Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»
25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 531.39, 517.977

Спостерігач Луенбергера для пружної балки з точковою масою

Юлія Калоша, Олександр Зуєв

Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України, julykucher@gmail.com, zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de

Розглядається динамічна система у гільбертовому просторі:

$$\frac{d}{dt}\,\xi(t) = \mathcal{A}\xi(t) + \mathcal{B}U, \quad \xi(t) \in X, \tag{1}$$

де

$$\mathcal{A} : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{A}\xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{\rho}(EIu'')'' \\ q \\ -\frac{\varkappa}{m}p + \frac{1}{m}\left[(EIu'')'\Big|_{l_0-0} - (EIu'')'\Big|_{l_0+0}\right] \end{pmatrix},$$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \xi \in X : \begin{array}{cc} u \in H^4(0,l_0) \cap H^4(l_0,l), & v \in \overset{\circ}{H}{}^2(0,l), \\ u''(0) = u''(l) = 0, & p = u(l_0), \\ u''|_{x=l_0-0} = u''|_{x=l_0+0}, & q = v(l_0) \end{array} \right\} \subset X,$$

$l_0 \in (0,l)$, $\rho(x) > 0$, $E(x)I(x) \in C^2[0,l]$, $E(x)I(x) > 0$ для всіх $x \in (0,l)$, m та $\varkappa$ — додатні сталі, $U = (F, M_1, \ldots, M_k)^T$ — керування,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho}\psi_1'' & \ldots & \frac{1}{\rho}\psi_k'' \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Абстрактне рівняння (1) представляє математичну модель балочної системи, описаної в [1]. Оператор $\mathcal{A}$ є інфінітезимальним генератором C_0-напівгрупи в X.

При застосуванні керування зі зворотним зв'язком у вигляді

$$F = -\alpha_0 q, \quad M_s = -\alpha_s \int\limits_0^l \psi_s''(x) v(x) dx, \quad \alpha_s > 0, \quad s = \overline{0,k},$$

тривіальний розв'язок системи (1) є асимптотично стійким ([1]).

Нехай маємо $\lambda_j = -\tilde{\lambda}_j^2$, де $\tilde{\lambda}_j$ — власні значення оператора $\mathcal{A}$, та $W_1(x), \ldots, W_N(x)$ — власні функції, що відповідають $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Позначимо $\|W_j\|_H^2 = \int_0^l \rho(W_j(x))^2\,dx + m(W_j(l_0))^2$ і розглянемо систему з виходом

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu, \tag{2}$$

$$y = Cz(t), \tag{3}$$

де $z = (q_1, p_1, \ldots, q_N, p_N)^T$, $u = (u_0, u_1, \ldots, u_k)^T$, $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_N)$,

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ b_{10} & \ldots & b_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{N0} & \ldots & b_{Nk} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_{01} & 0 & \ldots & c_{0N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & 0 & \ldots & c_{rN} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{j0} = \frac{W_j(l_0)}{\|W_j\|_H^2}, \quad b_{ji} = \frac{\int_0^l \psi_i(x) W_j''(x)\,dx}{\|W_j\|_H^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$c_{0j} = W_j(l_0), \quad c_{sj} = W_j''(l_s), \quad s = \overline{1, r}.$$

Рівняння (2) є проєкцією задачі (1) на скінченновимірний лінійний многовид $\mathrm{span}\{W_1, \ldots, W_N\}$.

Для системи (2), (3) побудовано спостерігач Луенбергера у вигляді

$$\dot{\bar{z}}(t) = (A - FC)\bar{z}(t) + Bu(t) + Fy(t),$$

де $\gamma_s > 0,\ F = \begin{pmatrix} f_{10} & \ldots & f_{1r} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{N0} & \ldots & f_{Nr} \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},\ f_{js} = \gamma_s \frac{c_{sj}}{\lambda_j \|W_j\|^2},\ j = \overline{1, N},\ s = \overline{0, r}.$

В роботі [2] доведено асимптотичну збіжність до нуля похибки спостережень за виконання умов спостережуваності системи (2), (3).

1. *J. I. Kalosha, A. L. Zuyev* Asymptotic Stabilization of a Flexible Beam With an Attached Mass. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, Vol. 73, no. 10, Oct. 2021, pp. 1330-41, doi:10.37863/umzh.v73i10.6750.

2. *A. Zuyev, J. Kalosha* Observer Design for a Flexible Structure with Distributed and Point Sensors. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Vol. 35, no. 2, 2021, pp. 125-136, doi:10.37069/1683-4720-2021-35-9.

Luenberger Observer for a Flexible Beam with a Point Mass

Luenberger observer is constructed for finite-dimensional approximation of the flexible beam oscillations equation. Asymptotic convergence to zero of the observation error is proved.