Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»
25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 517.53

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ДО ПОБУДОВИ БАГАТОВИМІРНИХ БАГАТОТОЧКОВИХ АПРОКСИМАЦІЙ ТИПУ ПАДЕ

Лілія Чернецька

Інститут математики НАН України, liliia.cher.liliia@gmail.com

Застосовано узагальнені моментні зображення до вивчення багатовимірних багатоточкових апроксимацій типу Паде.

Нехай функція $f(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d)$ є аналітичною в області $D \subset \mathbb{C}^d$, що містить точки $\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{R-1}$, $R > 1$, і розвивається в околах цих точок в степеневі ряди

$$f(\boldsymbol{z}) \sim \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_r)^{\boldsymbol{k}},\ r = \overline{0, R-1},$$

(тут $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}} = z_1^{k_1} \ldots z_d^{k_d}$). Будемо називати d-вимірною R–точковою апроксимантою типу Паде функції f раціональну функцію

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{R-1} \\ \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{R-1} \end{array} ; \boldsymbol{z} \right) = \frac{P_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{z})}{Q_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{z})},$$

де

$$P_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{N}} p_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}} Q_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}} q_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}},$$

таку, що мають місце розвинення

$$f(\boldsymbol{z}) - \frac{P_{\mathcal{N}}(\boldsymbol{z})}{Q_{\mathcal{D}}(\boldsymbol{z})} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^d\setminus\mathcal{E}_r} e_{\boldsymbol{k}}^{(r)}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_r)^{\boldsymbol{k}}$$

в околах точок $\boldsymbol{z}_r$, $r = \overline{0, R-1}$.

Теорема 1. *Нехай функція f, аналітична в бікрузі K_{R_1,R_2}, $|z_1| < R_1$, $|w_1| < R_2$, в околі точки $(0,0)$ розвивається в степеневий ряд вигляду*

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \tag{1}$$

для послідовності коефіцієнтів якого $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ *справджується УМЗ вигляду*

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle,\ k,m,j,n \in \mathbb{Z}_+,$$

і при цьому існує узагальнений поліном вигляду

$$Y_{\mathcal{D}} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n} y_{j,n}$$

з ненульовим старшим коефіцієнтом $c_{N_1,N_2} \neq 0$, *для якого виконуються умови біортогональності*

$$\left\langle x_{l,r}^{(1)}, Y_{\mathcal{D}}\right\rangle = 0,\ (l,r) \in \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1,N_2)\}.$$

Тоді раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f\left(\begin{array}{c}(0,0),(z_1,w_1)\\ \mathcal{E}_0,\mathcal{E}_1\end{array};z,w\right) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n,$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m-n} +$$

$$+\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} u_{k,m}^{(1)}(z-z_1)^k(w-w_1)^m + \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1} v_{k,m}^{(1)}(z-z_1)^k(w-w_1)^m$$

буде розвиватися в околі точки $(0,0)$ *в ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду* (1) *при* $(k,m) \in \Delta_{N_1-1,N_2-1} = \mathcal{E}_0$, *а в околі точки* (z_1,w_1) — *з коефіцієнтами розвинення функції* f *в цій точці при* $(k,m) \in \Delta_{N_1,N_2} \setminus \{(N_1,N_2)\} = \mathcal{E}_1$.

1. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та багатоточкові апроксимації Паде // Укр. мат. журн. – 2004. – т. 56, № 7. – С. 991– 995.
2. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Узагальнені моментні зображення та багатовимірні багатоточкові апроксимації типу Паде // Укр. мат. журн. – 2019. – т. 71, № 10. – С. 1331– 1346.

GENERALIZED MOMENT REPRESENTATIONS AND MULTIVARIATE MULTIPOINT PADE TYPE APPROXIMANTS

V.K.Dzyadyk's method of generalized moment representations is used to study and construct twovariate twopoint Padé type approximants.