Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»
25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 517.95

ПОЧАТКОВО-ІНТЕГРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ У СФЕРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

[1] **Софія Дмитрик,** [1,2] **Антон Кузь**

[1] НУ "Львівська політехніка",
[2] ІППММ ім.Я.С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

Введемо такі позначення:

$$\vec{r} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \ \mathbb{B}_R := \{\vec{r} : \|\vec{r}\| < R\},\ R > 0.$$

У області $D := \{(t, \vec{r}) : t \in (0, T), \vec{r} \in \mathbb{B}_R\}$ розглядаємо таку задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \tag{1}$$

$$u(0, \vec{r}) = f(\vec{r}), \quad \int_0^T u(t, \vec{r}) dt = g(\vec{r}), \tag{2}$$

де f та g — деякі задані достатньо гладкі функції, Δ — оператор Лапласа.

Задача (1)-(2) описує коливання сферичного об'єму, наприклад сфери заповненої рідиною чи газом, за заданим початковим відхиленням $f(\vec{r})$ від рівноважного положення та відомим усередненим відхиленням $g(\vec{r})$ за проміжок часу T.

У зв'язку із сферичною симетрією за змінними x, y, z області D розв'язок задачі (1)-(2) знаходитимемо у сферичних координатах r, θ, φ.

Позначимо: $\psi_n(r)$ — сферичні функції Бесселя, які зображуються формулою $\psi_n(r) = (-r)^n \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n \frac{\sin r}{r}$, $\tilde{j}_{nm}$ — m-тий додатній нуль функції $\psi_n(r)$, $\psi_n(\tilde{j}_{nm}) = 0$; A_{nmk} — стала нормування визначена за формулою $A_{nmk} = \frac{2}{R\psi_{n+1}(\tilde{j}_{nm})} \left(\frac{\pi}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\right)^{1/2}$; $Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)$ — дійсні сферичні гармоніки:

$$\begin{cases} Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta) \cos k\varphi, & k = -n, -n+1, \ldots, 0, \\ Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta) \sin k\varphi, & k = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

де функції $P_n^{(j)}(t)$, $t \in [-1, 1]$, — приєднані функції Лежандра першого роду, $P_n^{(j)}(t) = (1 - t^2)^{j/2} \frac{d^j}{dt^j} P_n(t)$, $P_n(t)$ — поліном Лежандра степеня n.

Якщо виконується умова

$$\forall m, k \in \mathbb{N} \quad aT\tilde{j}_{nm} \neq R\pi k, \tag{3}$$

то розв'язок задачі (1), (2), зображується рядом

$$u(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} w_{nmk}(t) A_{nmk} \psi_n \left(\tilde{j}_{nm} \frac{r}{R} \right) Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) \tag{4}$$

у якому функції $w_{nmk}(t)$ визначаються формулами

$$\begin{aligned} w_{nmk}(t) &= f_{nmk} \cos\left(a\sqrt{\lambda_{nm}} t\right) + \\ &+ \frac{a^2 \lambda_{nm} g_{nmk} - a\sqrt{\lambda_{nm}} \sin\left(a\sqrt{\lambda_{nm}} T\right) f_{nmk}}{\left(1 - \cos\left(a\sqrt{\lambda_{nm}} T\right)\right) a\sqrt{\lambda_{nm}}} \sin\left(a\sqrt{\lambda_{nm}} t\right), \end{aligned} \tag{5}$$

де f_{nmk} та g_{nmk}— коефіцієнти Фур'є функцій $f(x)$ та $g(x)$ відповідно.

Позначимо через $L_2(\mathbb{B}_R)$ — простір функцій $y(r, \theta, \varphi)$ таких, що

$$\|y; L_2(\mathbb{B}_R)\|^2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |y(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi < \infty;$$

$H^{q,p}(\mathbb{B}_R)$, $k \geqslant 0$, — простір функцій $y \in L_2(\mathbb{B}_R)$ таких, що

$$\|y; H^{q,p}(\mathbb{B}_R)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \tilde{j}_{nm}^2)^q (1 + n^2)^p \left(\sum_{k=-n}^{n} |y_{nmk}|^2 \right) < \infty;$$

$C^s([0, T], H^{q,p}(\mathbb{B}_R))$ — простір функцій $u(t, r, \theta, \varphi)$ таких, що $\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in H^{q,p}(\mathbb{B}_R)$ для кожного $j = 0, 1, \ldots, s$, із нормою

$$\|u; C^s([R_1, R_2], H^{q,p}(\mathbb{B}_R))\| = \sum_{j=0}^{s} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j}; H^{q,p}(\mathbb{B}_R) \right\|.$$

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (3) *та* $f \in H^{q+s+\delta,p}(\mathbb{B}_R)$, $g \in H^{q+s+2+\delta,p}(\mathbb{B}_R)$, $\delta > 0$, *тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега на* $\mathbb{R}$*) чисел* $\frac{R}{aT}$ *існує единий розв'язок и задачі* (1)-(2)*, який зображується рядом* (4) *та належить простору* $C^s([0, T], H^{q,p}(\mathbb{B}_R))$*, причому*

$$\|u; C^s([0, T], H^{q,p}(\mathbb{B}_R)\| \leqslant C_3(\|f; H^{q+s+\delta,p}(\mathbb{B}_R)\| + \|g; H^{q+s+2+\delta,p}(\mathbb{B}_R)\|).$$

THE INITIAL-INTEGRAL PROBLEM FOR WAVE EQUATION IN SPHERICAL DOMAIN

The conditions for the existence of a unique solution of the initial-integral problem for a three-dimensional wave equation in a spherical domain are investigated. The solution of the problem in the form of a series on Bessel's spherical functions and spherical harmonics was constructed