldsymbol{x}_{tt} = V(t)\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

де V — довільна $n \times n$ матричнозначна функція змінної t.

Розглянемо підклас $\mathcal{L}'_0$ класу $\mathcal{L}'$ в який входять системи L'_V з $V(t) = v(t)E$, $t \in \mathcal{I}$, де v пробігає множину функцій змінної t, тобто $\{V(t) \mid t \in \mathcal{I}\} \subseteq \langle E \rangle$, E — одинична $n \times n$ матриця. Для таких V можна казати, що V пропорційна E із залежним від часу коефіцієнтом пропорційності. Підклас $\mathcal{L}'_0$, який є сингулярним у класі $\mathcal{L}'$, виокремлено з класу $\mathcal{L}'$ алгебраїчними рівняннями $V^{ab} = 0$, $a \neq b$, $V^{11} = \cdots = V^{nn}$. Доповненням сингулярного підкласу $\mathcal{L}'_0$ в $\mathcal{L}'$ є регулярний підклас $\mathcal{L}'_1 := \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}'_0$. Довільну систему з сингулярного підкласу $\mathcal{L}'_0$ можна звести до елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \mathbf{0}$, трансформаційні властивості якої добре відомі.

Наступна теорема описує групу еквівалентності класу $\mathcal{L}'$:

Теорема 1 ([1, теорема 4]). (i) *Групу еквівалентності $G^\sim_{\mathcal{L}'}$ класу $\mathcal{L}'$ утворюють перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = T_t^{1/2} C \boldsymbol{x}, \tag{4а}$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{T_t^2} C V C^{-1} + \frac{2T_t T_{ttt} - 3T_{tt}^2}{4T_t^4} E, \tag{4б}$$

де $T = T(t)$ — довільна функція змінної t, $T_t \neq 0$, C — довільна невироджена стала $n \times n$ матриця. Група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_1$ і канонічно суттєва група еквівалентності підкласу $\mathcal{L}'_0$ співпадають із групою $G^\sim_{\mathcal{L}'}$.

(ii) *Розбиття класу $\mathcal{L}'$ на підкласи $\mathcal{L}'_0$ та $\mathcal{L}'_1$ індукує розбиття групоїда $\mathcal{G}^\sim_{\mathcal{L}'}$ на підгрупоїди $\mathcal{G}^\sim_{\mathcal{L}'_0}$ та $\mathcal{G}^\sim_{\mathcal{L}'_1}$, $\mathcal{G}^\sim_{\mathcal{L}'} = \mathcal{G}^\sim_{\mathcal{L}'_0} \sqcup \mathcal{G}^\sim_{\mathcal{L}'_1}$.*

(iii) *Підклас $\mathcal{L}'_1$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків.*

(iv) *Підклас $\mathcal{L}'_0$ — $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-орбіта елементарної системи L'_0, і цей підклас як і весь клас $\mathcal{L}'$ є напівнормалізованими у звичайному сенсі.*

Автор засвідчує фінансову підтримку Національного фонду досліджень України (проєкт 2020.02/0089).

1. *Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O.* Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, arXiv:2105.05139.

2. *Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M.* Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – **397**. – 434–440, arXiv:1203.0387.

Equivalence groups of linear systems of second-order ordinary differential equations

We study equivalence groups of normal linear systems of second-order ordinary differential equations and discuss corresponding equivalence properties for solving the group classification problem for such systems.